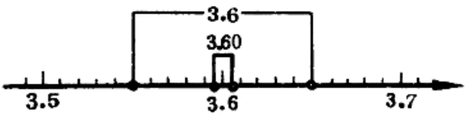
初級中学課本

代　　数

DAISHU

第　三　册

(第二分册)



人民教育出版社

初級中学課本

(1964 年新編)

代　　数

第 三 册

(第二分册)

人民教育出版社数学編輯室編

北京市书刊出版业營业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

*

北　京　出　版　社　重　印

(北京东单麻綫胡同 3 号)

北京市书刊出版业營业許可証出字第 095 号

新　华　书　店　发　行

北京新华印刷厂印刷

*

統一书号：K 7012・866-2　字数：30 千

开本：787×1092 毫米　1/32　印张：$1\frac{3}{4}$

1964 年第一版

第一版 1964 年 12 月第二次印刷

北京：4.001—108.000 册

*

定价：0.13 元

初級中学課本代数第三册（第二分册）

目　录

第十四章　一元二次方程

14.1 一元二次方程　我們来看下面的問題：

一个生产队，計划从旱田中开出一块面积是 1200 平方米的長方形水田，幷且使它的長比寬多 10 米，求这块水田的長和寬。

要解这个問題，可以設寬是 x 米，那么長是 $(x+10)$ 米，根据題意得

$$x(x+10)=1200,$$

去括号，得

$$x^2+10x=1200.$$

要解这个問題，应当从这个方程中求出 x.

上面的方程是含有一个未知数，幷且未知数的次数最高是 2 的整式方程．这样的方程叫做**一元二次方程***.

在研究一元二次方程的时候，常常把方程的各項移到方程的左边，使方程的右边为零．例如，上面的方程，

[illegible]和一元二次以上的方程在我国很早就已知道．古代算书“九章算术”里有些題目就要用一元二次方程来解．唐王孝通“緝古算經”(約公元 627—644 年)应用的方程有 $x^2=A$, $x^2+px=A$, $x^3+px^2=A$, $x^3+px^2+qx=A$, $x^4+px^2=A$ (A、p、q 都是正数)等.

經过这样移項以后，就化成下面的形式:

$$x^2+10x-1200=0.$$

任何关于 x 的一元二次方程，經过整理，都可以化成下面的形式:

$$ax^2+bx+c=0. \quad (a\neq 0)$$

这种形式叫做**一元二次方程的一般形式**. 在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，ax^2 叫做**二次項**，bx 叫做**一次項**，c 叫做**常数項**；一次項系数 b 和常数項 c 可以是任何的数，但是二次項的系数 a 不能是零，因为如果 a 是零，这样的方程就不是二次方程了.

14.2 一元二次方程的解法(一)——因式分解法

我們来研究方程

$$x^2-5x+6=0$$

的解法. 这个方程的右边是 0，左边可以分解成两个一次因式，就是

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

因此这个方程可以变形为

$$(x-2)(x-3)=0.$$

我們知道，如果两个因式的积等于零，那么这两个因式至少要有一个等于零；反过来，如果两个因式有一个等于零，它們的积也就等于零. 因此，要使

$$(x-2)(x-3)=0,$$

必須并且也只需 $x-2=0$,

或者　　　　　　　　$x-3=0.$

解这两个一次方程可以知道，要使

$$(x-2)(x-3)=0,$$

必须并且也只需 $x=2$ 或者 $x=3$. 所以这个方程有两个根，它們是

$$x_1=2,\ \ x_2=3.$$

由此可見，**在一元二次方程的一边是零而另一边能够分解成两个一次因式时，就可以用因式分解法来解.**

用因式分解法解一元二次方程的步驟是：

> **1. 把方程变形为一边是零而另一边是两个一次因式的形式；**
>
> **2. 使每个一次因式等于零，得到两个一元一次方程；**
>
> **3. 解所得的两个一次方程.**

例 1　解方程：$x(x+10)=1200.$

解　原方程可以变形成

$$x^2+10x-1200=0.$$

$$(x-30)(x+40)=0,$$

$$x-30=0,\ x+40=0.$$

$$\therefore\quad x_1=30,\ x_2=-40.$$

例 2　解方程：$3x^2-2x=0.$

解　　　　　　$x(3x-2)=0,$

$$x=0,\ \ 3x-2=0.$$

$$\therefore\quad x_1=0,\ \ x_2=\frac{2}{3}.$$

从例 2 可以知道，常数項等于零的一元二次方程 $ax^2+bx=0$，都可以用因式分解法来解，它的根是 $x_1=0$，$x_2=-\frac{b}{a}$. 应当注意，解这种类型的方程时，不要把 $x=0$ 的根丢掉.

14.3 一元二次方程的解法(二)——配方法 在 §10.3 和 §10.4 里，我們解过一些像下面形式的方程：

$$1.25x^2=81920,$$

$$1.5x^2=2.16.$$

从这些方程的解法中可以知道，如果一元二次方程的一边可以化成一个平方的形式，而另一边是一个大于或者等于零的常数，那么就可以通过开平方求得它的根.

例 1 解方程：$(x-3)^2=5$.

这个方程就是說 $x-3$ 的平方等于 5，因此，$x-3$ 就是 5 的平方根.

解 $$x-3=\pm\sqrt{5}.$$

$$\therefore\quad x=3\pm\sqrt{5}.$$

方程 $(x-3)^2=5$ 整理后就得

$$x^2-6x+4=0.$$

因此，要解方程 $x^2-6x+4=0$，我們可以先把它

化成$(x-3)^2=5$，化法如下：

把常数項移到右边，得

$$x^2-6x=-4.$$

在方程的两边各加上一次項系数一半的平方，使左边成为一个二項式的平方，右边是一个常数：

$$x^2-6x+3^2=-4+3^2,$$

$$(x-3)^2=5.$$

解这个方程，得 $x-3=\pm\sqrt{5}$，

$$\therefore\quad x=3\pm\sqrt{5}.$$

例 2 解方程：$2x^2+5x-8=0$.

这里二次項的系数不是 1 而是 2，为了易于把方程的左边配成一个二項式的平方，我們先把各項除以 2.

解 把各項除以 2，得

$$x^2+\frac{5}{2}x-4=0.$$

把常数項移到右边，得

$$x^2+\frac{5}{2}x=4.$$

在方程两边各加上一次項系数一半的平方，得

$$x^2+\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=4+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{89}{16}.$$

解这个方程，得 $x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{89}}{4}$,

$$\therefore\ x=-\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{89}}{4}.$$

在解上面两个一元二次方程时，是先把方程的左边配成一个二項式的平方，右边是一个大于或者等于零的常数，然后通过开平方来求出它的根，这种方法叫做**配方法**.

用配方法解一元二次方程的步驟是:

> **1. 用二次項的系数除方程的各項;**
>
> **2. 把二次項和一次項列在方程的左边，常数項列在方程的右边;**
>
> **3. 方程的两边各加上一次項系数一半的平方，使方程左边成为一个二項式的平方，右边是一个常数;**
>
> **4. 如果右边是一个大于或者等于零的常数，求出方程右边的两个平方根，得到两个一元一次方程，再解所得的两个一次方程(如果右边是一个小于零的常数，那么方程沒有实数根).**

习題五十七

1. (口答)直接說出下列方程的根是什么:

(1) $(x-2)(x+3)=0$; (2) $(2x+1)(3x-2)=0$;

(3) $x(x-5)=0$; (4) $x^2=x$.

用因式分解法解下列方程(第 2 题——第 5 题):

2. (1) $x^2-7x+6=0$; (2) $4x^2-25x=0$.

3. (1) $3x^2-23x=8$; (2) $6-x=2x^2$.

4. (1) $6(x^2+1)=13x$; (2) $(x-1)(x+2)=10$.

5. (1) $4(x+2)^2-9(x-3)^2=0$;

(2) $2(y+4)^2+y(y+4)=0$.

6. (口答)下面方程的解法对嗎？如果不对,应当怎样解？

解方程: $x^2=2x$.

解 两边都除以 x,得方程的根是

$$x=2.$$

7. 用因式分解法解下列关于 x 的方程:

(1) $x^2-bx-2b^2=0$; (2) $x^2-mx=nx$.

8. 解下列方程:

(1) $(2x-5)^2=16$; (2) $(y+1)^2=2$;

(3) $(x-5)^2=12$; (4) $(3y+2)^2-\frac{4}{25}=0$.

9. (口答)下面方程的解法对嗎？为什么？如果不对，应当怎样改正？

解方程: $(x-2)^2=1$.

解 $x-2=1$.

$\therefore \quad x=3.$

10. 解下列方程，并且計算根的近似值(精确到两个有效数字):

(1) $3.8x^2-0.47=0$; (2) $\frac{x^2}{5.4}+0.72=1.38$.

11. 已知 $s=\frac{1}{2}at^2$, 求用 s、a 的代数式表示 t(s、a 都是正数).

計算 $s\approx12$, $a\approx9.8$ 时的 t 的值.

12. 配上适当的数，使下列等式成立：

(1) $x^2-4x+\quad=(x-\quad)^2$;

(2) $x^2+3x+\quad=(x+\quad)^2$;

(3) $x^2-\frac{1}{2}x+\quad=(x-\quad)^2$;

(4) $x^2+\frac{b}{a}x+\quad=(x+\quad)^2$.

用配方法解下列各方程（第 13 题——第 18 题）：

13. $x^2+8x=33$.　　14. $x^2-14x+24=0$.

15. $x^2-6x-6=0$.　　16. $x^2-7x+2=0$.

17. $2x^2+x-1=0$.　　18. $3x^2-2=4x$.

19. 用配方法解关于 x 的方程：$x^2+2mx=n$. $(m^2+n\geqslant 0)$

20. (1) 当 x 取什么值时，多项式 x^2-2x-3 的值等于零？

(2) 当 x 取什么值时，多项式 x^2+x-4 的值等于 2？

21. (1) 当 x 取什么值时，分式 $\frac{10x^2-21x+9}{x^2+1}$ 的值等于零？

(2) 当 x 取什么值时，分式 $\frac{2x+1}{x^2-5x+4}$ 没有意义？

14.4 一元二次方程的解法(三)——公式法 现在我們用配方法来解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$.

用二次項的系数 a 除方程的各項，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

把常数項移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

在方程的两边各加上一次項系数一半的平方，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

就是 $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\ x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

就是 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此可得:

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式:

$$\boldsymbol{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.\quad (b^2-4ac\geqslant 0)}$$

在解一元二次方程时，我們只要把方程中各項的系数代入这个公式，就可以求得方程的根，这种方法，叫做**公式法**.

例 1 解方程: $2x^2-8x-7=0$.

解 $a=2$, $b=-8$, $c=-7$.

$$b^2-4ac=(-8)^2-4\times 2\times(-7)=120.$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{120}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{30}}{2}.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{4+\sqrt{30}}{2}, \quad x_2=\frac{4-\sqrt{30}}{2}.$$

例 2 解方程: $x^2+2=2\sqrt{2}\,x$.

解 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=0$.

$a=1$, $b=-2\sqrt{2}$, $c=2$.

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 1\times 2=0$.

$$x=\frac{2\sqrt{2}\pm 0}{2}=\sqrt{2}.$$

$$\therefore \quad x_1=\sqrt{2}, \quad x_2=\sqrt{2}.$$

注意:这个方程并不是只有一个根,而是有两个相等的实数根.

例 3 解关于 x 的方程:

$$x(x-1)=m(2x-m-1).$$

解 把原方程化成一般形式:

$x^2-x-2mx+m^2+m=0$,

$x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$.

$a=1$, $b=-(2m+1)$, $c=m^2+m$.

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= [-(2m+1)]^2-4(m^2+m) \\ &= 4m^2+4m+1-4m^2-4m=1. \end{aligned}$$

$$x=\frac{2m+1\pm 1}{2}.$$

$$\therefore \quad x_1=\frac{2m+2}{2}=m+1, \quad x_2=\frac{2m}{2}=m.$$

一元二次方程都可以用公式法来解, 但是如果用因

式分解法或者两边开平方来解比較簡便时，就不一定用公式法.

14.5 一元二次方程根的判別式 根据一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式可以知道，当 $b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实数根：$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；当 $b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实数根：$x_1=-\frac{b}{2a}, x_2=-\frac{b}{2a}$. 現在我們来研究 $b^2-4ac<0$ 的情况.

在 §14.4 中，我們把一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

变形为

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

因为 $4a^2>0$，所以当 $b^2-4ac<0$ 时，

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}<0.$$

又因为任何实数的平方都不小于零，所以任何 x 的实数值都不是这个方程的根，也就是原方程沒有实数根.

由此可知，根据 b^2-4ac 的值可以判定一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的情况. 我們把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的**根的判別式**. 一元二次方程的根的判別式，用符号“Δ”来表示.

一元二次方程的根的判別式 $\Delta>0$ 时，方程有两个

不相等的实数根；$\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；$\Delta<0$ 时，方程没有实数根.

例1 不解方程，判别下列方程的根的情况：

(1) $3x^2+4x-4=0$； (2) $9x^2+4=12x$；

(3) $5(y^2+2)-7y=0$.

解 (1) $\because\ \Delta=4^2-4\cdot3\cdot(-4)=16+48>0$,

$\therefore$ 这个方程有两个不相等的实数根.

(2) 这个方程就是 $9x^2-12x+4=0$.

$\because\ \Delta=(-12)^2-4\cdot9\cdot4=144-144=0$,

$\therefore$ 这个方程有两个相等的实数根.

(3) 这个方程就是 $5y^2-7y+10=0$.

$\because\ \Delta=(-7)^2-4\cdot5\cdot10=49-200<0$,

$\therefore$ 这个方程没有实数根.

例2 m 为什么值时，方程 $3x^2-2(3m+1)x+3m^2-1=0$ (1)有两个不相等的实数根；(2)有两个相等的实数根；(3)没有实数根？

解 $\Delta=[-2(3m+1)]^2-4\cdot3(3m^2-1)$
$=24m+16$.

(1) 当 $24m+16>0$ 时，就是当 $m>-\dfrac{2}{3}$时，方程有两个不相等的实数根；

(2) 当 $24m+16=0$ 时，就是当 $m=-\dfrac{2}{3}$时，方程有两个相等的实数根；

(3) 当 $24m+16<0$ 时，就是当 $m<-\frac{2}{3}$ 时，方程没有实数根.

习题五十八

用公式法解下列各方程(第1题——第5题):

1. (1) $2x^2+3x-1=0$;　　(2) $x^2-x=3$.
2. (1) $x^2+1=4x$;　　(2) $4x^2+28x+49=0$.
3. (1) $x^2+2x-2=0$;　　(2) $x^2-2.4x-13=0$.
4. (1) $2t^2+1=4t$;　　(2) $p(p-8)=16$.
5. (1) $\frac{3}{2}q^2+4q=1$;

   (2) $x^2+2(\sqrt{3}+1)x+2\sqrt{3}=0$.

6. 用公式法解下列方程，并且計算根的近似值(精确到0.01):

   (1) $x^2-4x-\sqrt{2}=0$;　　(2) $0.12x^2+0.51x+0.23=0$.

7. 解下列各方程，哪种方法簡便，就用哪种方法:

   (1) $8x^2-9=0$;　　(2) $8x^2-9x=0$;

   (3) $x^2-3x=2$;　　(4) $x^2-3x=-2$;

   (5) $(x-2)^2=2$;　　(6) $(3x-4)^2=(4x-3)^2$.

8. 已知 $y=x^2-6x+5$. x 是什么数的时候，y 的值等于零？x 是什么数的时候，y 的值等于 -4？
9. x 是什么值的时候，x^2+7x+6 的值和 $x+1$ 的值相等？
10. 解下列关于 x 的方程:

    (1) $x^2-2ax=m^2$;

    (2) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$. $(a\neq0, b\neq0)$

11. 已知 $s=vt+\frac{1}{2}at^2 (a\neq0)$，求用 s、v、a 的代数式表示 t，

并且計算 $s=16, v=3, a=5$ 时 t 的值.

12. 已知 $x^2-5xy+6y^2=0$, 求证 $x=2y$ 或 $x=3y$.

提示: 把 y 当作已知数.

13. 不解方程, 判別下列方程的根的情况:

(1) $16x^2-56x+49=0$; (2) $32x^2+4x+35=0$;

(3) $x^2-3x=569$; (4) $0.2x^2-5=1\frac{1}{2}x$.

14. k 是什么值时, 下列方程有两个相等的实数根?

(1) $kx^2-12x+4=0$; (2) $4x^2-(k+2)x+k=1$.

15. m 是什么值时, 方程 $2x^2-6x-m+7=0$ 沒有实数根?

14.6 列方程解应用題

例1 两个連續正整数的平方和等于481, 求这两个数.

解 設較小的数是 x, 那么較大的数是 $x+1$, 根据題意, 得 $$x^2+(x+1)^2=481.$$

解这个方程: $2x^2+2x-480=0$,

$$x^2+x-240=0,$$

$$(x-15)(x+16)=0,$$

$$x=15, \text{ 或 } -16.$$

$x=-16$ 不是正整数, 把它舍去.

把 $x=15$ 代入 $x+1$, 得

$$x+1=16.$$

答: 这两个数是 15 和 16.

例2 学校植物栽培小組, 計划在长 24 米、寬 20 米