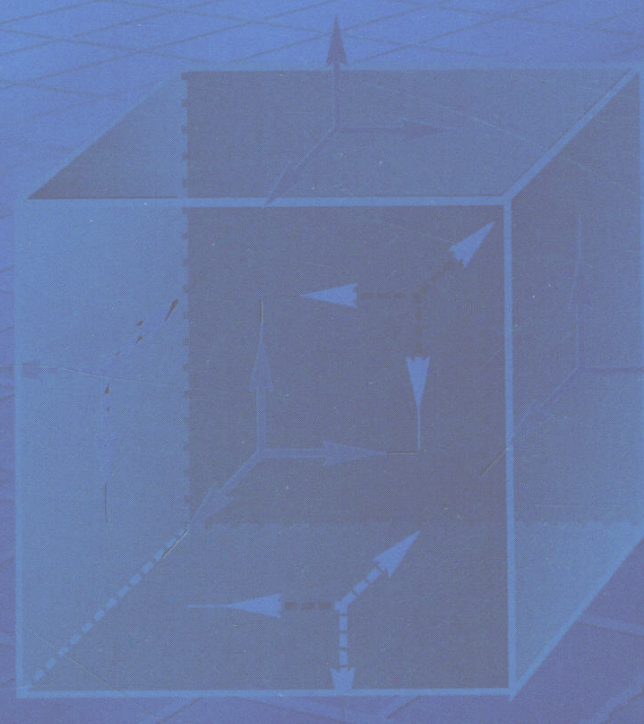
新世纪高等院校精品教材

TANXING LIXUE JI
YOUXIAN DANYUANFA

弹性力学及有限单元法

杨骊先 编著



浙江大學出版社

499

弹性力学及有限单元法

杨骊先　编著

浙江大學出版社

内容简介

本书全面系统地阐述了弹性力学及有限单元法的基本原理，对于工程结构分析中必须掌握的弹性力学平面问题的直角坐标解法、极坐标解法以及扭转问题和薄板弯曲问题作了重点介绍。同时对弹性力学数值解法中的能量法和有限元法也作了系统的介绍。书中配有一定数量的解例和习题。为了配合本课程的学习，书中补充了一些弹性力学课程中所涉及的基本数学知识。全书内容丰富，阐述细致详尽，条理清晰，重点突出，是最易于自学的教材。

本书是土木工程专业本科学生及专科升本科性质学生的必读教材。也可供机械、化工等专业师生或成人教育系列师生以及设计人员和技术人员的学习和参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学及有限单元法/杨骊先编著. --杭州：浙江大学出版社，2002.3
ISBN 7-308-02534-9

Ⅰ.弹… Ⅱ.杨… Ⅲ.①弹性力学－基本知识 ②有限元法－基本知识 Ⅳ.①O343②O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014465 号

出版发行 浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑 杜希武
封面设计 姚燕鸣
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 德清第二印刷厂
经　　销 浙江省新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 13.5
字　　数 345 千字
版 印 次 2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷
印　　数 0001－1000
书　　号 ISBN 7-308-02534-9/O・277
定　　价 20.00 元

前　言

本书是为土木工程专业的学生编写的《弹性力学及有限单元法》教材，它既适用于全日制本科学生，也适用于成人高校中的学生。书中的内容安排符合本课程相关教学大纲的要求。

根据专业的性质，并按大纲的要求，本书主要介绍弹性力学的基本原理，在注意保持本学科系统性的前提下，以弹性力学的平面问题为主线，详细讲述弹性力学的基本概念、基本原理、基本方法以及一些经典问题的解法。在理解平面问题基本理论的基础上，对空间问题进行拓展，同时介绍了等截面直杆的扭转问题及薄板弯曲问题的解法，并作为空间基本理论的应用。除此之外，为了反映计算机在弹性力学方面的应用，本书对弹性力学数值解法中的能量法和有限单元法也作了系统的介绍。

在编写过程中，结合编者多年的教学体会，依据由浅入深、循序渐进的原则，采取先平面后空间、先物理概念后理论分析的方法进行内容编排，并且运用典型实例详细说明弹性力学这一类问题的解题过程。为了便于那些以自学为主的函授、夜大等成人高校学生提高该课程自行阅读理解的效果，在编写时对许多推演过程的叙述做到详细、准确、一目了然。例如，一些经典问题的微分方程求解都列出具体的步骤，同时对容易出错的概念和运算步骤在叙述时给予特别的提醒。另外，在用直角坐标解平面问题和用极坐标解平面问题的两章中，特别编入了解例，以帮助读者能更好地演算弹性力学的习题。

编者已有多年该课程的教学经历，授课对象既有全日制学生，也有成人高等教育的函授专升本学生。教学过程中发现，由于土木工程专业课程设置中对数学知识要求的局限，许多学生对于弹性力学这样一门数学知识含量较高的课程感到十分难学。课程中碰到的微分方程、线性代数等数学知识不易理解，成人教育的学生，这一矛盾更为突出。为了帮助这类读者弥补这些数学知识的不足，编者在本教材中特别增加了“预备知识”这一章，以利于读者掌握与弹性力学及有限单元法密切相关的微分方程、线性代数、变分法等基础知识，从而使读者更好地学习和理解弹性力学和有限单元法的内容。

本书的初稿即为编者已试用过三学年的《弹性力学及有限单元法》课程的讲义，本书根据讲义试用的效果及学生的体会和要求加以修订出版。全书由浙江大学郭鼎康副教授仔细审核，提出了许多宝贵的修改意见。另外，在编写过程中得到了浙江大学结构计算机分析研究室老师的鼓励和支持。编者向上述有关的教师和同学表示衷心的感谢。

由于编写经验不足，加之水平有限，书中不免有错误和不妥之处，望读者批评指正。

目　　录

第一章　预备知识

§1-1　微分方程的一般概念

在数学课程中，我们经常接触各种各样的方程，例如，求解某个未知量的代数方程和某个未知函数的函数方程，等等。在描述和研究许多科学技术问题中，还时常碰到另一类型的方程，方程中不仅含有自变量和未知函数，还含有未知函数的导数或微分，这种方程就称为微分方程。如在运动学中，物体受到地球引力作用而发生的自由落体问题便可归结为微分方程的问题。取垂直地面并且向上的坐标轴，设物体在时刻 t 的位置的坐标是 $x(t)$，则根据 $x(t)$ 关于 t 的二阶导数的力学意义，我们知道 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 表示物体沿坐标轴方向的加速度。若 g 为物体在地球引力作用下的加速度，于是得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g \tag{1-1}$$

其中方程中的负号表示加速度 g 的方向与坐标轴的正方向相反。以上的关系式便是含有未知函数二阶导数的微分方程。

又如以下的几个方程也都是微分方程。

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\mathrm{e}^y=0 \tag{a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+x=\sin t \tag{b}$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-1)y=0 \tag{c}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 \tag{d}$$

如果在微分方程中，未知函数是一元函数，则相应的微分方程就称为常微分方程；如果未知函数是多元函数，这时相应的微分方程就称为偏微分方程；上述的(1-1)、(a)、(b)、(c)都是常微分方程，而(d)则是偏微分方程。在弹性力学中涉及的基本理论和描述方法大都是用偏微分方程来表示的。

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为这个微分方程的阶，例如(a)是一

阶的，(1-1)、(b)、(c)是二阶的，而偏微分方程(d)则是四阶的。讨论一个微分方程，主要的目的是要求出其中的未知函数。若某个函数及它的导数代入微分方程，能使该方程成为恒等式，这个函数就叫做该微分方程的解。例如 $x=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 满足微分方程(1-1)式，则该函数就是微分方程(1-1)的解。从解的关系式中我们发现它含有两个任意常数。一般来说，方程的解中所含任意常数个数与对应的微分方程的阶数相同，不同的任意常数之间是相互独立的。我们把具有这种性质的解，叫做微分方程的通解。

根据具体问题的需要，有时要找出某一微分方程的一个特定的解(称为特解)，这时就应确定通解中的任意常数的值。为此需给出一定的条件，称为定解条件。例如在(1-1)中给出初始条件

$$\text{当 } t=t_0 \text{ 时}, \quad x=x_0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$$

或写成

$$x\big|_{t=t_0}=x_0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=v_0$$

则满足这个初始条件的特解为

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+(v_0+gt_0)t+x_0-v_0t_0-\frac{1}{2}gt_0^2 \tag{e}$$

求某个微分方程满足一定的定解条件的特解，这种问题叫做定解问题。上面所举的例子就是一个定解问题，它可以写成如下的形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g \\ x\big|_{t=t_0}=x_0, \quad \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=v_0 \end{cases} \tag{f}$$

在弹性力学问题中，具体讨论的也是一个个定解问题，只是微分方程的形式要复杂得多，是以多元函数的偏微分方程来表达的。其定解条件就是具体问题的边界条件。

§1-2　一阶常微分方程的基本解法

一、分离变量法

形状如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{1-2}$$

的微分方程称为可分离变量的方程，它可以改写成

$$\frac{1}{g(y)} \cdot \mathrm{d}y = f(x) \cdot \mathrm{d}x \tag{a}$$

在方程(a)中，左端只含有变量 y 及其微分，右端只含有变量 x 及其微分，这样变量 x 和 y 就被分离开来，这种处理方法即称为“分离变量法”。它对解常微分方程和偏微分方程都是有用的。现在将(a)的两端分别对各自的变量进行积分，就得到

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x \tag{b}$$

设$\frac{1}{g(y)}$的原函数为 $G(y)+C_1$，$f(x)$的原函数为 $F(x)+C_2$，其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。则得

$$G(y)+C_1 = F(x)+C_2 \tag{c}$$

或者

$$G(y) = F(x)+C_2-C_1 = F(x)+C \tag{d}$$

其中 C 为任意常数。因为(d)是一阶常微分方程(1-2)的含有一个任意常数的解，所以它就是(1-2)的通解。不过在这种通解中，y 与 x 的关系是隐函数形式出现的，故称为隐式通解。

如果 $G(y)$有单值反函数 $G^{-1}(y)$，则可从(d)中解得

$$y = G^{-1}(F(x)+C) = h(x,C) \tag{e}$$

这种通解就称为显式通解，对形式比较复杂的方程，常常得不到显式通解，而只能得到隐式通解。

例 1 求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$的通解。

解:分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

由此可得隐式通解

$$\arcsin y = \arcsin x + C$$

上式还可以改写为

$$\begin{aligned} y &= \sin(\arcsin x + C) \\ &= \sin(\arcsin x)\cos C + \cos(\arcsin x)\sin C \\ &= x \cdot \cos C + \sqrt{1-x^2} \cdot \sin C \end{aligned}$$

此为显式通解。

例 2 求微分方程

$$x \cdot \mathrm{d}x + y \cdot \mathrm{d}y = 0 \tag{f}$$

满足条件

$$y|_{x=0} = 1 \tag{g}$$

的特解。

解:由(f)可得

$$\int x \cdot \mathrm{d}x = -\int y \cdot \mathrm{d}y$$

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C = C_1 \tag{h}$$

其中 C_1 也为任意常数，此为隐式通解。再将条件(g)代入(h)即得 $C_1=1$，故所求解为

$$x^2 + y^2 = 1$$

或者

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

二、一阶线性微分方程解法

形状如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = R(x) \tag{1-3}$$

的方程称为一阶线性方程，由于(1-3)中只出现未知函数 $y(x)$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的一次项，故称为线性方程。

如果 $R(x)\equiv 0$，则称(1-3)为齐次线性方程，如果 $R(x)\not\equiv 0$，则称(1-3)为非齐次线性方程。

我们先讨论齐次线性方程的解法，此时方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = 0 \tag{1-4}$$

或改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -P(x) \cdot y$$

这是变量可分离的方程，可有

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int P(x) \cdot \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int P(x) \cdot \mathrm{d}x + C_1 \tag{i}$$

其中 C_1 为任意常数，$\int P(x) \cdot \mathrm{d}x$ 看成是 $P(x)$ 的某一个具体的原函数，由(i)式又可得

$$y = \pm\, \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x + C_1} = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \tag{j}$$

其中 C 为一任意常数，(j)就是齐次线性方程(1-4)的通解。

对于非齐次线性方程的求解可以采用“常数变易法”，即利用上述齐次方程解的形式作进一步的讨论。在许多常微分方程的教材中对此都有介绍，在此从略，不再赘述。这里介绍一阶线性方程(1-3)的一个重要性质，即所谓叠加原理，能使非齐次线性方程的求解得到简化。

定理 1 （叠加原理） 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 分别是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\cdot y=R_1(x) \tag{1-5}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\cdot y=R_2(x) \tag{1-6}$$

的解，则任取两个常数 C_1 和 C_2，函数 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 必定是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)\cdot y=C_1R_1(x)+C_2R_2(x) \tag{1-7}$$

的解。（证略）

由上述定理可得到以下的推论：

推论 设 $y_1(x)$ 是非齐次线性方程(1-3)的一个特解，而 $y_2(x,C)$ 是与(1-3)相对应的齐次线性方程(1-4)的通解（其中 C 为任意常数），则 $y(x,C)=y_1(x)+y_2(x,C)$ 就是非齐次线性方程(1-3)的通解。

这一推论不难从定理 1 来证明，我们只要取 $R_1(x)\equiv R(x)$，$R_2(x)\equiv 0$，$C_1=C_2=1$，根据定理 1 即知 $y(x,C)$ 必定是非齐次方程(1-3)的解，又因为此解中包含有任意常数 C，故它必为(1-3)的通解。利用这一推论，我们可以构造非齐次方程的通解，即将某一非齐次线性方程所对应的齐次方程的通解加上非齐次方程的一个特解便构成了非齐次方程的通解。由于 $y_1(x)$ 是非齐次方程(1-3)的任何一个特解，故可通过观察，试算或其他的方法求得。从而使得求解非齐次线性方程的问题得到简化。

例 3 求微分方程

$$f(x)-xf'(x)=F \tag{k}$$

的通解，其中 F 为已知常数。

解：将方程写成(1-3)式的形式，即

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{F}{x} \tag{l}$$

这里 $P(x)=-\dfrac{1}{x}$，$R(x)=-\dfrac{F}{x}$，通过观察可以确定(l)的某一个特解为 $f_0(x)=F$，这样对应的齐次方程为

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=0$$

分离变量后写成

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分有

$$\ln f(x)=\ln x+C_1$$

将 C_1 写成 $\ln C$，则有

$$\ln f(x)=\ln x+\ln C=\ln Cx$$

这样齐次方程的通解为

$$f(x)=Cx$$

根据上述定理得(k)的通解为

$$f(x)=Cx+F$$

§1-3 高阶线性常微分方程解法

一、常系数齐次线性微分方程解法

前面讨论的是一阶常微分方程，对含有二次导数以上导数项的微分方程即为高阶微分方程。其一般形式是

$$F(x,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

其中 x 为自变量，y 为未知函数 $y(x)$。如果微分方程具有以下形式

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=A(x) \tag{1-8}$$

其中 a_0、a_1、…、a_n 及 A 都是 x 的已知函数，则(1-8)为 n 阶线性微分方程，若 $a_0(x)\neq0$，则可将(1-8)式各项除以 $a_0(x)$ 得到与(1-8)式等价的另一形式

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=R(x) \tag{1-9}$$

这里 $P_1(x)$、…、$P_n(x)$ 及 $R(x)$ 都是 x 的已知函数。

如果 $R(x)\not\equiv0$，则称(1-9)为非齐次线性方程，如果 $R(x)\equiv0$，则称方程

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=0 \tag{1-10}$$

为齐次线性方程。

如果在(1-10)中的 $P_1(x)$、…、$P_n(x)$ 均为常数，则方程变为常系数齐次线性微分方程。

现在我们来讨论如何求解齐次线性方程的通解。在上节我们提到了叠加原理，显然对于(1-10)式表达的 n 阶线性微分方程也适用，若能找到(1-10)式的 n 个特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$、…、$y_n(x)$，则它们的任意线性组合

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

必定也是方程(1-10)的解。如果上述的 n 个特解是线性无关的，则

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

就是(1-10)的通解，其中 C_1、C_2、…、C_n 为任意常数。要求出 $y(x)$，则需找到 n 个线性无关的特解。下面我们以二阶常系数齐次线性方程为例来讨论这些线性无关的特解的求法。

二阶常系数齐次线性方程的形成为

$$ay''+by'+cy=0 \tag{a}$$

若 $y_1(x)$和 $y_2(x)$为两个线性无关的特解，则其通解为

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

我们设某个特解具有以下的形式

$$y(x)=\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{b}$$

其中 λ 为待定的常数，如果将(b)代入方程(a)就得到

$$a\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}+b\lambda\mathrm{e}^{\lambda x}+c\mathrm{e}^{\lambda x}=0$$

即

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2+b\lambda+c)=0$$

因为 $e^{\lambda x}$不为零，故得

$$a\lambda^2+b\lambda+c=0 \tag{c}$$

这是一个决定 λ 的一元二次代数方程，一般称它为方程(a)的“特征方程”。特征方程(c)的求根判别式是 b^2-4ac，根据它的不同值可以分以下三种情况进行讨论。

(1)$b^2-4ac>0$

这时特征方程(c)有两个不同的实根

$$\lambda_1=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac})$$

和

$$\lambda_2=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})$$

显然，$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}$和 $y_2(x)=e^{\lambda_2 x}$都是方程(a)的特解。且两个特解线性无关，则(a)的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \\ &= C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \end{aligned}$$

(2)$b^2-4ac<0$

这时特征方程(c)有一对共轭复数根

$$\lambda_1=\frac{1}{2a}(-b+i\sqrt{4ac-b^2})=u+iv$$

和

$$\lambda_2=\frac{1}{2a}(-b-i\sqrt{4ac-b^2})=u-iv$$

故方程的两个特解为

$$y_1(x)=e^{\lambda_1 x}=e^{(u+iv)x}=e^{ux}(\cos vx+i\sin vx) \tag{d}$$

$$y_2(x)=e^{\lambda_2 x}=e^{(u-iv)x}=e^{ux}(\cos vx-i\sin vx) \tag{e}$$

在上述两式中，使用了欧拉(Euler)公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

我们注意到(d)和(e)中的 $e^{ux}\cos vx$ 及 $e^{ux}\sin vx$ 实际上都是方程(a)的特解。所以可取

$$y_1(x)=e^{ux}\cos vx$$

$$y_2(x)=e^{ux}\sin vx$$

为(a)的特解，且可证明它们线性无关，这样就得到(a)的通解为

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{ux}\cos vx+C_2e^{ux}\sin vx \\ &= e^{ux}(C_1\cos vx+C_2\sin vx) \end{aligned}$$

(3)$b^2-4ac=0$

这时的特征方程有重根

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-\frac{b}{2a}$$

于是只能得到方程(a)的一个指数形式的解

$$y_1(x)=e^{\lambda x}$$

为了寻找另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的特解 $y_2(x)$。可采用一些教材中介绍的降阶法，其解的结果是取

$$y_2(x)=xe^{\lambda x} \tag{f}$$

不难证明(f)满足方程(a)，故 $y_2(x)$ 是(a)的又一个特解。且与 $y_1(x)=e^{\lambda x}$ 线性无关，所以可得(a)的通解是

$$y(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=e^{-\frac{b}{2a}x}(C_1+C_2x)$$

以上讨论的是二阶常系数齐次线性微分方程的通解。对二次以上具有相同性质的 n 阶方程

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{1-11}$$

也可按类似的方法求出其通解。形式为

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x) \tag{g}$$

其中 C_1、C_2、…、C_n 为任意常数。

同二阶方程一样，(1-11)的特解可以设为

$$y(x)=e^{\lambda x} \tag{h}$$

将(h)代入(1-11)就知待定常数 λ 应满足

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{i}$$

此方程称为(1-11)的特征方程，它是一元 n 次代数方程，必有 n 个根 λ_1、λ_2、…、λ_n。这些根有可能是单根，也可能有彼此相等的重根，可能是实根，也可能是成对出现的复根(如果 $\lambda=p+iq$ 是一个复根，则其共轭复数 $\lambda=p-iq$ 必定也是方程的根)。此时，有以下结论：

(1)如果实数 λ 是特征方程(i)的单根，则 $e^{\lambda x}$ 是齐次方程(1-11)的特解。

(2)如果实数 λ 是(i)的 k 重根，则 $e^{\lambda x}$、$xe^{\lambda x}$、$x^2e^{\lambda x}$、…、$x^{k-1}e^{\lambda x}$ 是(1-11)的 k 个线性无关的特解。

(3)如果复数 $\lambda=p+iq$ 是(i)的单根(此时 $p-iq$ 必定也是(i)的单根)，则 $e^{px}\cos qx$ 和 $e^{px}\sin qx$ 是方程(1-11)的两个线性无关的特解。

(4)如果复数 $\lambda=p+iq$ 是(i)的 k 重根(此时 $p-iq$ 也是(i)的 k 重根)，则 $e^{px}\cos qx$、$e^{px}\sin qx$、$xe^{px}\cos qx$、$xe^{px}\sin qx$、…、$x^{k-1}e^{px}\cos qx$、$x^{k-1}e^{px}\sin qx$ 就是(1-11)的 $2k$ 个线性无关的特解。

此外，对于(i)的不同的根，由以上方法所得的不同特解彼此是线性无关的。这样，我们就可构造出 n 个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$、…、$y_n(x)$，从而得到以(1-11)表达的方程的通解。

二、常系数非齐次线性微分方程的解

在得到了齐次方程(1-11)的通解以后，我们可以来讨论非齐次线性方程的通解。高阶常系数非齐次线性方程的一般形式可以写为

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=R(x) \tag{1-12}$$

其中 a_0、a_1、…、a_n 均为实常数，$a_0\neq0$，$n\geqslant2$，$R(x)$ 是 x 已知函数，且 $R(x)\not\equiv0$。

在§1-2 中，曾有过这样的结论，一阶非齐次线性方程的通解等于它所对应的齐次方程

的通解加上非齐次方程本身的一个特解。这个结论可以推广应用到 n 阶方程中来，即若 $Y(x)$ 是非齐次线性方程(1-12)的一个特解，$y_1(x)$、$y_2(x)$、…、$y_n(x)$ 为它所对应的齐次线性方程(1-11)的 n 个线性无关的特解，则方程(1-12)的通解可表示为

$$y(x)=Y(x)+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

其中 C_1、C_2、…、C_n 为常数，实际上，$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ 即为齐次方程(1-11)的通解。

非齐次方程的某个特解 $Y(x)$ 的求解取决于 $R(x)$ 的形式，譬如 $R(x)$ 为多项式时并且特征方程为非零根，则可设 $Y(x)$ 为与 $R(x)$ 同次数的系数待定的多项式，通过代入方程(1-12)后比较两边各 x 幂次系数来确定 $Y(x)$ 中的待定系数。对于其他类型的 $R(x)$，则可参阅有关的微分方程教材，按 $R(x)$ 的形式设定相对应的含有待定系数的 $Y(x)$。在此就不再赘述。实际上，在许多方程中，$R(x)$ 的形式比较简单，$Y(x)$ 只需通过观察便可求得。例如非齐次方程 $2y''+3y'=4$ 的特解为 $Y(x)=\frac{4}{3}x$。

例 4 求方程

$$y''+3y'+2y=2x \tag{j}$$

的通解。

解：(j)式对应的齐次线性方程为

$$y''+3y'+2y=0 \tag{k}$$

特征方程为

$$\lambda^2+3\lambda+2=0 \tag{l}$$

即

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

由此得到(l)的两个根，$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，于是得到了齐次方程(k)的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

由于(j)中 $R(x)=2x$ 为一次多项式，且 λ_1、λ_2 为非零根，故可设 $Y(x)$ 为系数待定的一次多项式，即

$$Y(x)=kx+b \tag{m}$$

将(m)代入(j)式有

$$3k+2(kx+b)=2x$$

或

$$2kx+(3k+2b)=2x$$

比较方程两边 x^1 及 x^0 次的系数得

$$k=1,\quad b=-\frac{3}{2}$$

从而求得 $Y(x)$ 为

$$Y(x)=x-\frac{3}{2}$$

这样(j)的通解便为

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x-\frac{3}{2}$$

§ 1-4　变分法的基本概念

弹性力学中的能量法是弹性力学数值分析方法中的一个常用方法，它是以数学中的变分法为分析手段，故这一数值方法有时也被直接称之为变分法。由于变分法涉及泛函的一些概念，对读者来讲可能比较陌生，所以在本节中，对数学意义上的变分法的基本概念及理论作一简单的介绍，以便于读者对弹性力学能量法的理解和掌握。

一、函数和泛函

我们已经知道，随一个或几个自变量变化的变数称之为函数，若变数只随一个自变量而变化，这一函数称为一元函数，而随几个自变量而变化的变数即被称为多元函数。例如，对于变量 x 的某一变化域中的每一个 x 值，y 有一值与之相对应亦即变数 y 对应于变量 x 的关系成立，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=y(x)$。

泛函是随一个或几个函数变化的变数，即泛函是函数的函数。如果对于某一类函数 $\{y(x)\}$ 中的每一个函数 $y(x)$，变量 I 有一值与之相对应，亦即变量 I 对应于函数 $y(x)$ 的关系成立。则称变量 I 是函数 $y(x)$ 的泛函。记为 $I=I[y(x)]$。

因此，可以说，函数是变量和变量的关系，泛函是变量和函数的关系。

我们把这种建立在函数和变量之间的关系叫做泛函关系。例如 $C=\{y(x)\}$ 是在区间 $[a,b]$ 上分段连续的函数集，设

$$I=\int_a^b y(x)\mathrm{d}x \tag{a}$$

则 I 的值便取决于所选择的函数 $y(x)$。实际上 I 是通过 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 范围内的积分来建立起两者之间的联系。这种关系就是 $I[y(x)]$ 所表达的泛函关系。或称 $I[y]$ 是以 $C=\{y(x)\}$ 为定义域的泛函。

由此，我们可以像给函数下定义一样，给泛函下这样的定义：设 $\{y(x)\}$ 是已给的函数集，如果对于其中任一函数 $y(x)$，恒有某个确定的变量 $I[y]$ 与之对应，则称 $I[y]$ 是定义于集 $\{y(x)\}$ 上的一个泛函。

以上定义，可以推广到依赖于多个函数的泛函，也可以推广到多元变量的情形。例如，弹性力学平面问题中的弹性应变能 $U[u(x,y),v(x,y)]$ 即为位移函数集 $\{u(x,y),v(x,y)\}$ 所对应的泛函。其中 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 又为 x、y 的多元函数。

以积分的形式构筑的泛函关系是很常见的。例如设 x,y 平面内有给定的两点 A 和 B（图 1-1），则连接这两点的任一曲线的长度为

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{b}$$

显然长度 L 依赖于曲线形状，也就是依赖于函数 $y(x)$ 的形式。因此 L 就是以上述积分关系所表达的泛函。

在较一般的情况下，泛函具有如下的形式

$$I[y(x)]=\int_a^b f\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \tag{1-13}$$

或简写成

$$I=\int_a^b f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

其中的被积函数 $f(x,y,y')$ 当然也是 $y(x)$ 的泛函。

在这里要注意泛函的记法 $I=I[y(x)]$ 与复合函数的记法 $\varphi=\varphi[y(x)]$ 所表达的含意的区别。实际上对于复合函数，在经过代换运算后，最终可以写成 $\varphi=\varphi_1(x)$ 的形式，而对于泛函则不然。

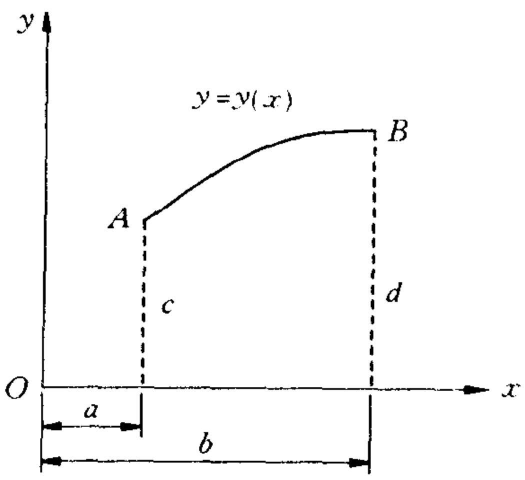


图 1-1

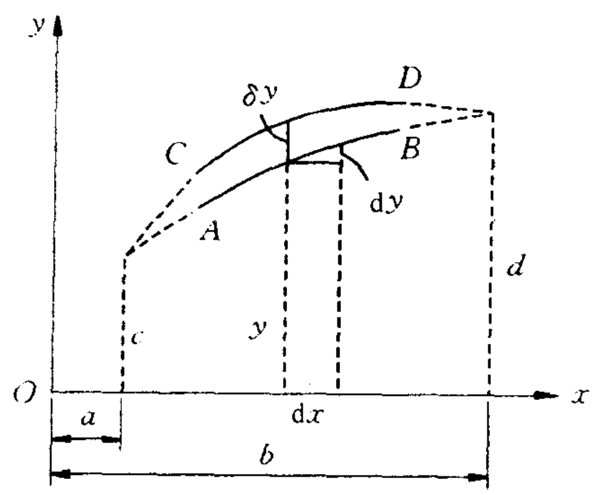


图 1-2

二、函数的变分及泛函的变分

我们知道，对于函数 $y=y(x)$ 当自变量 x 有微小的增量 $\mathrm{d}x$，函数 y 也有对应的微小增量 $\mathrm{d}y$，那么 $\mathrm{d}y$ 称为函数 y 的微分，其大小可表示为

$$\mathrm{d}y=y'(x)\mathrm{d}x \tag{c}$$

其中 $y'(x)$ 为 y 对于 x 的导数。图 1-2 中的曲线 AB 示出了 y 与 x 的函数关系并示出了微分 $\mathrm{d}y$。

现在，假想函数 $y(x)$ 的形式发生了改变而成为新的函数 $Y(x)$。如果对应于 x 的一个定值，y 具有微小的增量

$$\delta y=Y(x)-y(x) \tag{1-14}$$

则称增量 δy 为函数 $y(x)$ 的变分。显然 δy 一般也是 x 的函数。在图 1-2 中，用 CD 表示相应于新函数 $Y(x)$ 的曲线，并示出变分 δy。

我们可以从力学角度来描述 δy 的含意。假如图 1-2 中的 AB 表示某个梁的一段挠度曲线而 y 是梁上某一截面的真实位移，则 CD 可以表示该梁发生虚位移以后的一段挠度曲线，而虚位移 δy 就是真实位移 $y(x)$ 的变分。