

本書遵照教育部專科學校課程標準編書

# 學 構 結

王 純 粹 編著



本書遵照教育部專科學校課程標準編書

# 結 構 學

王 純 粹 編著

興業圖書股份有限公司印行

---

版權所有・翻印必究

中華民國六十七年九月一日一版

## 結 構 學

(全一冊) 基本定價三元

編 著 者：王 純 粹

發 行 人：王 志 康

出版事業登記証局版台業字第零肆壹零號

出 版 者：興業圖書股份有限公司

印 刷 者：永 紳 印 刷 廠

：臺南市忠孝街五九號

發 行 者：興業圖書股份有限公司

臺南市勝利路一一八號

打 字 者：奇 美 打 字 行

臺南市民生路二〇一號

---

學校團體採用購買另有優待

TU311  
W224 (C)

# 目 錄

## 第一章 基本認識

|     |                    |   |
|-----|--------------------|---|
| 1-1 | 結構物之類型及其在土木工程上之功能  | 1 |
| 1-2 | 平面結構分析之意義及其價值      | 4 |
| 1-3 | 材料性質與變形量之假定在實用上之意義 | 6 |
| 1-4 | 結構穩定度與靜不定度         | 8 |

## 第二章 梁之分析

|      |                    |     |
|------|--------------------|-----|
| 2-1  | 靜定梁                | 18  |
| 2-2  | 梁應力之分析—平衡條件之應用     | 19  |
| 2-3  | 梁應力分析結果之表示—彎矩圖與剪力圖 | 24  |
| 2-4  | 梁之變形分析             | 43  |
| 2-5  | 梁之變位曲線             | 45  |
| 2-6  | 單位載重法 (虛功法)        | 48  |
| 2-7  | 卡氏第一定理             | 56  |
| 2-8  | 彎矩面積法              | 63  |
| 2-9  | 共軛梁法               | 69  |
| 2-10 | 靜不定梁之分析            | 76  |
| 2-11 | 疊加原理               | 77  |
| 2-12 | 利用密合條件解靜不定梁問題      | 79  |
| 2-13 | 梁之影響線              | 86  |
| 2-14 | 影響線之定義及其實用價值       | 87  |
| 2-15 | 靜定梁之影響線及其求法        | 90  |
| 2-16 | 縱梁及橋面梁系            | 101 |

|      |                          |     |
|------|--------------------------|-----|
| 2-17 | 利用影響線求集中活載重下梁之最大應力 ..... | 106 |
| 2-18 | 靜不定梁之影響線 .....           | 115 |

### 第三章 剛架的分析

|     |                     |     |
|-----|---------------------|-----|
| 3-1 | 剛架的定義 .....         | 126 |
| 3-2 | 剛架應力的表示 .....       | 126 |
| 3-3 | 靜定剛架分析 .....        | 126 |
| 3-4 | 用密合條件，分析靜不定剛架 ..... | 133 |
| 3-5 | 靜不定剛架的附似分析 .....    | 140 |

### 第四章 桁架的分析

|     |                        |     |
|-----|------------------------|-----|
| 4-1 | 桁架的定義及其假設 .....        | 145 |
| 4-2 | 靜定桁架的分析—平衡條件的應用 .....  | 146 |
| 4-3 | 靜定桁架的變位分析 .....        | 167 |
| 4-4 | 靜不定桁架之分析—密合條件之應用 ..... | 171 |
| 4-5 | 桁架影響線之求法及其應用 .....     | 177 |
| 4-6 | 複合結構的分析 .....          | 187 |

### 第五章 傾角變位法

|     |                      |     |
|-----|----------------------|-----|
| 5-1 | 傾角變位法的原理與基本方程式 ..... | 191 |
| 5-2 | 用傾角變位法，分析靜不定梁 .....  | 195 |
| 5-3 | 用傾角變位法分析靜不定剛 .....   | 203 |

### 第六章 彎矩分配法

|     |                      |     |
|-----|----------------------|-----|
| 6-1 | 彎矩分配法之基本原理及方法 .....  | 218 |
| 6-2 | 彎矩分配法在梁分析上的應用 .....  | 221 |
| 6-3 | 彎矩分配法在剛架分析上的應用 ..... | 228 |
| 習題  | .....                | 250 |

# 第一章 基本認識

## § 1-1 結構物之類型及其在土木工程上之功能

各種土木工程結構物，可大體按下列方式加以分類：

### (一) 依所用材料分：

- (1) 木結構 (Wooden structure)
- (2) 金屬結構 (Metallic Structure)：如鋼鐵、合金鋼、鉛等
- (3) 圬工結構 (Masonry structure)：如磚石、混凝土等。
- (4) 混合結構 (Composite structure)：如鋼筋或鋼骨混凝土

### (二) 依構成型式分：

- (1) 實體結構 (Mass)：如橋墩及重力壩等。
- (2) 架成結構 (Frame)：以若干直桿或梁，柱依一定方法配合成一體而成者，又依其結合方式之異，可分為桁架 (Truss) 及剛架 (Rigid frame) 兩類。

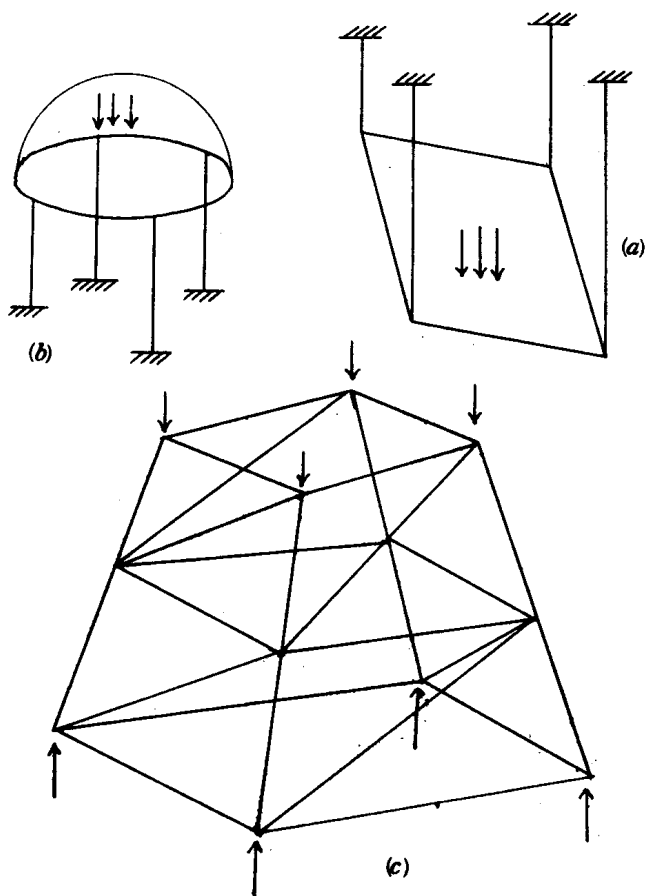
### (三) 依受力位置分：

- (1) 平面結構 (Planar structure)：結構上所受外力全部在一平面內，其所產生之內力 (直接應力，剪力及彎矩) 亦均在一平面內。如梁，桁架、剛架、拱等均屬之。
- (2) 空間結構 (Space structure)：如結構物所受外力不在同一平面內，而其內應力亦不在同一平面者，如空間結構之平版 (如圖 1-1(a))、薄殼 (圖 1-1(b))、桁架 (圖 1-1(c)) 等均屬之。

### (四) 依解題方法分：

## 2 結構學

- (1) 靜定結構 (Determinate structure)：結構內力之未知數與結構之平衡方程式之數目等，各該方程式可聯立求解者是謂，如簡單梁、柱及桁架等皆是。
- (2) 靜不定或超靜定結構 (Indeterminate structure)：凡結構內力之數目超過其平衡方程式之數目，而無法聯立各該方程式求解，而必需藉結構變形關係增加平衡方程式，方能求解者。如剛架、平版、薄殼及一般鋼筋混凝土結構物均屬之。



(五) 就載重所引起應力情況分：

- (1) 均佈應力型 ( uniform stress form )：構件內之應力，均勻分佈於其斷面之整個深度上，如拱 ( arch )、索 ( cable )、桁架構件 ( truss members ) 及殼 ( shell ) 等。
- (2) 變化應力型 ( varying stress form )：此種構件其斷面上應力之分佈係由一端之最大張應力漸變至另一端之最大壓應力，如梁、剛架版等皆屬之。

結構 ( structure )，一詞具有多種不同之定義，然而就工程結構而言，可以簡單的說，凡能承受外力，並可將之傳達於另一物體之構造物便是結構。

結構工程為土木工程中最重要之一環，其與其他各工程之關係，極為密切；如鐵路及公路工程中之橋梁、水利工程中之堤壩、衛生工程中之溝渠、建築工程之屋架等，皆屬於結構工程範圍以內，其他如機場、港灣、油管及軍事設施等亦無一不與結構工程有關。

結構設計之遂行，一般可分成兩大階段：即規劃 ( planning ) 及設計 ( design ) 兩部份。

在規劃階段，乃就該結構工程之目的，需要及所在地情況，先作調查、測繪等工作，對該工程作一充份之認識及瞭解，俾初步決定其型式、材料、尺寸及載重等。

在設計階段則按結構分析 ( structural analysis )、結構 ( structural design ) 設計及結構製圖 ( structural drafting ) 等三步驟進行。所謂結構分析者，乃是根據靜力學及材料力學之原理，計算結構各部構材 ( member ) 在載重下所能發生之最大應力。使工程結構獲致最經濟、美觀、安全而適當之組合，此亦即結構學最重要之使命。至於結構設計部份，其主要目的乃是在合理、經濟、安全的選定各部材之尺寸，而各該尺寸之決定，則完全係以應力分析之結果為依據，因此，工程師必須深切瞭解結構分析之基本原理，然後憑其豐富之經驗及準確之判斷，方能達至精密而完善之設計。最後一

## 4 結構學

步將設計好之資料以工程畫表現於圖紙上作為估價及施工之依據。結構設計便告完成。

### § 1-2 平面結構分析之意義及其價值

前已述及，平面結構者，乃其所受外力全作用於同一平面內，其分析之目的乃在獲取平面結構內各構材之內力——承受最大載重時之剪力（Shear）、彎矩（Bending moment）、應力（Stress）及其變位（Deflection），作為設計各構材尺寸之依據，以達至經濟、安全、適用的要求。

平面結構分析之基本原理係根據靜力學中同平面力系之平衡理論（Equilibrium of a coplanar force system），所謂平衡（Equilibrium），乃係當結構受到外力時，對地球而言保持相對之靜止狀態之謂。同時，如將該結構物之一部隔離成自由體（Free body）時，各自由體本身亦能保持相同之靜止狀態。由上述定義，吾人可知，同平面力系之平衡狀態必須滿足下列三聯立方程式：

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_a = 0 \quad (1-1)$$

其中  $\Sigma F_x$  = 系統內各力之  $x$  方向分量和

$\Sigma F_y$  = 系統內各力之  $y$  方向分量和

$x$ ， $y$  則表示笛卡兒座標系內之水平及垂直兩方向。

$\Sigma M_a$  = 系統內各力對平面內任意點  $a$  之力矩和  $\Sigma F_x$  亦表示系統內各力合力之  $x$  向分量， $\Sigma F_y$  表合力之  $y$  向分量。

今平面系統內各力在水平、垂直兩方向之分力之代數和各自為零，各力對任意點所造成之力矩亦都相互抵消，則該結構體自然處在一個既不移動亦不轉動的平衡狀態之下。

以上所述係平面力系之一般情況之平衡。今若系統內各力均相互平行，如圖（1-2(a)）所示，則可以下列兩方程式說明其平衡之條件：

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_a = 0 \quad (1-2)$$

或

$$\Sigma M_a = 0 \qquad \Sigma M_b = 0 \qquad (1-3)$$

其中  $a$   $b$  兩點為系統內之任意兩點，而其間相連之直線不平行於該平行力系。因水平方向無作用力，故無移動之可能，因而上述兩方程式已是以使該力系達至平衡。

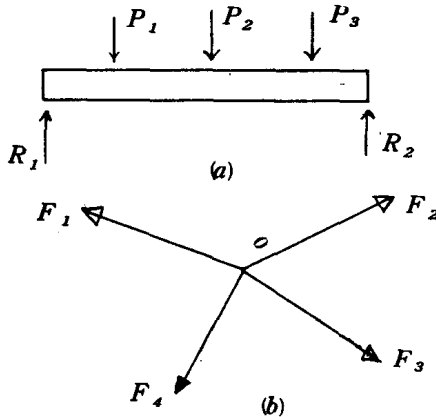


圖 1-2

其次如各力均相交於一點如圖 (1-2(b)) 所示，其平衡則應滿足下列方程式：

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad (1-4)$$

或 
$$\Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma M_a = 0 \qquad (1-5)$$

設點  $a$  不在過諸力交點並垂直於  $y$  軸之直線上。

或 
$$\Sigma M_a = 0, \qquad \Sigma M_b = 0 \qquad (2-6)$$

其中  $a$   $b$  兩點為平面上任意兩點，但  $a$   $b$  兩點之相連直線不通過各力之交點。吾人可視諸力之交點  $O$  為一質點 (Particle) 因為質點上不俱質量，如不平衡，則僅有移動 (Translation)，而絕無轉動 (Rotation) 之可能，因此吾人對此類力系僅就其上下、左右兩方向不產移動之觀念考量便可。但如以過平面上任意點不產生公轉 (相當於移動) 作為考慮之依據，亦可以 (1-5) 及 (1-6) 式表示其平衡之狀態，數學上稱此種方程式為 identity equations，

概因各該組方程式可以互變之故。

世界上沒有任何結構物是真正由平面構成的，但為簡化其分析方法起見，吾人對梁、桁架橋梁、剛架建築物的結構分析通常均將之分成若干平面結構加以處理，然而像塔架和圓頂骨架等構造物便無法如此處理。本書所討論之範圍僅以平面結構分析為主。概一般性之結構物此種分析方法已可運用如裕。

茲以穿越式平行弦桿桁架公路橋為例，說明三度空間之立體結構何以可分解成若干平面結構加以分析。上述橋架可分解成六個不同的平面結構；即主要垂桁架兩個，上弦桿構成之側向桁架一個，下弦桿構成之側向桁架一個，以及兩端之橋門架各一個。各該平面桁架中有若干構材，同時可為兩個相連接平面桁架的公用桿，例如垂直桁架之下弦桿同時亦為下弦桿構成側向桁架之構材，此時該桿之應力，則由兩個不同平面桁架分別求解再予以相加而得之。

### § 1-3 材料性質與變型量之假定在實用上之意義

一般土木結構物所用之材料不外木材、磚石、混凝土及鋼材等，近代結構物更以鋼材及鋼筋混凝土為其主要構築材料。普通結構碳鋼是一種最優良的結構材料，因為它經濟、耐用並可製成各種不同的斷面型式。且經由各種不同製造技術及步驟所完成鋼材，其物理性質可始終保持不變。

其中，抗壓及抗張強度相等，幾近其最大強度之半均保持線性彈性狀態，但超過彈性範圍之後其彈性模數則大為增加。

結構砂鋼之性質與碳鋼類似，唯其強度約較碳鋼高出百分之五十。而該項鋼材之價格較之碳鋼所高無幾，故而長跨梁多採用此種材料。

鋼材之最大缺點為易於生銹，而必須在其表面塗以油漆類之保護物。如有防火之顧慮尚需加以如混凝土之類之保護層。

鋁合金之使用近年來已有增加之趨勢，因其質輕且不易生銹，強度可達鋼材之三分之一。

由於上述各種鋼材，均有其不同程度之缺點，爲求建造美觀、經濟而耐久之結構物，工程師們，已廣泛的採用鋼筋混凝土作爲各種構造物之材料。

近年來，由於鋼材及鋼筋混凝土的被大量採用，木材已成一種次要材料，僅能作爲結構物中附屬構件之用。其主要原因當然是因爲木材之強度不高，不耐久又易燃燒之故。

所有結構物之構材，均係由彈性材料構成。彈性材料當承受載重及溫度變化時，隨即發生變形。由此種變形之結果，結構物之各點將隨之發生變位，該項變位稱之爲撓度（Deflection）。在彈性範圍之內變形將隨載重及溫度變化之移去而消失，此種變形稱爲彈性變形。相反的，如移去載重及溫度變化，而其變形仍無法消失者則稱爲非彈性變形，如支承之沉陷，混凝土之收縮等現象均屬之。

在進行結構設計時，撓度的計算是十分必要的，例如外伸橋及連續橋之建造或者活動橋梁之起落設備均需將結構物上若干點之撓度求出。其次爲求得結構物之震動及波動反應特性亦需就其撓度加以分析。材料之撓度變化量在各種不同情況下，必需加以限制才能達到安全及適用之設計目的。例如一根樓版欄柵之撓曲如果太大，將可能導致其下層之天花板開裂，一個由梁支承的樓版，因過度的撓曲造成下凹，均可能造成不安全之後果。對於撓度的限制一般係依“活載重所引起之撓度不得超過其跨徑之  $1 / 360$ ”作爲設計之安全限度。按該限度係源於天花板上之膠泥當撓度超過此一範圍時可能導致其開裂而脫落之故，然而美國公路官員協會對鋼梁鋼大梁則將因活載重及載重所致之撓度限制爲跨徑之  $1 / 800$ ，此外，某些精密機械之撓度限度尚有達至  $1 / 1500 \sim 1 / 2000$  者。

撓度在結構分析中對靜不定梁及桁架之反力及構材應力之計算提供了很大的方便。因此，撓度對靜不定結構的分析與靜力學公式在靜定結構分析中，俱有同等重要的地位。結構工程師應確實瞭解各種不同求取撓度的方法。

## § 1—4 結構之穩定度與靜不定度

## 一、平衡：

結構之主要功能乃在承受載重。雖然各種結構材料均係彈性材料，當承外力時均不免產生些許變位或變形，但在靜力學裡，則為設所有力系均作用於剛體上，因而結構分析時，材料之容許變形，可略而不計。

前已述及，平面結構分析係以靜力學同平面力系之平衡原理為依據，平衡狀態下之物體，所受之各力均應符合（1—1）式之條件。（1—1）式中靜力學平衡方程為決定平衡力系中未知數之基本工具。

若就結構物之外部受力考慮，則外加載重均為已知數，亦即其大小、方向及着力點均為已知，而反力則為未知數，其着力點或方向也許可能加以判定，但仍被以未知量加以處理。若將結構之一部隔離成自由體，則該自由體上所承受之外加載重與割切部面上之內力構成了該自由體之全部力系，而其中內力則被列為未知數加以處理。前述兩種情況均可按靜力平衡原理，列成聯立之靜力平衡方程式加以求解。

在此，吾人可以給靜定、靜不定及不穩定結構簡單的下個定義：

**靜定結構 (Statically Determinate Structure)：**凡可用靜力平衡方程聯立求解其各未知力之結構。

**靜不定結構 (Statically indeterminate structure)：**凡未知力超過平衡方程式數無法以靜力學平衡方程式聯立求解其各未知力之結構。未知力之超出數稱為靜不定之度數 (degree)。

**不穩定結構 (Unstable structure)：**凡未知數較靜力平衡方程式少而無法求得合理之答案或其本身構造不當，有不穩狀態之結構是謂。

## 二、結構構架之支承有四種：

1. 鉸 (hinge) (本書以  符號表示之)

該支承係假定以無摩擦力之樞連接於結構上。但足以防止結構在水平及垂直方向之移動，而無法阻止樞之輕微轉動。此種支承有兩個反力：水平反力及垂直反力，如該反力係斜向力，則為其垂直反力及水平

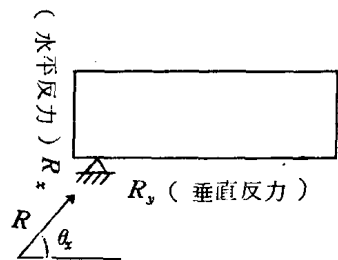


圖 1-3

反力之合力，但其未知量仍然為二；即其大小及方向。

如圖(1-3)其中

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} \quad (1-7)$$

2. 輥軸 (Roller) (本書以  代表之)

係假定該支承僅在支承點之垂直方向提供阻力，使結構不得在垂直方向移動，其未知數為1，即該反力量之大小。概其方向及着力點均為已知之故。是項反力可指向支承面亦可背向支承面。如圖(1-4)



圖 1-4

3. 固定支承 (Fixed Support) (本書以  符號表示之)

此種支承係假定對支承點提供水平、垂直及旋轉等三種阻力，其未知數為三，即上述三反力之大小。(或者以水平及垂直兩反力合力之大小、方向及着力點之位置三未知量說明之亦可。)如圖(1-5)

其中  $|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} \quad (1-8)$$

$$d = \frac{M_o}{R_x} \quad (1-9)$$

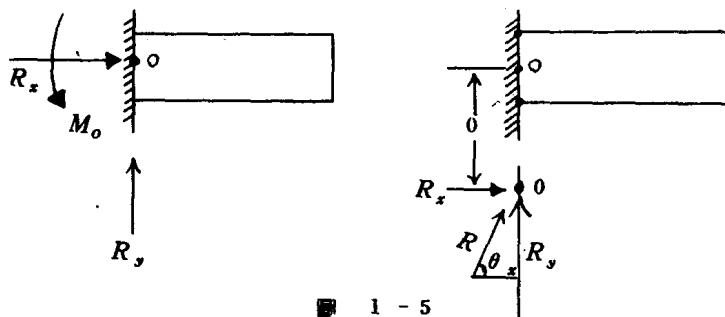


圖 1-5

#### 4. 鏈桿支承 (Link support) (本書以 表示之)

其作用與輻軸支承相似，係假定其兩端之樞均無摩擦力者。反力只有一個，其方向與鏈桿一致。故其方向及着力點均為已知，唯其大小為未知。如圖 (1-6)

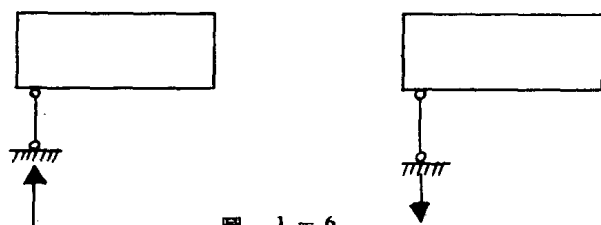


圖 1-6

### 三、自由體 (Free body)

前曾述及，一個平衡狀態下的結構體，其各部份均應保持平衡。自由體者，乃由一平衡結構體分割出一部之意，而該分割部份所有各力自成一平衡力系。該力系由自由體其反力，外載重以及割切面之內力系 (包括剪力、彎矩及軸向力) 所組成。而此內力系係由該自由體之相鄰部份加諸於該自由體者，而對本自由體之相鄰部份而言，本自

由體有相同量而相反方向之力加諸於其上，因而如圖（1-7）所示，梁之左側對右側若有傾向於向上移動的趨勢，則處於平衡狀態時，右側必定有相等但方向相反之力作向下拉之趨勢。

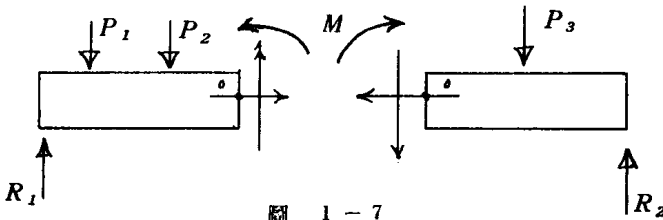


圖 1-7

圖（1-7）中由於反力  $R_1$  及  $R_2$  已在對結構作整體考慮時求出，因此自由體力系內之未知力僅存三個，對於自成平衡之自由體以靜力學平衡方程便可順利求解無疑，可見取自由對應力之分析有莫大的幫助。

當一結構體之一部被割切成自由體後割切面即出現參與自由體平衡力系之內力。其形式隨結構之種類而異。

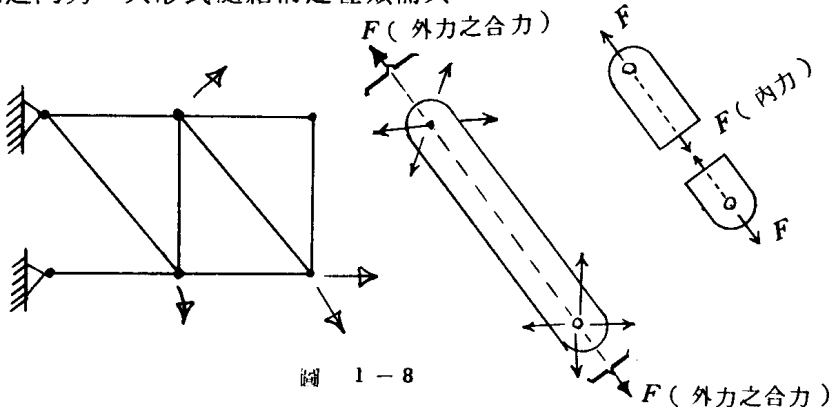


圖 1-8

如圖（1-8）所示，桁架（truss）內之各桿如將之割切成自由體，則各桿均為二力件（two force member）

由定義，桁架者乃係由許多鉸形連接桿件（Pin-connected member）構成僅能在節點承受載荷之結構體。其意即各桿之節點皆

爲鉸接，鉸內摩擦力甚可略而不計，當承受荷重時，因桁架變形（**Deformation**），節點可生些許位移（**displacement**），因此各桿不生剪力及力矩兩種內力，僅有軸向應力，非張力即壓力。而載荷只能作用於節點之重心上。各桿之應力必定相伴而生爲大小相等方向相反之二力，此即所謂之二力件。因此，桁架之未知內力數即其構成之桿數。

梁及剛架之內力均係多於二力者。前已提及，它們是剪力，軸向力，及力矩（參閱圖（1-7）及圖（1-9）），事實上剪力及軸向力可視爲一合力之垂直及水平分力，而該合力與一力偶（即力矩）爲維繫結構物兩割切部成一體之重要元素。因此，梁及剛架之內力數每一割切面均應假定爲三個。亦即每一桿件有三個未知力。

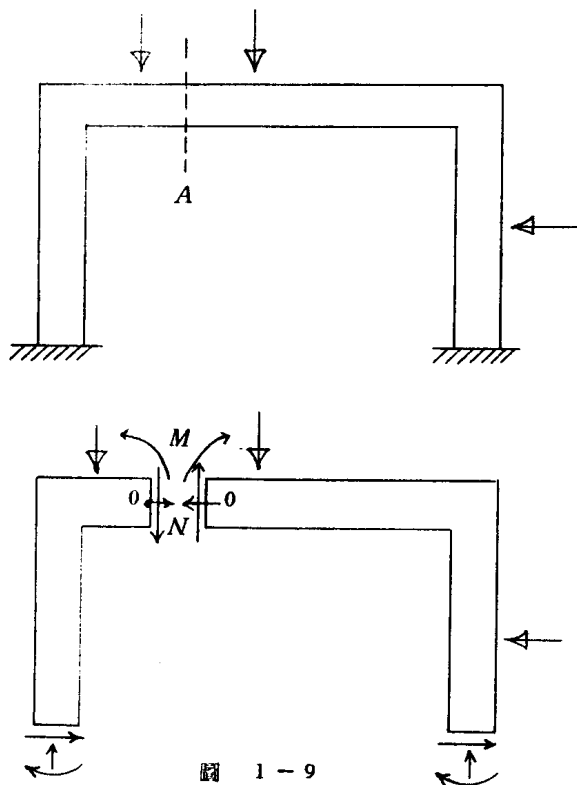


圖 1-9