



面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学(II)

杨琪瑜 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Advanced Mathematics (II)



ISBN 7-04-010795-3



9 787040 107951 >

定价 11.10 元

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等数学(II)

杨琪瑜 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. II/杨琪瑜主编. —北京:高等教育出版社,
2002.12 (2003重印)

ISBN 7-04-010795-3

I. 高... II. 杨... III. 高等数学—高等学校—
教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 070378 号

高等数学(II)

杨琪瑜 主编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 10
字 数 180 000

版 次 2002 年 12 月第 1 版
印 次 2003 年 4 月第 3 次印刷
定 价 11.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

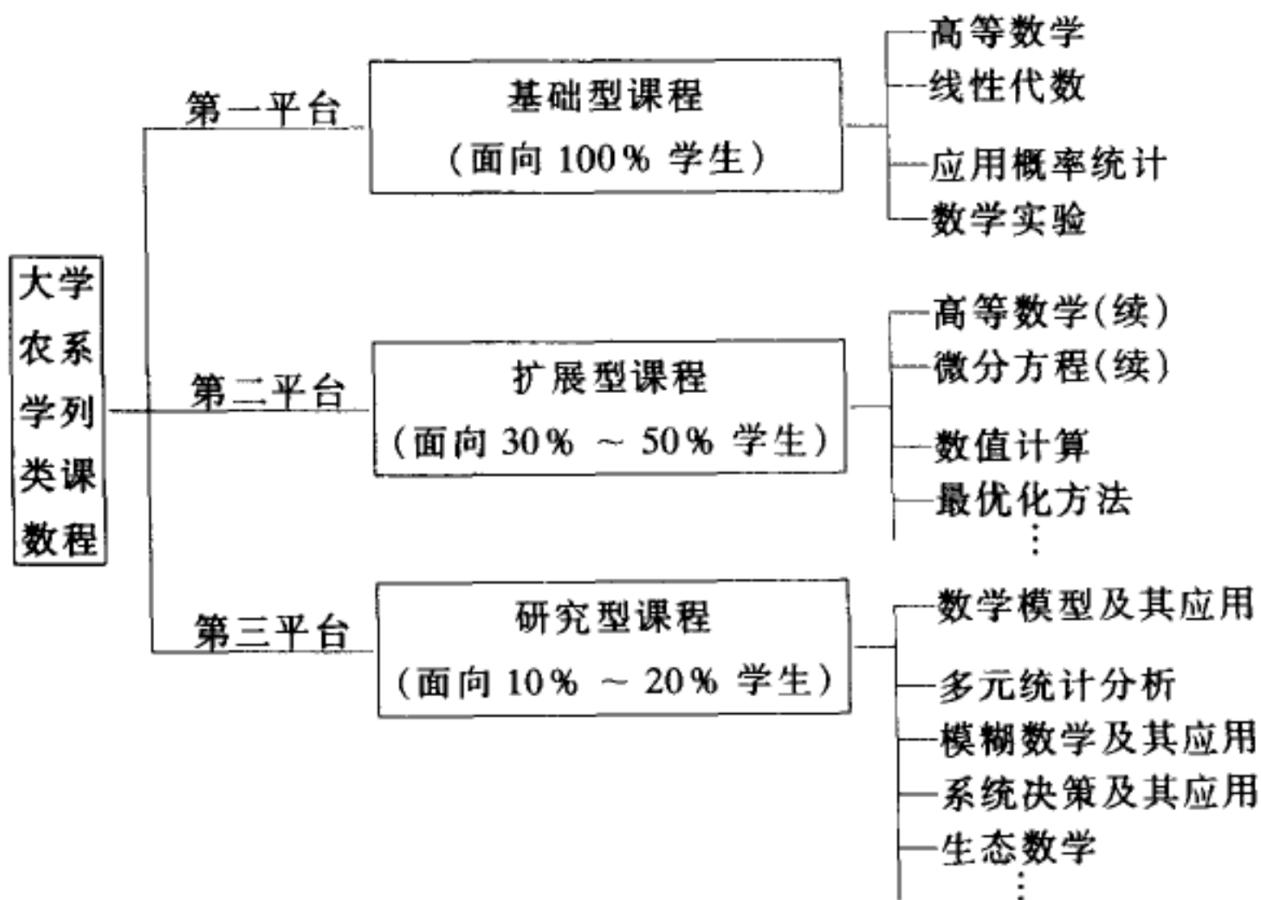
版权所有 侵权必究

总 序

本系列教材是在原华东地区高等农林水院校数学系列课程教材《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》试用后的基础上,按照教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”中有关项目的要求重新编写的,是项目 04-6 的研究成果.该系列教材各册如下:《高等数学(I)》、《高等数学(II)》、《线性代数》、《应用概率统计(上、下册)》、《数学模型及其应用》和《数学实验》,适用于高等农林水院校本科各专业.本系列教材编委会由杨崇瑞、王凯捷、吴坚、杨琪瑜、任明荣教授组成.

由南京农业大学牵头,东北林业大学、华中农业大学、西北农业大学合作主持,安徽农业大学、浙江农业大学、中国农业大学、河北农业大学、东北农业大学、黑龙江八一农垦大学、北京农学院、解放军农牧大学共 14 所院校参加的教育部教改项目“高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践”,在各有关院校的重视和项目组成员的共同努力下,已通过验收,并获得了专家组的好评.这套系列教材就是该项目研究成果的一部分.此外,它也是在经过几次会议和有关专家讨论后,在高等教育出版社的大力支持下确定出版的.

该系列教材的选题主要遵从如下的课程体系设置:



该系列教材的出版,首先要感谢参与编写的有关人员,感谢农业部数学课程

教学指导委员会的关心和支持,特别是这套系列教材的总设计、该项目组的总负责人杨崇瑞教授,他未能看到这套教材的出版就溘然长逝.现在,该系列教材的顺利出版,是对杨崇瑞先生的莫大慰藉.

编委会十分感谢中科院院士、复旦大学教授李大潜先生担任本系列教材的主审.

由于该系列教材还是一个教改尝试,不免存在一些问题和不足之处,诚恳期望本系列教材的使用者提出意见和建议,以利今后的进一步修改和完善.

编委会

2000年10月10日

前 言

高等数学是大学数学教育中一门重要的基础课,对于培养面向 21 世纪人才起着重要的作用.本书是编者在多年教学实践和改革探索的基础上,为适应农林院校的教学要求而编写的.

作为面向 21 世纪高等农林院校本科数学(含生物统计)系列课程教学内容和课程体系改革的研究与实践(项目编号 04-6)的系列教材之一,本教材在项目研究成果的基础上,依据新的教学大纲,首先编写了过渡性教材,经过多年的教学实践,不断改进,最终编写出本教材.

本教材在处理多元微积分的经典内容时,强调介绍数学思想、注重内容的实际背景与几何意义的阐述,不苛求证明的完整性与严密性.对解题方法,着重介绍基本方法,淡化各种繁琐技巧,适当降低了难度.在数学应用方面,增加了相关简单的综合应用问题,供学生思考;本书增添了差分及差分方程一章,供教师选讲也可供学生自学,有助于培养学生用数学解决实际问题的能力.注意到与计算机的结合,介绍了相关的数学实验.

本教材杨琪瑜任主编,汪宏喜、蒋华松任副主编,参加编写工作的有南京林业大学的邬良春(第一章)、安徽农业大学的汪宏喜(第二、三章)、南京林业大学的蒋华松(第四、五章),南京林业大学杨琪瑜负责全书的统稿及增写综合应用问题部分.

编委有幸邀请复旦大学李大潜院士作为本书的主审,在此表示诚挚的谢意.同时我们衷心感谢杨崇瑞教授对本书的关心和鼓励.

由于编者水平有限,不妥与谬误之处在所难免,恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正.本书部分章节标有“*”,各校可根据实际情况选讲.

主 编

2001 年 2 月于南京

责任编辑	李 陶
封面设计	张 楠
责任绘图	黄建英
版式设计	胡志萍
责任校对	杨雪莲
责任印制	杨 明

目 录

第一章 空间解析几何初步	(1)
1.1 空间直角坐标系	(1)
一、空间点的直角坐标	(1)
二、空间两点间的距离	(2)
习题 1.1	(3)
* 1.2 向量及其加减法、向量与数的乘法	(3)
一、向量概念	(3)
二、向量的加减法	(4)
三、向量与数的乘法	(5)
四、向量的坐标	(6)
习题 1.2	(9)
* 1.3 向量的数量积与向量积	(10)
一、两向量的数量积	(10)
二、两向量的向量积	(11)
习题 1.3	(13)
1.4 曲面及其方程	(13)
一、曲面方程的概念	(13)
二、旋转曲面	(15)
三、柱面	(16)
四、空间平面及其方程	(17)
习题 1.4	(20)
1.5 空间曲线及其方程	(20)
一、空间曲线的方程	(20)
二、空间曲线在坐标平面上的投影	(21)
三、空间直线的方程	(22)
习题 1.5	(24)
1.6 二次曲面	(25)
一、椭球面	(25)
二、抛物面	(26)
三、双曲面	(27)

习题 1.6	(28)
第二章 多元函数及其微分学	(29)
2.1 多元函数的基本概念	(29)
一、区域	(29)
二、多元函数概念	(30)
三、二元函数的极限与连续	(32)
习题 2.1	(34)
2.2 偏导数	(35)
一、偏导数的定义及其计算法	(35)
二、高阶偏导数	(37)
习题 2.2	(39)
2.3 全微分	(39)
习题 2.3	(42)
2.4 多元复合函数求导法则	(43)
习题 2.4	(46)
2.5 隐函数求导法	(47)
一、一个方程的情形	(47)
* 二、方程组的情形	(49)
习题 2.5	(51)
* 2.6 微分法在几何上的应用	(51)
一、空间曲线的切线与法平面	(51)
二、曲面的切平面与法线	(53)
习题 2.6	(54)
* 2.7 方向导数与梯度	(55)
一、方向导数	(55)
二、梯度	(57)
* 习题 2.7	(58)
2.8 多元函数极值及其应用	(59)
一、多元函数的极值与最值	(59)
二、条件极值与拉格朗日乘数法	(61)
三、最小二乘法	(62)
习题 2.8	(64)
2.9 综合应用问题	(65)
一、多变量的经验函数(或称经验公式)	(65)
二、最大利润问题	(66)

第三章 二重积分	(68)
3.1 二重积分的概念与性质	(68)
一、二重积分的概念	(68)
二、二重积分的性质	(71)
3.2 在直角坐标系中二重积分的计算	(72)
习题 3.2	(78)
3.3 在极坐标系中二重积分的计算	(78)
习题 3.3	(83)
3.4 二重积分综合应用问题	(85)
一、求平面薄片的质量问题	(85)
二、求城市人口问题	(85)
三、求二元函数在区域上的平均值问题	(85)
第四章 无穷级数	(87)
4.1 常数项级数的概念	(87)
习题 4.1	(89)
4.2 数项级数的基本性质 级数收敛的必要条件	(89)
一、数项级数的性质	(89)
二、级数收敛的必要条件	(90)
习题 4.2	(91)
4.3 正项级数的审敛法	(91)
习题 4.3	(95)
4.4 任意项级数的审敛法	(95)
习题 4.4	(97)
4.5 幂级数	(98)
一、函数项级数的一般概念	(98)
二、幂级数及其收敛性	(99)
习题 4.5	(101)
4.6 幂级数的运算及其性质	(102)
习题 4.6	(103)
4.7 函数展开成幂级数	(104)
一、泰勒(Taylor)级数	(104)
二、函数展开成幂级数	(106)
习题 4.7	(109)
4.8 幂级数的应用	(109)
一、函数值的近似计算	(109)

二、求定积分的近似值	(110)
三、解微分方程	(111)
习题 4.8	(112)
4.9 级数的综合应用问题	(112)
一、药物的长期效水平与用药量问题	(112)
二、放射性元素衰变与考古问题	(113)
三、人口与生物量增长问题	(114)
四、污水处理的环保问题	(114)
五、投资及投资方案选择	(114)
六、减免税收刺激经济发展问题	(115)
第五章 差分及差分方程	(117)
5.1 差分及其性质	(117)
习题 5.1	(118)
5.2 差分方程的基本概念	(119)
一、描述所观察到的性态变化的差分方程	(119)
二、基本概念	(119)
习题 5.2	(120)
5.3 一阶常系数线性差分方程	(121)
一、齐次方程 $y_{n+1} - ay_n = 0$ 的解法	(121)
二、非齐次方程 $y_{n+1} - ay_n = f(n)$ 的解法	(121)
习题 5.3	(124)
5.4 二阶常系数线性差分方程	(125)
一、齐次方程 $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$ 的解法	(125)
二、非齐次方程 $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = a^n P_m(n)$ 的解法	(126)
习题 5.4	(127)
5.5 一阶非线性方程及混沌现象	(128)
习题 5.5	(131)
习题答案	(133)
参考书目	(146)

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。行为人将承担相应的民事责任和行政责任,构成犯罪的,将被依法追究刑事责任。社会各界人士如发现上述侵权行为,希望及时举报,本社将奖励举报有功人员。

现公布举报电话及通讯地址:

电 话:(010)84043279 13801081108

传 真:(010)64033424

E-mail:dd@hep.com.cn

地 址:北京市东城区沙滩后街 55 号

邮 编:100009



第一章 空间解析几何初步

用代数方法研究空间几何图形，就是空间解析几何学，它是平面解析几何的拓广.空间解析几何是学习多元函数微积分的必要基础。

本章首先建立空间直角坐标系，引进向量概念，简单介绍一下向量的运算与性质；然后介绍空间曲面与曲线，空间的平面与直线；最后介绍一下常用的二次曲面。

1.1 空间直角坐标系

一、空间点的直角坐标

过空间一个定点 O 作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，且一般具有相同的长度单位.这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)， y 轴(纵轴)， z 轴(竖轴)，统称坐标轴.它们的方向通常按“右手规则”确定，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的方向.这样确定的三条数轴就构成了一个空间直角坐标系，定点 O 称为坐标原点(图 1.1)

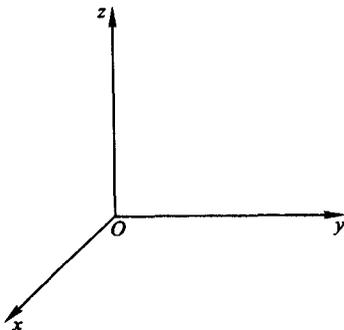


图 1.1

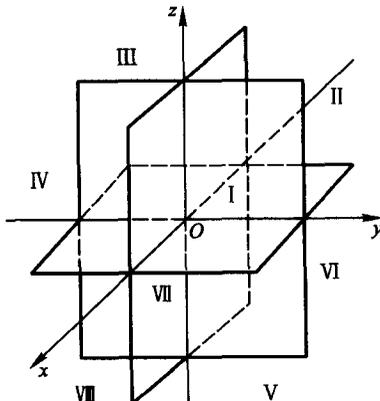


图 1.2

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样的平面统称坐标面.例如 x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面.这样互相垂直的三个坐标面将空间分成

八个部分 每一个部分称为一个卦限 含有 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向的那部分称为第一卦限。(图 1.2)

建立了空间直角坐标系后，就可以建立起空间某一点与三元有序数组的对应关系。设 M 为空间一点，过 M 点作三个平面分别垂直 x 轴、 y 轴、 z 轴。三个平面与三个轴的交点依次为 P, Q, R (图 1.3)。这三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x, y, z 。于是空间一点 M 就确定了一个有序数组 (x, y, z) 。反过来，设给定了数组 (x, y, z) 我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P 在 y 轴取坐标为 y 的点 Q 在 z 轴取坐标为 z 的点 R ，然后分别过 P, Q, R 作三个依次垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的平面。那么这三个平面的交点 M 便是由数组 (x, y, z) 所确定的点。

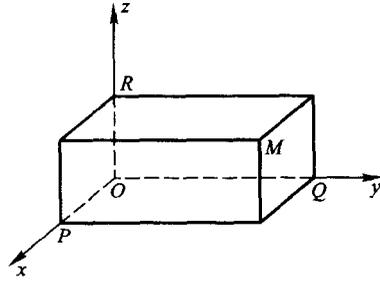


图 1.3

这样，通过空间直角坐标系，空间点 M 与三元数组 (x, y, z) 之间就建立了一一对应的关系，这有序数组 (x, y, z) 便称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$ ，并依次称 x, y, z 为点 M 的横坐标 纵坐标 竖坐标。

坐标轴及坐标平面的点，其坐标显然有一定特点。例如： x 轴上的点的坐标为 $(x, 0, 0)$ 。 yOz 坐标平面上的点的坐标为 $(0, y, z)$ 原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$

二、空间两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 $M_1 M_2$ 为对角线的长方体 (图 1.4)。

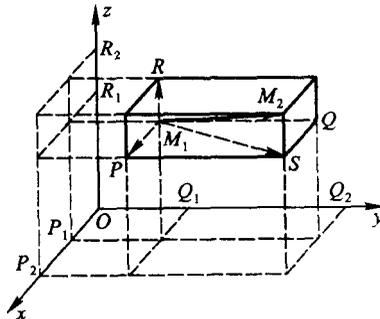


图 1.4

如图所示可知： $|M_1 M_2|^2 = |M_1 S|^2 + |SM_2|^2$ 而 $|M_1 S|^2 = |M_1 P|^2 +$

$|M_1Q|^2, |M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, |M_1Q| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|,$
 $|SM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$ 所以

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1.1)$$

(1.1.1)式就是空间两点的距离公式.特别地点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为:

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1.2)$$

例 1 求证以 $M_1(4, 1, 9), M_2(10, -1, 6), M_3(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

$$\text{证 } |M_1M_2| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7,$$

$$|M_2M_3| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

$$|M_3M_1| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2} = 7.$$

所以, $|M_1M_2| = |M_3M_1|$, 且 $|M_1M_2|^2 + |M_3M_1|^2 = |M_2M_3|^2$, 即得 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形.

习题 1.1

1. 求点 a, b, c 关于 (1)各坐标面 (2)各坐标轴; (3)坐标原点的对称点的坐标
2. 在 y 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.
3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴及坐标原点的距离.
4. 求顶点是 $A(-3, -1, 4), B(1, 3, 2), C(3, 1, 1)$ 的三角形的周长.

* 1.2 向量及其加减法、向量与数的乘法

一、向量概念

在实践中, 常会遇到这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 例如物理学中的力、力矩、位移、速度、加速度等等. 这一类量称为向量.

习惯上, 常用一条有方向的线段(即有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点, M_2 为



终点的有向线段所表示的向量, 记作 M_1M_2 (图 图 1.5

1.5), 有时也用 一个黑体字母或书写时用 一个上面加箭头的字母表示, 例如 a .

i, r, F 或 $\vec{a}, \vec{i}, \vec{r}, \vec{F}$ 等等.

以坐标原点 O 为起点 向空间一点 M 引向量 OM ,称这个向量为点 M 对于点 O 的向径 .

在实际问题中,有些向量与起点有关,有些向量与起点无关由于一切向量的共性是它们的大小和方向,所以数学上只研究与起点无关的向量,即只考虑向量的大小和方向,这样的向量称为自由向量(简称向量).所以,如果两个向量 a 、 b 的大小相等 方向相同时 就说它们是相等的 即 $a = b$ 这就意味着 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.在自由向量之间,平行与共线是同义语,初学者应注意

向量的大小又称向量的模.向量 $M_1 M_2$, a 的模依次记为 $|M_1 M_2|$, $|a|$.模等于 1 的向量称为单位向量模等于零的向量称为零向量,记为 0 零向量的起点与终点重合,方向可看作任意.

两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行.向量 a 与向量 b 平行 记作 $a // b$.

二、向量的加减法

向量的加法规则如下:

设有两个向量 a 与 b 任取一点 A 作 $AB = a$ 再以 B 为起点 作 $BC = b$ 连接 AC (图 1.6) 那么向量 $\vec{AC} = c$ 称为向量 a 与 b 的和 记作 $a + b$ 即

$$c = a + b$$

上述方法称为向量相加的三角形法则.

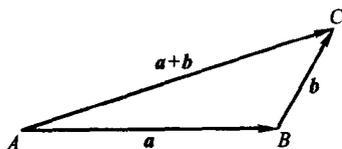


图 1.6

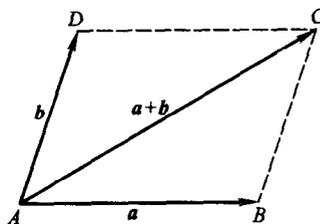


图 1.7

另外与向量加法的三角形法则相等价的有平行四边形法则:当向量 a 和 b 不平行时作 $\vec{AB} = a$ $\vec{AD} = b$ 以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$ 连接对角线 AC (图 1.7) 则向量 AC 就等于 a 与 b 的和 $a + b$.

向量的加法有下列运算规律:

(1) 交换律 $a + b = b + a$;