电大教学参考书

高等代数讲义/上

习题解答

科学技术文献出版社重庆分社

高等代数讲义

（上册）

习题解答

况良浩　阎大桂

科学技术文献出版社重庆分社

高等代数讲义（上册）习题解答

况良浩　阎大柱

科学技术文献出版社重庆分社　出版
重庆市市中区胜利路91号

新华书店重庆发行所　发行

科学技术文献出版社重庆分社印刷厂　印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：8　字数：17万

1985年11月第一版　1985年11月第一次印刷

科技新书目：107-261　印数：22000

书号：13176·144　定价：1.50元

前　　言

根据广播电视大学教学辅导的需要和学生学习的特点，我们对王萼芳、丘维声编写的《高等代数讲义（上册）》一书的全部习题，作了详细的解答，并整理成这本书。诚望能为学习和辅导高等代数者，带来一些方便。

本书力求适合广播电视大学教学辅导和学生自学的需要。在解答中，既着重使读者加深对教材概念、定理的理解和运用，又注意使读者掌握解题的方法和技巧，尽量做到详尽、严密、清晰。

本书也可供有关工程技术人员、大专院校工科专业的师生参考。

本书承邱敦元、王本濂、杭 度等同志审订，谨致谢忱。

有一点说明：本书中所提到的页码，是指《高等代数讲义（上册）》一书中的页码。如p.50，是该书中的第50页。

由于我们水平有限，请读者对书中的错误和不足之处批评指正。

编　　者

一九八五年一月

目　　录

第一章 行 列 式

习 题 1.1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$。

解 (1) 原式 $=3\times 2-(-1)\times 7=13$；

(2) 原式 $=0\times 1-0\times 0=0$；

(3) 原式 $=1\times 5\times 6+4\times 1\times 2+2\times 3\times 1-2\times 5\times 2-1\times 1\times 1-3\times 4\times 6=30+8+6-20-1-72=-49$；

(4) 原式 $=2\times 1\times 6+(-1)\times(-2)\times 1+3\times 4\times 5-5\times 1\times 1-(-1)\times 3\times 6-2\times(-2)\times 4=12+2+60-5+18+16=103$；

(5) 原式 $=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}\cdot 0+a_{13}\cdot 0\cdot 0-a_{13}a_{22}\cdot 0-a_{12}\cdot 0\cdot a_{33}-a_{11}a_{23}\cdot 0=a_{11}a_{22}a_{33}$；

(6) 原式 $=ca_1b_2+0\cdot a_2\cdot 0+0\cdot b_1\cdot 0-0\cdot a_1\cdot 0-0\cdot 0\cdot b_2-ca_2b_1=a_1b_2c-a_2b_1c$。

2. 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=10 \\ x_1+4x_2-2x_3=-8 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1\ . \end{cases}$$

解 先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-8+18+2-12+8-3=5,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -8 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=10,\qquad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=15\ .$$

于是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{10}{5}=2,\qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-5}{5}=-1,$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{15}{5}=3.$$

习 题 1.2

1. 求下列各个排列的逆序数，并且指出它们的奇偶性：

(1) 315462；(2) 365412；(3) 654321；

(4) 7654321；(5) 87654321；(6) 987654321；

(7) 123456789；(8) 518394267；(9) 518694237。

解 (1) 在这个排列中，对1有一个逆序，对2有四个逆序，对3没有逆序。对4有一个逆序，对5、6都没有逆序。因

此 $\tau(315462)=1+4+1=6$。由于逆序数是偶数，所以是偶排列。

(2) $\tau(365412)=11$. 奇排列；

(3) $\tau(654321)=15$, 奇排列；

(4) $\tau(7654321)=21$, 奇排列；

(5) $\tau(87654321)=28$, 偶排列；

(6) $\tau(987654321)=36$, 偶排列；

(7) $\tau(123456789)=0$, 偶排列；

(8) $\tau(518394267)=15$, 奇排列；

(9) $\tau(518694237)=18$, 偶排列。

2. 求下列排列的逆序数：

(1) $(n-1)(n-2)\cdots 21n$； (2) $23\cdots(n-1)n1$。

解 (1) 在这个排列中，1的前面比1大的数为$n-1, n-2, \cdots, 3, 2$，共有$n-2$个，因此对1有$n-2$个逆序。仿此可知，对2有$n-3$个逆序，…，对$n-2$有$n-[(n-2)+1]$个即1个逆序，对$n-1$与n没有逆序。

于是

$$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 21n]=(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

(2) 在这个排列中，只对1有$n-1$个逆序，其余各数没有逆序，所以

$$\tau[23\cdots(n-1)n1]=n-1.$$

3. 写出把排列315462变为排列123456的那些对换。

解 $315462 \xrightarrow{(3,1)} 135462 \xrightarrow{(5,2)} 132465 \xrightarrow{(3,2)} 123465 \xrightarrow{(6,5)} 123456$ （注：答案不唯一，但必定要对换偶数次）。

4. 讨论排列$n(n-1)\cdots 321$的奇偶性。

解 不难算出，$\tau[n(n-1)\cdots 321]=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

∵当$n=4k$时 $\tau=\dfrac{4k(4k-1)}{2}=2k(4k-1)$ 偶数

当$n=4k+1$时 $\tau=\dfrac{(4k+1)4k}{2}=2k(4k+1)$ 偶数

当$n=4k+2$时 $\tau=\dfrac{(4k+2)(4k+1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 奇数

当$n=4k+3$时 $\tau=\dfrac{(4k+3)(4k+2)}{2}=(4k+3)(2k+1)$ 奇数

∴$n=4k$，$4k+1$时是偶排列；$n=4k+2$，$4k+3$时是奇排列（其中$k=0$，1，2，3，…）。

习 题 1.3

计算行列式：

1.
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 与上三角形行列式一样，这个行列式不等于零的项只能是$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，其列标所成的排列是4321，而$\tau(4321)=6$，所以

$$\text{原式}=(-1)^6a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}=a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

2. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式不等于零的项只有$a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$，又$\tau[n(n-1)\cdots 321]=\frac{n(n-1)}{2}$，从而

$$原式=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

（显然，上题是本题$n=4$的特例）

3. $$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式不等于零的项只有$b_1b_2b_3b_4b_{51}$，对应于行列式一般记法中的项$a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$，
而$\tau(23451)=4$，因而

$$原式=(-1)^4b_1b_2b_3b_4b_{51}=b_1b_2b_3b_4b_{51}.$$

4. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解　这个行列式不等于零的项只有$n(n-1)\cdots 321$，它对应于行列式一般记法中的$a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$这一项，而$\tau[23\cdots$

$(n-1)n1]=n-1$，于是

$$原式=(-1)^{n-1}n(n-1)\cdots 321=(-1)^{n-1}n!.$$

5. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式不等于零的项只有$n!$，它对应于一般记法中的项$a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdots a_{n-1,1}a_{nn}$，而$\tau[(n-1)(n-2)\cdots 321 n]=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$，故

$$原式=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!.$$

6. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & 0 & 12 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 仿照上题可得

原式$=5!=120$。

7. $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 先从第1列取非零元素1，显然，第2列只能取2，…，第3列只能取5，这样得出不等于零的项只有$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$，

即

$$\text{原式}=(-1)^{\frac{(5-1)(5-2)}{2}}\cdot 5!=120.$$

习 题 1.4 (i)

1. 计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 196 & 203 & 199\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1 & 3/4 & -1\\ -3 & 1/2 & 5\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}-1 & 203 & 1/3\\ 3 & 298 & 1/2\\ 5 & 399 & 2/3\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ ma_1 & ma_2 & ma_3 & ma_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}$.

解 (1) $\text{原式}=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 200-4 & 200+3 & 200-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 200 & 200 & 200\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ -4 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$=100\times\begin{vmatrix}5 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}+(-10+8+18+24-30-2)$$

$$=0+8=8;$$

(2) $\text{原式}=\begin{vmatrix}1 & 3/4 & -1\\ -3 & 2/4 & 5\\ -1 & 4/4 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ -3 & 2 & 5\\ -1 & 4 & -2\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{4}\times(-4+12-15-2-20-18)=-\frac{47}{4};$$

(3)

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}-1 & 200+3 & 2/6\\ 3 & 300\ \ 2 & 3/6\\ 5 & 400-1 & 4/6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & 200+3 & 2\\ 3 & 300-2 & 3\\ 5 & 400-1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & 200 & 2\\ 3 & 300 & 3\\ 5 & 400 & 4\end{vmatrix}+\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 3\\ 5 & -1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=\frac{100}{6}\begin{vmatrix}-1 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\\ 5 & 4 & 4\end{vmatrix}+\frac{1}{6}\times 28=0+\frac{14}{3}=\frac{14}{3};$$

(4)

$$\text{原式}=m\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{vmatrix}=m\cdot 0=0.$$

2.证明.

$$\begin{vmatrix}a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1\\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2\\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3\end{vmatrix}=0.$$

证明 利用行列式性质6，将第2列、第3列全加到第1列上得

$$\text{左端}=\begin{vmatrix}0 & b_1-c_1 & c_1-a_1\\ 0 & b_2-c_2 & c_2-a_2\\ 0 & b_3-c_3 & c_3-a_3\end{vmatrix}=0.$$

习 题 1.4(2)

1.计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$，　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 3 & 8 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 1/3 & 4 & -3 \\ 5 & -1/2 & 1 & -2 \\ 3 & 1/4 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$，　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$。

解 (1) $原式 \xlongequal[④-①\times 3]{\substack{②+①\times 4\\ ③-①\times 2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -12 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 3 & 5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{④-③} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -12 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{③+②\times 3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & -31 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 155；$$

(2) $$原式 \xlongequal[④-③\times 4]{\substack{①-③\times 3\\ ②+③\times 2}} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[②+④]{} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{①+②\times 5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(③,\ ④)} -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-18) = 18;$$

(3)

$$原式 = \frac{1}{12}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & -3 \\ 5 & -6 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -5 \\ -4 & 12 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -6 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 12 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{D}{12},$$

$$D \xlongequal[③-②\times 2]{①-②\times 4} \begin{vmatrix} 0 & 28 & -18 & 5 \\ 1 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 15 & -7 & -1 \\ 0 & 12 & -4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{②+③} \begin{vmatrix} 0 & 10 & -18 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①-④} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -14 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 8 & -7 & -1 \\ 0 & 8 & -4 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[④-①\times 4]{③-①\times 4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -14 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 49 & -1 \\ 0 & 0 & 52 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{④+③\times 5} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -14 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 49 & -1 \\ 0 & 0 & 297 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{③、④交换}]{\text{①、②交换}}\begin{vmatrix}1 & -1 & -2 & 5\\0 & 2 & 0 & -14\\0 & 0 & -1 & 49\\0 & 0 & 0 & 297\end{vmatrix}=-594,$$

$\therefore$ 原式 $=-\frac{1}{12}\times(-594)=49\frac{1}{2}$;

(4)

$$\text{原式}\xlongequal{\text{各列加到①}}\begin{vmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\10 & 3 & 4 & 1\\10 & 4 & 1 & 2\\10 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{各行减①}}\begin{vmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 1 & -3\\0 & 2 & -2 & -2\\0 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{④}+\text{②}]{\text{③}-\text{②}\times 2}\begin{vmatrix}10 & 2 & 3 & 4\\0 & 1 & 1 & -3\\0 & 0 & -4 & 4\\0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=160.$$

2. 计算下列n级行列式:

(1) $\begin{vmatrix}a & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & a & 1 & \cdots & 1\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\1 & 1 & 1 & \cdots & a\end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix}a_1-b & a_2 & \cdots & a_n\\a_1 & a_2-b & \cdots & a_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b\end{vmatrix}$.

解 （1）各行全加到①上去，得

$$原式=\begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{各行减去①}}}$$

$$(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)(a-1)^{n-1};$$

（2）各列全加到第1列，得：

$$原式=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i - b & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{a=1}^{n} a_i - b_i\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$