卜月华　主编

图论及其应用

T U l u n

J i q i

Y i n g y o n g

东 南 大 学 出 版 社

图论及其应用

卜月华　吴建专
顾国华　殷　翔

东南大学出版社

内 容 简 介

本书共九章。主要包括图的基本概念、图的连通性、树、Euler 环游和 Hamilton 回路、图的匹配与独立集、图的染色、网络选址问题，网络流及网络模型应用实例等内容。本书不仅介绍了图论的基本原理，也介绍了如何应用图论方法解决实际问题。

本书论证严密，深入浅出，清晰易懂，并配有适当的例题和习题，可作为高等院校本科生图论课的教材或参考书，也可作为数模集训的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/卜月华.—南京:东南大学出版社，2000.3

ISBN 7-81050-601-3

Ⅰ.图...　Ⅱ.卜...　Ⅲ.图论　Ⅳ.0157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 14228 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)

出版人　宋增民

江苏省新华书店经销　华东有色地研所印刷厂印刷

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：10.25　字数:266 千字

2002 年 7 月第 1 版第 2 次印刷

定价:15.00 元

目　　录

1 图的基本概念

1.1 图论发展史

图论是一门应用十分广泛其内容非常丰富的数学分支，是近年来较为活跃的数学分支之一。它起源很早，瑞士数学家欧拉(L.Euler)在1736年解决了当时颇为有名的一个数学难题，即哥尼斯城堡七桥问题，从而使他成了图论和拓扑学的创始人。哥尼斯城堡位于前苏联的加里宁格勒，历史上曾是德国东普鲁士省的省会，普雷格尔河横穿城堡，河中有两个小岛 A 与 D，并有七座桥连接岛与河岸及岛与岛(见图1.1)。当地居民提出是否存在一种走法，要从这四块陆地中的任意一块开始，通过每一座桥恰好一次再回到起点。

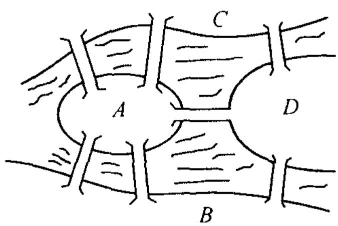

图 1.1

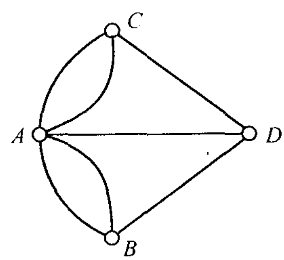

图 1.2

欧拉为了解决这七桥问题，他把这问题转化为一个数学问题来解决。他认为这种走法是否存在与两岸和两个岛的大小形状及桥的长短、曲直都没有关系，重要的是两块陆地之间有几座桥连

接。所以他用一个点表示一块陆地的区域,用连接相应顶点的线段表示各座桥,这样就得出图 1.2 所示的图。问题就转化为:在这个图中,是否能从某一点出发经过每条线段恰好一次再回到出发点。欧拉在 1736 年论证了在这个图中,如此走法是不存在的,并且推广了这个问题,对于一个给定的图可以如此走遍给出了一个判别法则。

基尔霍夫(Kirchhoff)在 1847 年运用图论解决了电路理论中求解联立方程的问题,他引进了"树"的概念。可惜的是他的发展超越了时代而长期未被重视。1857 年凯莱(Cayley)非常自然地在有机化学的领域里发现了一族重要的图,称为树,他应用树来计算饱和氢化合物 C_nH_{2n+2}的同分异构体的数目。

早期的图论与数学游戏发生密切联系。如哈密尔顿(W. R. Hamilton)的周游世界问题。他用一个正十二面体(具有十二个五边形的面和二十个顶点)的二十个顶点表示世界上的二十座大城市(见图 1.3),提出的问题是要求游戏者找一条沿十二面体的棱通过每个顶点恰好一次的闭路。图 1.3 所示的 $a,b,\cdots,s,t,a$ 表示出了这样的一条闭路。

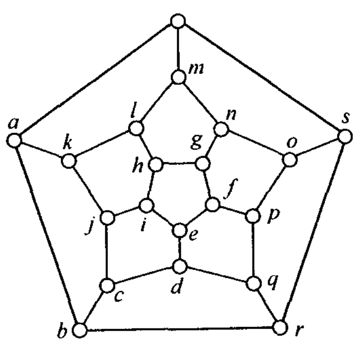

图 1.3

20世纪后，图论的应用渗透到许多其他学科领域，如物理、化学、信息学、运筹学、博弈论、计算机网络、社会学、语言学，以及集合论、矩阵论等。从20世纪50年代以后，由于计算机的迅速发展，有力地推动了图论的发展，使图论成为数学领域中发展最快的分支之一。

图论是组合数学的一分支，与其他的数学分支，如群论、矩阵论、概率论、拓扑学、数值分析有着密切的联系。对于基础图论来说，它不要求有高深的数学工具。读者只要学过集合论和线性代数的基本概念，便可学习本书的内容。因此对年轻的数学爱好者来说，图论是他们极好的研究园地。

1.2 图的定义

我们这里所讨论的图并不是几何学中的图形，而是客观世界中某些具体事物间联系的一个数学抽象(如在1.1中所提到的欧拉把七桥问题转化为有四个点、七条线段的这种图)，用顶点(小圆点)代表事物，用边表示各事物间的二元关系，如果所讨论的事物之间有某种二元关系，我们就把相应的顶点连成一条边。这种由顶点及连接这些顶点的边所组成的图就是我们图论中所研究的图。

例1 在一次集会中有五位代表 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，其中 x_2 与 x_1，x_1 与 x_5，x_2 与 x_5，x_3 与 x_4，x_4 与 x_5 是朋友，则我们可以用一个带有五个顶点、五条边的图形来表示这五位代表间的朋友关系(见图1.4)。

值得注意的是图1.4中，两条边 e_3 与 e_5 有一个交叉点，但这个点并不是我们所研究的顶点，只是两条边的交叉点。下面我们给图下一个明确的数学定义。

定义1.2.1 设 $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ 是一个非空有限集合，$E(G) = \{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ 是与 $V(G)$ 不相交的有限集合。一个

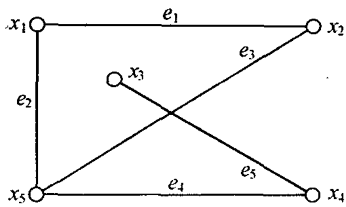

图 1.4

图 G 是指一个有序三元组$(V(G),E(G),\psi_G)$,其中 ψ_G 是**关联函数**,它使 $E(G)$ 中每一元素对应于 $V(G)$ 中的无序元素对(可以相同)。

如例 1 中五位代表之间的朋友关系所对应的图为:$G = (V(G),E(G),\psi_G)$,其中 $V(G) = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$,$E(G) = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$,$\psi_G(e_1) = x_1x_2$,$\psi_G(e_2) = x_1x_5$,$\psi_G(e_3) = x_2x_5$,$\psi_G(e_4) = x_4x_5$,$\psi_G(e_5) = x_3x_4$。

图 $G = (V(G),E(G),\psi_G)$ 中,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为 G 的顶点集合和边集合。$V(G)$ 中的元素称为 G 的**顶点(或点)**,$E(G)$ 中的元素称为 G 的**边**。$p(G) = |V(G)|$ 和 $q(G) = |E(G)|$ 分别称为图 G 的点数(或阶)和边数。

一个图 $G = (V(G),E(G),\psi_G)$ 可以用平面上一个图形表示;用平面上的小圆圈表示图 G 的项点,用点与点之间的连线表示 G 中的边。图的图形表示使得抽象定义的图具有直观性,有助于我们进行思考和理解图的性质。明显地,同一个图可以有许多形状不同的图形表示。

例 2 图 $G = (V(G),E(G),\psi_G)$,其中 $V(G) = \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$,$E(G) = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$,$\psi_G(e_1) = v_1v_1$,$\psi_G(e_2) = v_1v_2$,$\psi_G(e_3) = v_2v_3$,$\psi_G(e_4) = v_2v_3$,$\psi_G(e_5) = v_3v_4$,$\psi_G(e_6) = v_4v_1$。这个图 G 是具有 4 个顶点,6 条边的图。其图形如图 1.5 所示。

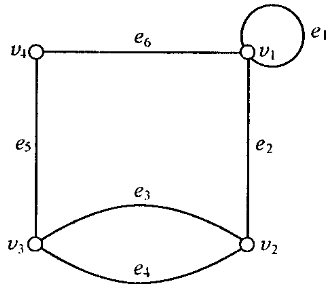

图 1.5

在一个图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 中，如果 $\psi_G(e)=uv$，我们就说边 e 连接顶点 u 和 v，称 u 和 v 是 e 的**端点**，也称 u 和 v **相邻**；同时也称 u(或 v) 与 e **关联**。与同一个顶点关联的若干条边称为是**相邻的**。两个端点重合为一个顶点的边称为**环**。如图 1.5 的边 $\psi_G(e_1)=v_1v_1$ 是 G 的一个环。关联于同一对顶点的二条或二条以上的边称为**多重边**。如图 1.5 中的两条边 $e_3(\psi_G(e_3)=v_2v_3)$ 和 $e_4(\psi_G(e_4)=v_2v_3)$ 是 G 的多重边。一个图 G 如果没有环和多重边，则称该图为**简单图**。如图 1.4 所示的图是一个简单图。

如果一个图 G 的顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 都是有限集，则称该图为**有限图**，否则称为**无限图**。本书仅讨论有限图。只有一个顶点所构成的图称为**平凡图**，其它所有图称为非平凡图。显然，至少有一个顶点才能称为图。所以我们总要求一个图的顶点集合是非空的。

通常我们将图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，简记为 $G=(V(G),E(G))$ 或 $G=(V,E)$ 或 G。

从图的定义不难发现。我们所讨论的图与图的几何形状没有关系，即与顶点的位置(但两个不同的顶点不能重合)及连接它们的边的曲、直、长、短都没有关系(但一条边除了两个端点外，不再通过其它顶点)。我们所关注的只是各顶点之间是否有边或有几条

边连接。例如,图 1.4 也可以画成图 1.6 的形状。显然,这两个图都同样表明了这五位代表间的朋友关系。我们把这种不存在本质差别的两个图称为是同构的。

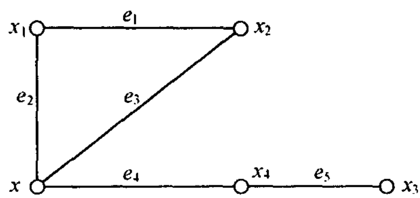

图 1.6

定义 1.2.2 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个图,若存在一一对应 $\varphi_1:V_1\to V_2$ 及一一对应 $\varphi_2:E_1\to E_2$,使对每条边 e,$e=uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi_2(e)=\varphi_1(u)\varphi_1(v)\in E_2$。则称 G_1 和 G_2 是同构的,记为 $G_1\cong G_2$。

对于两个简单图,其同构定义可简化为:

定义 1.2.3 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 与 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个简单图,若存在一一对应 $\varphi:V_1\to V_2$,使得对 G_1 中任意两个顶点 u 和 v,$uv\in E_1$ 当且仅当 $\varphi(u)\varphi(v)\in E_2$,则称 G_1 和 G_2 是同构的。记为 $G_1\overset{\varphi}{\cong}G_2$ 或 $G_1\cong G_2$。

到目前为止,判断两个图是否同构,还只能根据定义。也就是说,两个图是否同构还没有很简便的判别法。

例如,在图 1.7 所示的两个图 G_1 和 G_2 中,建立顶点之间的对应关系如下:

$\varphi: x_1\leftrightarrow v_1, x_2\leftrightarrow v_2, x_3\leftrightarrow v_3, y_1\leftrightarrow u_1, y_2\leftrightarrow u_2, y_3\leftrightarrow u_3$。

容易看出,G_1 中的三个顶点 x_1、x_2、x_3 互不相邻,y_1、y_2、y_3 互不相邻,而 $x_iy_j\in E(G_1)$,$i=1,2,3$, $j=1,2,3$。在 φ 对应下,G_2 中的三个顶点 v_1、v_2、v_3 互不相邻,u_1、u_2、u_3 互不相邻。而 $v_iu_j=\varphi(x_i)\varphi(y_j)\in E(G_2)$,$i=1,2,3$, $j=1,2,3$。由图的同构

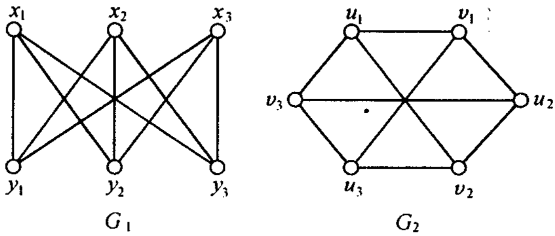

图 1.7

定义，$G_1 \cong G_2$。

对于两个同构的图，易见它们有相同的结构，差异只是顶点和边的名称不同，或两个图的形状不同，由于我们主要关注的是图的结构性质，所以在画图时常常省略顶点和边的标号；一个无标号图就认为是同构图的等价类的代表。

通过前面的讨论可发现一个图实质上给出了顶点之间的一种二元关系。因而在客观世界中，一些事物间若带有某种二元关系，就可以用一个图来描述这些事物之间的相互关系。像人与人之间的朋友关系、同学关系、相互认识关系等均可用一个图来描述。一般情况下，用图的顶点表示某个问题中所讨论的主要的对象，而边表示这些对象之间主要的二元关系，所构成的图就表述了这些对象之间的二元关系，我们就可以通过对该图的讨论去解决相应的问题。但上面所能描述的关系只能是具有对称性的二元关系。而在现实生活中，有许多关系是非对称性的。如认识关系，甲认识乙并不意味着乙认识甲。在处理交通流问题时，会碰到单行道路。像这些就不能简单地用前面所讨论的图来表示。为此引进有向图的概念。

定义 1.2.4 设 $V(D) = \{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$ 是一个非空有限集合，$A(D) = \{a_1, a_2, \cdots, a_q\}$ 是与 $V(D)$ 不相交的有限集合。一个**有向图 D** 是指一个有序三元组($V(D), A(D), \psi_D$)，其中 ψ_D 是关联函数，它使 $A(D)$ 中的每一元素(称为**边**或**弧**)对应于 $V(D)$ 中

的有序元素（称为**顶点**或**点**）对（可以相同）。若 a 是一条弧，而 u 和 v 是使得 $\psi_D(a)=(u,v)(\neq(v,u))$ 的顶点，则称 a 从 u 指向 v；称 u 是 a 的起点，v 是 a 的终点。简记为 $a=(u,v)$。在不引起混淆时，有时也可用 $uv(\neq vu)$ 表示 (u,v)。

对应于每个有向图 D，可以在有相同顶点集上作一个图 G_D，使得对应于 D 的每条弧，G_D 有一条与该弧有相同端点的边与之对应，这个图称为 D 的**基础图**。反之，给定任意图 G，对于它的每条边，给其端点指定一个顺序，从而确定一条弧，由此得到一个有向图，这样的有向图称为 G 的一个**定向图**，记为 $\vec{G}$。一般情况下，$\vec{G}$ 是不惟一的。

给定一个图 $G=(V,E)$，可以在有相同顶点集上作一个有向图 $D(G)$：使对应于 G 中每一条边 uv，$D(G)$ 中有两条方向相反的弧 (u,v) 及 (v,u) 与之对应。$D(G)$ 称为 G 的**对称有向图**。$D(G)$ 中的一些性质、结论可自动地转化为 G 中相应的性质、结论。

和图一样，有向图也有简单的图形表示。一个有向图可以用它的基础图连同它的边上的箭头所组成的图形来表示。图 1.8 表示一个**有向图 D** 和它的**基础图**。

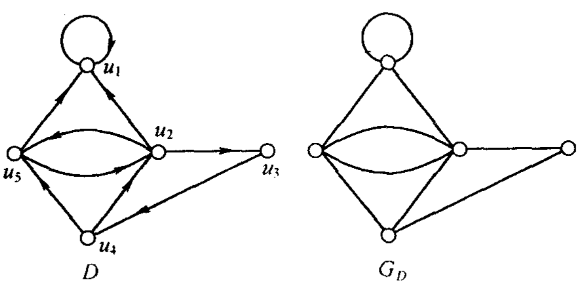

图 1.8

前面一些关于图的概念（点与边等关系）可以自动地应用于

有向图。和简单图相应的，称一个有向图是**严格**的，如果它没有环，且任意两条弧都不同时具有相同的起点和终点。

本书后面的讨论中，在没有特殊说明的情况下，所指的图一般为无向图。我们很容易地能把无向图中某些概念推广到有向图中。

1.3 顶点的度

定义 1.3.1 图 $G=(V,E)$ 中，与顶点 v 相关联的边数(每个环计算二次)，称为顶点 v 的**度**，记为 $d_G(v)$(或 $d(v)$)。分别用 $\delta(G)$ 和 $\triangle(G)$ 表示 G 中顶点的最小度和最大度。度为零的顶点称为**孤立顶点**。

例如，图 1.8 中 $d_G(u_1)=4, d_G(u_2)=5, d_G(u_3)=2, d_G(u_4)=3, d_G(u_5)=4, \delta_G=2, \Delta(G)=5$。

如果 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$，称非负整数序列 $(d(v_1), d(v_2),\cdots,d(v_p))$ 为图 G 的**度序列**。

例如，图 1.8 所示的图 G 的度序列为(4,5,2,3,4)。

设 S 是 $V(G)$ 的一个非空子集，v 是 G 的任一顶点，称

$$N_S(v)=\{u \mid u\in S, uv\in E(G)\}$$

为 v 在 S 中的**邻域**。特别若 $S=V(G)$，则常常简记 $N_G(v)$ 为 $N(v)$。明显地，当 G 是简单图时，$d_G(v)=|N(v)|$。

定义 1.3.2 如果一个图中每个顶点的度是某一固定整数 k，则称该图是 k 正则图。

例如，图 1.9 所示的 H_1 与 H_2 分别是 3 正则图和 1 正则图。

从顶点度的定义不难发现，由于每条边有两个端点，从而每条边对 $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)$ 的贡献是 2。因而可得以下结论：

定理 1.3.1 对每一个图 $G=(V,E)$，均有

$$\sum_{v\in V} d_G(v)=2q(G)$$

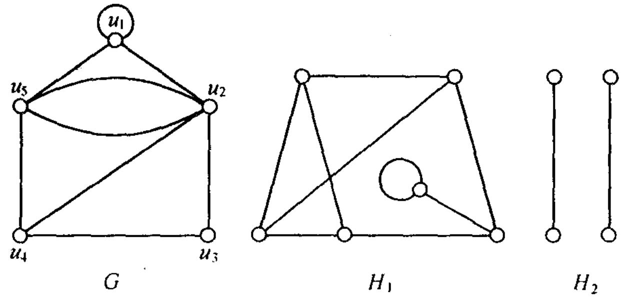

图 1.9

为了方便起见，我们把度为奇数的顶点称为**奇点**，度为偶数的顶点称为**偶点**。

推论 1.3.2 在任何图 $G=(V,E)$ 中，奇点的个数为偶数。

证明 我们把图 G 的顶点集 V 划分为两部分 V_1 和 V_2，其中 V_1 是 G 中所有的奇点，V_2 是 G 中所有偶点。则 $V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$，由定理 1.3.1 得

$$2q(G)=\sum_{v\in V}d_G(v)=\sum_{v\in V_1}d_G(v)+\sum_{v\in V_2}d_G(v)$$

而 $\sum\limits_{v\in V_2}d_G(v)$ 是偶数，所以 $\sum\limits_{v\in V_1}d_G(v)$ 也是一个偶数，即推得 $|V_1|$ 是偶数。 证毕。

推论 1.3.3 非负整数序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_p)$ 是某个图的度序列当且仅当 $\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数。

证明 由定理 1.3.1 可知必要性成立。对于充分性，取 p 个相异顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_p$，若 d_i 是偶数，就在 v_i 处作 $d_i/2$ 个环；若 d_i 是奇数，在 v_i 处作 $(d_i-1)/2$ 个环。由于 $\sum\limits_{i=1}^{p}d_i$ 为偶数，故 $d_1,d_2,\cdots,d_p$ 中有偶数个奇数项，从而将所有与奇数 d_i 相对应的这些顶点 v_i

两两配对并连上一条边。最后所得图的度序列就是$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$。 证毕。

需要注意的是,以非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$($\sum_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数)为度序列的图一般有很多。

例如,图 1.10 所示的 G_1 与 G_2 的度序列均是(7,3,1,4,6,5)。

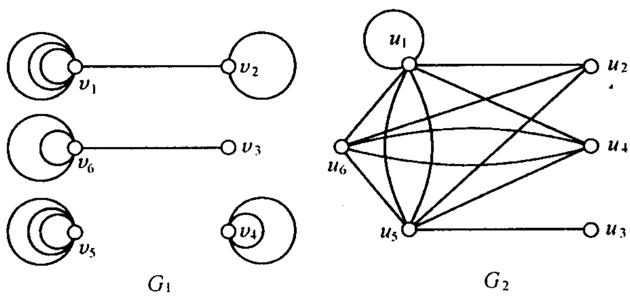

图 1.10

简单图的度序列称为**图序列**,图序列的讨论或判断要比度序列的讨论困难得多。即使知道非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$是图序列,要构造相应的简单图仍是相当困难的。

Erdös 和 Callai 在 1960 年给出了图序列的一个判别方法。

定理 1.3.4 非负整数序列$(d_1,d_2,\cdots,d_p)$$(d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_p)$是图序列当且仅当$\sum_{i=1}^{p}d_i$ 是偶数,并且对一切整数 k,$1 \leqslant k \leqslant p-1$,有

$$\sum_{i=1}^{k}d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{p}\min\{k,d_i\}$$

证明略。

对于有向图 $D=(V,A)$,也有类似的一些概念及性质。

定义 1.3.3 有向图 D 中,一个顶点 u 的**出度** $d_D^+(u)$ 是指以