

3192
87402

393216

成都工學院圖書館
基本館藏

高級中學課本平面解析几何 教学指导书

(試用本)



人民教育出版社

高级中学课本平面解析几何

教学指导书

(试用本)

人民教育出版社数学编辑室编

北京市书刊出版业营业许可证出字第二号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

四川人民出版社重印(成都盐道街3号)

新华书店发行

重庆新华印刷厂印刷

统一书号：基7012·1928 字数：75千

开本：787×1092毫米 1/32 印张：3号

1964年第一版

第一版1964年8月第一次印刷

印数：1—3,100册(重庆)

定价 0.28 元

高級中学課本平面解析几何教学指导书(試用本)

目 录

总說明.....	1
第一章 直角坐标系、曲綫和方程.....	6
第二章 直綫.....	31
第三章 圓錐曲綫.....	49
第四章 坐标变换.....	71
第五章 极坐标.....	89
第六章 参数方程.....	98

书 号.....

登 记 号.....

成都工学院图书馆

一、教学要求

1. 掌握直角坐标系中曲线和方程的相互关系；能够根据所给条件，妥善选择坐标系，列出曲线的方程；能够通过方程的讨论，掌握曲线的性质，画出曲线；能够运用解析法论证图形的性质。

2. 掌握直线和圆锥曲线的各种方程、性质以及圆锥曲线的各种画法，能够利用坐标轴的平移和旋转简化二次方程，掌握一些重要曲线的极坐标方程和参数方程。

二、内容和安排

课本共分六章。第一章直角坐标系、曲线和方程，在直角坐标系中讲解了平面内点和它的坐标之间的关系，曲线和它的方程之间的关系，这是平面解析几何的两个基本概念，是以后各章的基础。第二章直线，第三章圆锥曲线，在直角坐标系中研究了方程最简单（一次和二次）、应用最广泛的两种曲线，它们是平面解析几何研究的主要对象，所以这两部分是全书的重点。对于直线，讲解了它的方程的一般形式和几种特殊形式，使学生能够随着已知条件的不同，熟练地取用适当的形式。对于圆锥曲线，讲解了它的各种标准方程和主要性质，如圆心的位置和半径的大小，各种圆锥曲线的顶点、焦点等的位置，长轴、短轴等的长度，准线、渐近线等的方程以及离心率的

大小，力求使学生非常熟悉圓錐曲綫的各种标准方程和主要性质，能够正确而迅速地画出它們的图形。課本还以圓錐曲綫为例，說明了一般曲綫的切綫的意义和求法，同时指出了圓錐曲綫的切綫的一些性质和应用，这对于高等数学中学习导数，是必要的准备。第四章坐标变换，讲解了直角坐标中的坐标变换——平移和旋轉，这是一种重要的研究方法，課本在讲解这种方法的同时，就用它来研究一般二次方程的化簡与根据判别式 $B^2 - 4AC$ 的分类，重点放在使学生能够事先判别方程所表示的圓錐曲綫的类型，选择适当的化簡方法（先轉后移或先移后轉）来化簡方程和画出曲綫。至于較复杂的討論，如用不变式討論曲綫的是否退縮以及进一步研究退縮曲綫的各种情况，为了避免牽涉过多，課本中就没有列入。第五章极坐标，讲解了直角坐标以外的一种用处較广的坐标；第六章参数方程，讲解了直接表示两个坐标之間的关系的普通方程以外的，利用参数間接表示两个坐标之間的关系的参数方程。在这两章中，除了說明极坐标和参数方程的意义，說明极坐标与直角坐标、参数方程与普通方程的互化，說明怎样利用它們求軌迹的方程以外，还列出了用极坐标和参数方程表示的一些常用的曲綫，使学生熟悉这些曲綫，便于应用。至于极坐标方程画图时的討論，因为比較复杂，課本中未作要求。

在安排这些内容时，課本按照先讲直角坐标和普通方程，后讲极坐标和参数方程的順序，这是为了使学生在一开始集中力量学好直角坐标和普通方程，在这个範圍內研究直綫方程、圓錐曲綫的标准方程和圓錐曲綫的一般方程，然后再用极

坐标和参数方程来研究其他的一些常用曲线，而不致在开始时头绪过多。

三、在教学上应该注意的几点

要使学生学好平面解析几何，必须使学生切实掌握平面解析几何的基础知识，并且经受必要的基本训练。对于重要的概念，如点的坐标和曲线的方程等，必须使学生正确地理解和掌握。对于重要的公式，如关于距离、斜率的公式，关于直线和圆锥曲线方程的各种形式，关于坐标变换的公式等，必须使学生在理解的基础上，通过一定数量的必要的基本练习，正确而熟练地加以掌握。

在教给学生平面解析几何的知识的同时，还必须注意教给学生一些必要的方法。使用代数工具来研究几何问题，是平面解析几何的一种重要方法。课本在建立了点和坐标的关系以后，就通过简单的例题，如已知一个三角形三个顶点的坐标，证明它是等边三角形，初步引入了这个方法；在建立了曲线和方程的关系以后，就更进一步使学生切实掌握这种方法。课本还注意通过具体内容，说明某些问题宜于采用直角坐标来研究，而某些问题则宜于采用极坐标或者参数方程来研究；用一种坐标来研究时，坐标轴或者参数选择得当，也可以使问题简化。在各章节中，经常运用比较的方法，如和 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 相比来确定一个方程所表示的圆的圆心和半径；也经常运用根据条件决定未定系数的方法，如决定直线系中的常数 λ ，使直线经过某一点，决定转轴的 θ 角，使转轴后的

方程不含 xy 項。

在教学中必須貫徹“少而精”的原則，應該突出教材中的重點，使學生把主要內容學得更好；應該抓住教材中的關鍵，使學生學好練好；還應該根據不同情況，採取適宜的方法，解決教材中的難點，應該有計劃地安排習題，注意由易到難，由基本的到綜合的、靈活的，並且注意複習鞏固以前學過的教材。習題的數量，應該根據每一部分教材的教學要求而定，同時也要按學生學習的不同情況加以斟酌，不宜盲目多練。可以採取課堂作業、口頭提問等多種方式來處理習題，以減輕學生課外負擔。課本中的複習題，是供程度較好的學生在完成規定作業後還有力時選作用的，不要作為統一要求向全班學生布置。課本以外的補充習題，更不要作為全班學生的統一要求。

在教學中還必須適當聯繫實際。解析幾何本身，就是由於實際需要而產生和發展的。學習解析幾何的目的，也正是為了更好地參加社會主義建設，作好必要的準備。課本在教給學生平面解析幾何的基礎知識的同時，還注意介紹一些各方面的應用。如繪圖方面的拋物綫拱的畫法和利用參數方程 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ 畫橢圓的方法；物理方面的合力和重心的求法；又如通過參數方程的學習，說明了拋擲體的軌道是拋物綫；通過圓錐曲綫的切綫的學習，介紹了圓錐曲綫的切綫的性質在光學上的應用；通過圓錐曲綫的學習，說明了地球、彗星等天體運動的軌道和人造衛星、人造行星等的軌道都是圓錐曲綫。此外，生產實際和科學研究中常常根據實驗數據，

求得經驗公式，初步确定两个变量之間的函数关系，課本中在这方面也介紹了直綫方程在决定直綫型的經驗公式时的应用，为以后掌握其他类型的經驗公式的求法作好准备。教学时应该注意在不超过学生理解程度，与所学的教材内容密切結合的原則下，适当联系实际。

第一章 直角坐标系、曲线和方程

一、教学要求

1. 使学生了解解析几何研究的对象和方法。
2. 使学生理解平面直角坐标系的意义和作用，平面内的点和一对实数之间的一一对应关系；掌握两点间的距离公式、两点连线的斜率公式、分点公式、三角形面积公式；初步学会用代数来研究几何问题的方法。
3. 使学生理解曲线与方程间的一一对应关系，对一些已知的简单曲线能够求出它们的方程，对一些不太复杂的方程能够经过讨论画出它们的曲线。

二、内容和安排

本章教材的主要内容有：有向线段、平面直角坐标系、几个基本公式、曲线和方程、两条曲线的公共点。

本章教材一开始首先讲解了有向线段，并且把数轴上有向线段的数量用它的起点和终点的坐标来表示，在这基础上讲解了平面直角坐标系和一些基本公式——两点间的距离公式、两点连线的斜率公式、分点公式、三角形面积公式。结合着这些公式的讲解，通过具体例题，说明了怎样利用平面内点的坐标，用代数的方法来研究几何的问题。接着讲解曲线和方程之间的关系，以及关于曲线和方程的两大问题：已知曲线求它的方程，已知方程画出它的曲线。最后讲解两条曲线的

公共点.

三、重点、难点、关键

本章教材是全书的基础,只有将这一章学好了,才能顺利地学习课本的后面各部分.

本章教材的重点是平面内点的坐标和曲线的方程两个基本概念以及一些基本公式.理解和掌握平面内点的坐标和曲线的方程两个基本概念,是顺利地学习全书的关键,本章中的一些基本公式在以后学习中经常要用到.因此,它们是本章教材的重点.

另外,本章中讲到的一些方法如用解析法来研究几何图形的性质,由曲线求方程的方法,由方程求曲线的方法,求两条曲线的交点的方法等,都是学习解析几何的基础知识.因此,它们也是本章的重要内容.

本章教材的主要难点是有向线段、解析法、线段的定比分点、三角形面积中的正负以及曲线和方程.关于这些难点将在教学建议中分别叙述.

四、教学时间

本章教材的教学时间,估计 15 课时左右.其中第一单元直角坐标系约 10 课时左右,第二单元曲线和方程约 5 课时左右.

五、教学建议

引言

课本的引言部分扼要地讲解了平面解析几何研究的对象和方法,解析几何的产生,解析几何在科学技术上的应用,以

及学习解析几何的目的, 結合引言的讲解, 教师还可以指导学生一些学习解析几何的方法, 但不要費过多的时间. 在正式讲授課文之前, 先扼要地談一談(1)学些什么, (2)为什么学, (3)怎样学, 可以引起学生学习的积极性, 端正学生学习的态度.

§ 1.1 有向綫段

1. 課本一开始先讲有向綫段, 主要是为了证明后面的几个基本公式做准备的. 如果不先讲有向綫段, 那么证明这几个公式时, 就要把坐标点分别在各个不同象限时一一进行論证. 論证就很繁. 利用了有向綫段, 这些論证就可簡化.

2. 这一节的内容安排是: 先讲有向直綫, 再讲有向綫段, 以及怎样从有向綫段所在直綫的方向来决定有向綫段的方向是正还是負. 接着讲解有向綫段的数量, 有向綫段的绝对值. 然后, 讲解数軸上的有向綫段的数量公式 $AB = x_2 - x_1$, 并且利用这个公式证明了沙尔定理. 最后讲解了两个例题.

3. 讲解有向直綫时, 可以用代数中已经学过的数軸作为例子.

4. 在几何里, 綫段是不分方向的. 因此学生开始学习有向綫段时很不习惯, 容易和几何中的沒有方向的綫段混淆起来. 特别是, 在几何中 AB 和 BA 可以表示同一綫段, 而在解析几何里, AB 和 BA 就表示两条不相等的有向綫段. 这一点要加以强調, 引起学生注意.

5. 有向綫段、有向綫段的数量、有向綫段的绝对值, 这三个名詞, 学生不容易辨别清楚. 有向綫段是指这条綫段本身. 有向綫段的数量是指这条綫段的长度連同表示它的方向的正

負号。有向綫段的絕對值是指这条綫段的长度, 不包括方向, 也就是說, 不分正負。

6. 有向綫段的数量公式 $AB = x_2 - x_1$, 是本节教材的重点。这是证明下面几个基本公式的关键性教材。要掌握这个公式, 除了要弄清楚有关的一些概念以外, 还必须弄清楚課本图 1.5 中的六种情况, 在任何一种情况下都能得出关系式 $AB = OB - OA$ 。課本中只证明了(1)、(2)两种情况。教学时, 教师可以多证一、二种, 或者由学生自己来证明一、二种。公式后面所讲的沙尔定理主要是为了說明这个公式的应用, 教学时的重点应当放在使学生理解和掌握证明的方法上, 不必要要求学生去記这个定理(因为这个定理不是經常用到, 如果用到, 如在 § 1.5 的例 1 中用到, 也很容易从图中得出結果)。本节中的两个例题也都是为了說明公式 $AB = x_2 - x_1$ 的应用。习题一第 3 題比較直观, 可以配合这部分教材, 作为堂內练习之用。

§ 1.2 平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系在代数中已經学过了。因此課本上有關这方面的教材讲得比較簡略。但是这部分教材很重要, 是全部解析几何的出发点。教学时可以用复习的形式, 使学生弄清楚有关平面直角坐标系的一些名称和記法, 如坐标軸、坐标原点、点的坐标和坐标的記法、坐标軸上的点的坐标的特点等。

2. 坐标平面內的点和一对实数之間的一一对应关系是本节教学的重点。“对应关系”在数学中是一个非常重要的概念, 学生在代数中虽然已經学过, 可能印像不深, 这里应当着重把坐标平面內的点和一对实数之間的一一对应关系讲清楚, 特

別是課本中用黑体字印的一段。

3. 例 2 要用到物理中的一條定理：“同平面內作用于一點的若干個力在兩個垂直方向的分力之和分別等于它們的合力在這兩個方向的分力。”在講例 2 時可以畫出圖來，並且把這條定理說一下。

§ 1.3 兩點間的距離

1. 兩點間的距離公式和后面的幾個公式，都是根據有向綫段的數量公式，應用平面幾何和三角中的一些知識來加以證明的。因為這些公式在以后學習中經常要用到，所以除了使學生理解和掌握這些公式的證明以外，還要求學生能熟記這些公式。為此，課本中配備了一些直接應用公式的基本練習。這些練習雖然都比較容易，但是對於掌握公式很有幫助，不能因為容易而加以忽視。

2. 兩點間的距離公式和后面的幾個公式，不論圖形在哪一個象限都是成立的。因此，記憶公式時，我們可以假定圖形是在第 I 象限。例如，要記憶兩點間的距離公式，我們可以假定兩點 P_1, P_2 都在第 I 象限內，這樣我們就可以把 P_1P_2 看作是兩條直角邊分別平行于兩條坐標軸的直角三角形的斜邊，借助于勾股定理就可以記住

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

3. 例 2 是一個用解析法來證明幾何題的例子。通過這個例子來說明什麼叫做解析法。由於學生初次學習這種方法，會感到一定困難，主要難點在於學生不會利用圖形中的已知條件來選取適當的坐標系。他們常常會把任意三角形設成特

殊三角形，把平行四边形設成任意四边形等等，因而造成解題时的困难或錯誤。这里要注意下列三点：

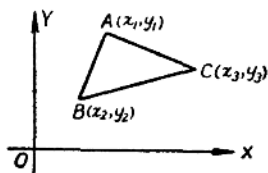
(1) 用解析法证明几何中的定理时，是先有图形然后再設置坐标軸，坐标軸是后来添上的，不是图形中原来有的。

(2) 坐标軸可以任意选取，选得好可以使证明簡便。

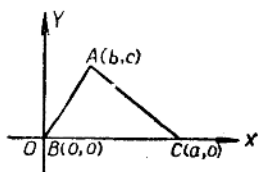
(3) 选定坐标軸后，还要設置图形中已知点的坐标，設置这些点的坐标时，要符合图形中的已知条件，不能任意設置。

例如，关于任意三角形的問題，一般有下列几种設置坐标軸的方法：

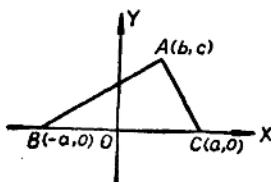
(i) 以平面內任意两条互相垂直的直綫作坐标軸。



(ii) 以三角形的一个頂点作原点，一条边所在的直綫作 x 軸。



(iii) 以三角形一条边所在的直綫作 x 軸，这条边的中点作原点。



(iv) 以三角形一条边所在的直綫作 x 軸，这条边上的高作 y 軸。

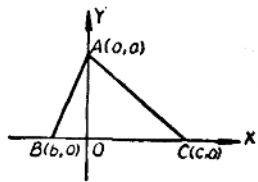


图 1.1

采取第(i)种形式的优点是可以类推(参看§1.5例3的证明),采取后三种坐标的优点是因为坐标中有0,計算比較簡單.課本中的例2采取了第(iii)种形式.容易看出,在这个例子中,采用这种形式要比其他几种簡便一些.

学生在設置坐标时,最容易犯的錯誤有两种.一种是用特殊来代替一般.例如在第(iii)种形式的坐标中,設了 B 、 C 两点的坐标是 $(-a, 0)$ 、 $(a, 0)$ 后,把 A 点的坐标設成 $(0, b)$,产生这种錯誤的原因是沒有注意到 $\triangle ABC$ 是任意三角形而不是等腰三角形,用特殊来代替一般,证明就失去普遍性.另一种是不利用图形中的已知条件.例如§1.4例4中的正方形,把四个頂点設成 $A(0, 0)$ 、 $B(a, 0)$ 、 $C(b, c)$ 、 $D(0, d)$.产生这种錯誤的原因是沒有注意到正方形的四边相等,設了 B 点的坐标, C 、 D 两点的坐标也就确定,不能随便假設.

讲课时,教师还可以再举一些平面几何中常見的图形,如等腰三角形、等边三角形、平行四边形、正方形等作为例子,來說明怎样設置坐标軸.

§1.4 直線的傾斜角和斜率

1. 直線的傾斜角和斜率在代数中已經学过,这里可以先簡單复习一下它們的定义,然后着重說明傾斜角的范围.

2. 斜率公式和两条直線平行或垂直的条件都很重要,都要求学生熟記.

3. 如果学生还不懂什么叫做“充要条件”,可以結合本节中两条直線平行或垂直的条件,簡明地讲一讲什么是必要条件、充分条件和充要条件.讲法可以參看后面的参考資料.

4. 应当向學生交代一下，課本中說的两条直綫平行也包括这两条直綫重合的特殊情况，以后也是这样。

§ 1.5 綫段的定比分点

1. 綫段的定比分点公式和中点公式都很重要，都要求學生熟記，記綫段的定比分点公式时，应当注意分母都是 $1+\lambda$ ，而分子分別是 $1x_1 + \lambda x_2$ 和 $1y_1 + \lambda y_2$ 。

2. 綫段的定比分点也是本章教材的难点之一。學生往往把两条有向綫段的数量之比和两条綫段的长度之比混淆起来。教学时必须首先使學生明确这个“定比”是以綫段的起点为起点，分点为終点的有向綫段的数量和以分点为起点，綫段的終点为終点的有向綫段的数量之比。为了使學生容易弄清这一点，必須注意定比 $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ 中 $P_1 \rightarrow P, P \rightarrow P_2$ ，就是起点 $\rightarrow$ 分点、分点 $\rightarrow$ 終点这个順序不能搞錯，然后再从內分点和外分点来研究定比 λ 的正負情况。

3. 为了使學生掌握綫段的定比分点公式，除了习题四的 1、2 两題以外，下列两題也可以作为堂內练习之用：

(1) 如图 1.2，求 B 点分 AC ， B 点分 CA ， C 点分 AB ， C 点分 BA ， A 点分 BC ， A 点分 CB 所成的比。

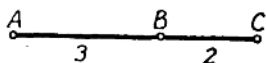


图 1.2

(2) P 点分 P_1P_2 的比是 λ ， M 是 P_1P_2 的中点。填写下表：

P 点位置	在 P_2P_1 的延長綫上	与 P_1 重合	在 P_1, M 之間	与 M 重合	在 M, P_2 之間	与 P_2 重合	在 P_1P_2 的延長綫上
λ	$-1 < \lambda < 0$						

λ	$\lambda < -1$	$\lambda = -1$	$-1 < \lambda < 0$	$\lambda = 0$	$0 < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda$
P 点位置							

§ 1.6 三角形的面积

1. 利用三角形面积公式求三角形面积的符号问题，学生往往难以理解。为了使學生比較好理解，課本上首先得出 $\triangle P_1P_2P_3$ 的三个頂点 P_1, P_2, P_3 的顺序是反时针方向时的面积公式

$$\Delta_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

然后再求出当 P_1, P_2, P_3 的顺序是顺时针方向时的面积公式

$$\Delta_{P_1P_2P_3} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

最后再归并成一个公式

$$\Delta_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}. \quad (3)$$

也就是說，如果三角形的三个頂点的顺序是反时针方向时，求三角形面积时要用公式(1)；如果是顺时针方向时，要用公式(2)；如果不能确定是反时针方向还是顺时针方向时，用公式(3)。这样求得的三角形的面积就都是正值。因为公式(3)包括了公式(1)和(2)，因此记忆时只要记住公式(3)就可以了。