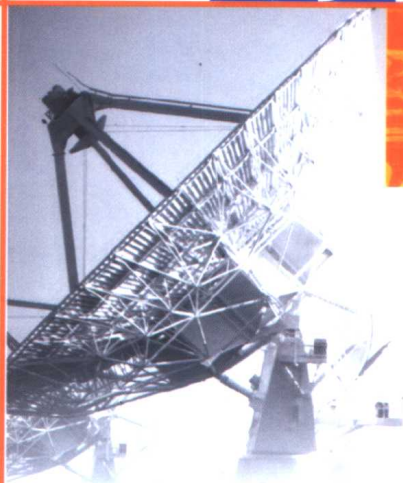


DAXUE WULI KECHENG XUEXI YU JIETI ZHIDAO

大学物理课程学习 与解题指导



主 编 李炳虎
副主编 文利群 刘利辉
谢自芳 彭 军
湖南大学 出版社

大学物理课程学习 与解题指导

主 编 李炳虎

副主编 文利群 刘利辉
谢自芳 彭 军

湖南大学出版社

2003年·长沙

内 容 简 介

本书对大学物理各篇章(力学、振动和波、热学、电磁学、量子物理)的学习作了具体、明确的指导,对解题的思路和方法进行了详尽的分析和说明,各篇章还配了自测题,其中大部分是编者在多年教学实践中积累起来的典型题目,内容广泛、深入。

本书适合于大学本科生复习大学物理之用,也可作大专生、成教生、自考生以及远程教育的学生复习物理学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理课程学习与解题指导/李炳虎主编. —长沙:湖南大学出版社, 2003. 1

ISBN 7-81053-590-0

I. 大... II. 李... III. 物理学—高等学校—自学参考资料 IV. 04

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 108961 号

大学物理课程学习与解题指导

Daxue Wuli Kecheng Xuexi yu Jieti Zhidao

主编 李炳虎 副主编 文利群 刘利辉 谢自芳 彭 军

☐ 责任编辑 戴东宁 俞 涛

☐ 出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

☐ 经 销 湖南省新华书店

☐ 印 装 长沙环境保护学校印刷厂

☐ 开本 787×1092 16 开 ☐ 印张 17.25 ☐ 字数 442 千

☐ 版次 2003 年 1 月第 1 版 ☐ 2003 年 1 月第 1 次印刷

☐ 印数 1—7 000 册

☐ 书号 ISBN 7-81053-590-0/O·45

☐ 定价 19.00 元

(湖南大学版图书凡有印装差错, 请向承印厂调换)

前 言

在物理学的学习过程中，大学和中学的根本区别在于：中学阶段学习的是常量问题，而事物总是在变化发展之中；大学阶段学习的是实际生活、生产、科研中的变量问题。这就要求学生在思维和研究方法上有一个根本的转变。

大学物理是工科院校学生的一门必修基础课，通过本课程的学习，要提高学生的科学实验能力、抽象思维能力和计算能力。这些能力的提高，具体来讲，首先要突破对变量问题的研究，尤其重要的是对变量问题的定量计算，这对学生来讲不仅是一个新的内容，而且往往是大学学习的一道障碍。为了使广大学生学好本课程，我们在原编写的大学物理指导书的基础上进行了改编，将内容从学习指导扩充为学习指导和解题指导，使学生对物理学中各类问题从定性的认识深入到严格的定量计算。针对学生在学习中遇到的主要困难，特别加强了对物质在各种运动中有关的变量问题及解这些变量问题的思路和方法的介绍，通过典型例题和各种题解进行了详尽的分析和说明。在变量问题的解答计算中，一定要运用高等数学这一工具，本书在运用高等数学对变量问题作定量计算方面，作了详细、具体的指导和解答。本书还对学生在学习容易错和容易混淆的概念进行了分析、指正，并通过实例加以证明和演算。这不但对广大学生学习大学物理有益处，而且更重要的是能够使学生牢固地掌握处理变量问题的思路和方法，为大学后续课程的学习和今后的深造打下坚实的基础。

为了对读者有更大的帮助，希望读者在阅读和学习本书的过程中，要边看、边思考、边动手。特别对解题的过程，要学习、掌握其中的方法，边看边做，能做下去的地方，要自己做下去，做完后跟书上的做法比较一下，看错在那里，再想一想还有没有其他方法。这样做收效会更好。

在本书编写过程中，湖南大学大学物理教研室王鑫、郑采星、陈曙光、蔡建乐、黄述熙等老师对本书提出了许多宝贵意见和建议，在此，我们表示感谢。

我们希望通过本书能对读者有所帮助。书中错误之处，恳请批评、指正。

编者 2002 年 12 月

目 次

第一篇 力 学	(1)
1 质点运动学	(4)
2 质点力学的基本定律	(16)
3 运动的守恒定律	(25)
4 刚体定轴转动	(38)
5 狭义相对论	(50)
自测题 1 (力学 I)	(59)
自测题 2 (力学 II)	(63)
自测题 3 (相对论)	(67)
第二篇 振动与波	(69)
6 振动	(74)
7 波动	(87)
8 光的干涉	(104)
9 光的衍射	(114)
10 光的偏振	(123)
自测题 4 (振动、波动与光学 I)	(133)
自测题 5 (振动、波动与光学 II)	(136)
第三篇 热 学	(140)
11 气体分子运动论	(144)
12 热力学基本原理	(155)
自测题 6 (热学 I)	(166)
自测题 7 (热学 II)	(169)
第四篇 电磁学	(172)
13 真空中的静电场	(176)
14 静电场中的导体和电介质	(191)
15 稳恒电流的磁场	(201)
16 磁介质的磁化	(214)

17 电磁场.....	(218)
自测题 8 (电磁学 I)	(237)
自测题 9 (电磁学 II)	(242)
第五篇 量子力学.....	(248)
18 量子物理基础.....	(249)
自测题 10 (量子物理)	(262)
自测题答案.....	(264)

第一篇 力 学

基本要求

(1) 掌握位矢、位移、速度、加速度、角速度及角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量. 能借助于直角坐标系计算质点在平面内运动时的速度、加速度. 能计算质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度. 理解和应用相对运动中的速度和加速度变换.

(2) 掌握牛顿三定律及其适用条件. 能用微积分方法求解一维变力作用下的简单质点动力学问题.

(3) 掌握功的概念, 能计算直线运动情况下变力的功. 理解保守力作功的特点及势能的概念, 会计算重力、弹力和万有引力势能.

(4) 掌握质点的动能定理和动量定理. 通过质点在平面内运动情况理解角动量(动量矩)和角动量守恒定律, 并能用他们分析、解决质点在平面内运动时的简单力学问题. 掌握机械能守恒定律、动量守恒定律, 掌握运用守恒定律分析问题的思想和方法, 能分析简单系统在平面内运动的力学问题.

(5) 了解转动惯量概念. 理解刚体绕定轴转动的转动定律和刚体绕定轴转动情况下的角动量守恒定律.

(6) 了解牛顿的绝对时空概念并能由之导出伽里略坐标变换和速度变换公式.

(7) 理解爱因斯坦狭义相对论的两个基本假设: 狭义相对性原理和光速不变原理.

(8) 理解同时性的相对性和相对论时间膨胀效应. 会判断本征时间和非本征时间并能相互推算.

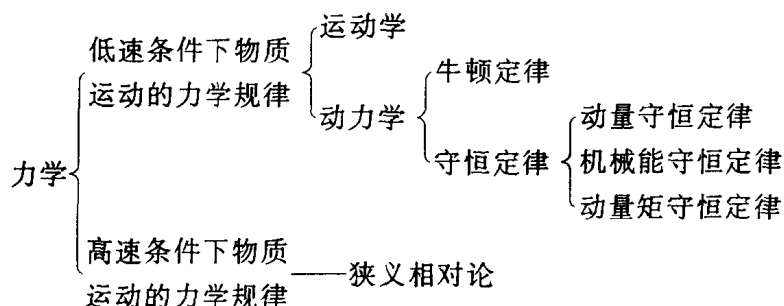
(9) 理解长度的测量和同时性的相对性的关系, 能正确应用相对论长度收缩公式.

(10) 理解洛伦兹坐标变换公式并能正确用以进行坐标换算. 了解相对论时空观和绝对时空观的不同以及洛伦兹变换与伽里略变换的关系.

(11) 了解相对论速度变换公式并能进行简单计算.

(12) 理解相对论质量、动量、动能、能量等概念和公式以及它们与牛顿力学中相应各量的关系. 能正确利用这些公式进行计算.

力学的基本框架



牛顿定律适用范围: 宏观物体在低速情况下的运动规律.

守恒定律适用范围: 无论是宏观物体, 还是微观物体, 它们在低速下运动或是在高速下运动都应遵守的运动规律. 因此守恒定律比牛顿定律适用范围更广泛, 更重要.

在高速情况下, 牛顿定律不再成立, 须用爱因斯坦相对论力学.

力学公式总表

物体的平动(线量)	刚体的定轴转动(角量)
位置矢量 $r = xi + yj + zk$	角位置 θ
位移 $\Delta r = r_2 - r_1$	角位移 $\Delta \theta$
速度 $v = \frac{dr}{dt}$	角速度 $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$	角加速度 $\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \theta}{dt^2}$
线量与角量的关系	
$v = R\omega$ $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$ $a_t = \frac{dv}{dt} = R\beta$	
匀变速运动 $v = v_0 + a_r t$ $s - s_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a_r t^2$ $v^2 - v_0^2 = 2a_r (s - s_0)$	匀变速转动 $\omega = \omega_0 + \beta t$ $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$ $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta (\theta - \theta_0)$
质量 m 力 F 牛顿定律 $F = ma$	转动惯量 $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ 力矩 $M = r \times F$ 转动定律 $M = I\beta$

物体的平动(线量)	刚体的定轴转动(角量)
动量 mv 动量定理 冲量 $= \int_{t_1}^{t_2} F dt = mv - mv_0$ 动量守恒定律 条件 $\sum F_{\text{外}} = 0$ $\sum m_i v_i = \text{恒矢量}$	动量矩 $I\omega$ 动量矩定理 冲量矩 $= \int_{t_1}^{t_2} M dt = I\omega - I\omega_0$ 动量矩守恒定律 条件 $\sum M_{\text{外}} = 0$ $\sum I\omega = \text{恒量}$
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 动能定理 $A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$	转动动能 $\frac{1}{2}I\omega^2$ 刚体定轴转动的动能定理 $A = \int M d\theta = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$
机械能守恒定律	
条件 $A_{\text{外}} + A_{\text{非}} = 0$ (或只有保守力作功) $\frac{1}{2}mv^2 + mgh_c + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{恒量}$	

1 质点运动学

1.1 运动学中的重要概念

(1) 质点 物体的大小和形状可以忽略的一种物理模型.

(2) 参照系 描述物体运动时所参照的物体或物体系. 为了定量描述物体的运动, 引进坐标系, 它是参照系的数学抽象.

(3) 平动中描述物体作机械运动的四个物理量

位置矢量(r): 描述物体在空间位置的物理量.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

位移(Δr): 描述物体在空间位置变化的物理量. 物体从位置 r_1 变化到位置 r_2 .

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}.$$

速度(v): 描述物体位置变化快慢及方向的物理量. 物体位置从 r_1 变化到 r_2 , 同时时间从 t_1 变化到 t_2 ($\Delta t = t_2 - t_1$).

平均速度

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}}{\Delta t} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_y\mathbf{j} + \bar{v}_z\mathbf{k}.$$

瞬时速度

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}.$$

加速度(a): 描述物体速度变化快慢及方向的物理量.

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

加速度在自然坐标系中的表示

$$\mathbf{a} = a_n\mathbf{n} + a_\tau\boldsymbol{\tau} = \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}.$$

法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{\rho}$.

切向加速度 $a_\tau = \frac{dv}{dt}$.

(4) 质点作圆周运动时描述运动的物理量

角位置 θ .

角位移 $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

角速度

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}.$$

角加速度

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

(5) 线量与角量的关系

$$v = R\omega, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\beta.$$

(6) 相对运动的速度和加速度

$$v_{\text{甲对丙}} = v_{\text{甲对乙}} + v_{\text{乙对丙}}, \quad a_{\text{甲对丙}} = a_{\text{甲对乙}} + a_{\text{乙对丙}}.$$

1.2 运动学解题指导

(1) 描述物体作平动的四个物理量: 位置矢量 r 、位移 Δr 、速度 v 、加速度 a 都是矢量. 要注意矢量的基本运算(矢量加减法, 两矢量的点积、叉积等基本运算法则).

(2) 掌握解运动学两类问题的方法.

第一类问题是已知质点的运动及运动方程, 求质点运动的速度和加速度.

第二类问题是已知质点的加速度及初始条件, 求质点运动的速度和运动方程.

第一类问题利用数学上求导数的方法, 第二类问题用积分的方法.

1.3 典型例题

1-1 一质点在 xOy 平面内运动, 其运动方程可能是:

(1) $x=3t, y=5-6t$; (2) $x=2t, y=11-3t^2$; (3) $x=2\cos 3t, y=2\sin 3t$;

(4) $x=3\cos 2t, y=4\sin 2t$; (5) $x=2t, y=15-\frac{5}{t}$.

问 表示质点作直线运动、圆周运动、双曲线运动、椭圆运动、抛物线运动的, 分别是哪个方程?

解题思路 要判断质点在平面内作什么运动, 只要求出质点在平面中运动的轨迹方程, 从轨迹方程可分辨出质点的不同运动. 已知运动方程, 求轨迹方程的方法是: 将运动方程中的时间 t 消去, 即可得到轨迹方程.

解 它们的轨迹方程分别是:

(1) $y=5-2x$, 直线; (2) $y=11-\frac{3}{4}x^2$, 抛物线; (3) $x^2+y^2=4$, 圆; (4) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, 椭圆;

(5) $y=15-\frac{10}{x}$, 双曲线.

1-2 路灯离地面高度为 H , 一人在灯下水平路面上以匀速度 v_0 步行, 如图 1.3-2. 人身高为 h , 求当人与灯的水平距离为 x 时, 他的头顶在地面上所对应的影子移动的速度 V 的大小.

解题思路 取如图 1.3-2 所示 x 坐标轴, 人的坐标为 x , 影的坐标为 x' , 人的速度为 $v_0 = \frac{dx}{dt}$, 影子的速度

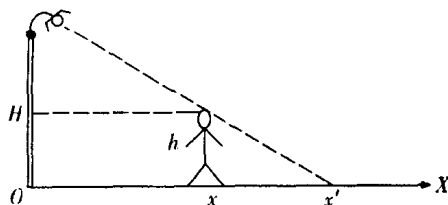


图 1.3-2

为 $\frac{dx'}{dt}$. 先从图中求出 x, x' 之间的关系式, 将 x' 对时间求一阶导数即得影的速度.

解 从图中可得

$$\frac{x'}{x} = \frac{H-h}{H}, \quad x' = \frac{H}{H-h}x,$$

$$|V| = V = \frac{dx'}{dt} = \frac{H}{H-h} \frac{dx}{dt} = \frac{H}{H-h} v_0.$$

影子也以匀速度 V 移动, 若人的速度 v_0 是变速度, 则影子移动的速度也为变速度, 比例系数为 $\frac{H}{H-h}$.

1-3 一质点在 xOy 平面内运动, 运动方程为 $x=4t, y=5-3t^2$, 式中 x, y 以 m 计, t 以 s 计. 求:

- (1) 写出 $t=3$ s 时质点的位置矢量, 并计算第 3 s 内的平均速度的大小;
- (2) $t=3$ s 时, 质点的速度和加速度;
- (3) 什么时刻, 质点的位置矢量恰与速度矢量垂直?

解题思路:

(1) 位置矢量 $r = xi + yj$, 将运动方程 $x(t), y(t)$ 代入即可求得. 求平均速度, 先算出 0~3 s 的位移 $\Delta r = r_3 - r_0$, 再根据 $\bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ 求出 $\bar{v}$;

(2) 运动学第一类问题, 已知运动方程求速度和加速度: $v = \frac{dr}{dt}, a = \frac{dv}{dt}$;

(3) 位置矢量和速度都是矢量, 两矢量垂直的条件是点积为零, 即 $r \cdot v = 0$.

解 (1) $r|_{t=3} = (xi + yj)|_{t=3} = [4i + (-3t^2 + 5)j]|_{t=3} = (12i - 22j)(m)$,

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_3 - r_2}{t_3 - t_2} \\ &= \frac{[4i + (-3t^2 + 5)j]|_{t=3} - [4i + (-3t^2 + 5)j]|_{t=2}}{1} \\ &= (4i - 15j) (m \cdot s^{-1}). \end{aligned}$$

(2) 第一种方法

$$\begin{aligned} v &= \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=3} = \left. \frac{d}{dt} [4i + (-3t^2 + 5)j] \right|_{t=3} \\ &= (4i - 6tj)|_{t=3} = (4i - 18j) (m \cdot s^{-1}); \\ a &= \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=3} = \left. \frac{d}{dt} (4i - 6tj) \right|_{t=3} = -6j (m \cdot s^{-2}). \end{aligned}$$

第二种方法: 速度和加速度是矢量, 可分别求出它的大小和方向来表示.

$t=3$ s 的速度

$$\begin{aligned} v_x &= \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=3} = \left. \frac{d(4t)}{dt} \right|_{t=3} = 4 (m \cdot s^{-1}); \\ v_y &= \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=3} = \left. \frac{d(-3t^2 + 5)}{dt} \right|_{t=3} = -18 (m \cdot s^{-1}). \end{aligned}$$

3 s 时速度的大小

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} = [4^2 + (-18)^2]^{1/2} = 18.4 (m \cdot s^{-1}).$$

方向: 3 s 时速度跟 x 轴所成的角度

$$\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-18}{4} = -77^\circ.$$

$t=3$ s 的加速度

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -6 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}.$$

大小为 $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, 方向负 y .

(3) 两矢量垂直的条件是两矢量的点积为零:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = [4t\mathbf{i} + (-3t^2 + 5)\mathbf{j}] \cdot [4t\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}] = 16t - 6t(-3t^2 + 5) = -14t + 18t^3 = 0.$$

$$t = 0.88 \text{ s}.$$

1-4 一质点在半径为 R 的圆周上运动, 其速度与时间的关系为 $v=3t^3+2$ (SI), 求:

(1) t 时刻质点的切向加速度 a_τ 及法向加速度 a_n ;

(2) 从 $t=0$ 到 t 时刻质点通过的路程.

解题思路:

$$(1) a_\tau = \frac{dv}{dt}, a_n = \frac{v^2}{R};$$

$$(2) \text{运动学第二类问题, 已知速度求运动方程, } v = \frac{ds}{dt}, \int_0^t ds = \int_0^t v dt.$$

$$\text{解 } (1) a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^3+2) = 9t^2 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}, a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(3t^3+2)^2}{R} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}.$$

$$(2) s(t) = \int_0^t v dt = \int_0^t (3t^3+2) dt = \frac{3}{4}t^4 + 2t.$$

1-5 一质点沿半径为 R 的圆周运动, 运动方程为 $\theta=3+2t^2$ (SI). 求当切向加速度的大小为总加速度大小的一半时, θ 的值是多少?

解题思路 作出切向加速度、法向加速度、总加速度的矢量图,

如图 1.3-5 所示, 根据题意求解.

解 $\alpha=30^\circ$,

$$\tan \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad a_\tau = \frac{\sqrt{3}}{3} a_n,$$

$$a_\tau = R\beta, \quad a_n = R\omega^2,$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(3+2t^2) = 4t, \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = 4,$$

$$\text{所以 } R\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} R\omega^2, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} (4t)^2, \quad t^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\theta = 3 + 2t^2 = 3 + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3.87 \text{ (rad)}.$$

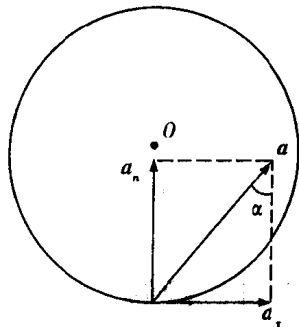


图 1.3-5

1-6 一艘正在沿直线行驶的汽船速度为 v_0 , 关闭发动机后, 由于阻力, 得到一个与船速方向相反、大小与船速平方成正比的加速度, 即 $a=-kv^2$, k 为常数. 求船速及船行驶的距离跟时间 t 的关系.

解题思路 本题为求解运动学中的第二类问题, 即已知加速度及初始条件, 求速度及运动方程, 用积分方法.

解

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad \frac{dv}{v^2} = -k dt,$$

两边积分

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -k dt,$$
$$-\left(\frac{1}{v}\right) \Big|_{v_0}^v = -kt, \quad \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -kt, \quad v = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}.$$

又根据

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v dt,$$

两边积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{1 + v_0 k t} dt, \quad x = \frac{1}{k} \ln(1 + v_0 k t) \Big|_0^t = \frac{1}{k} \ln(v_0 k t + 1).$$

注意:

(1) 对一维的直线运动, 在公式中可不用矢量计算, 而简单地用标量计算, 如 a, v, x 都用标量, 其方向用正、负表示, 正的表示方向沿 x 正方向, 负的表示沿 x 负方向.

(2) 积分上、下限的取法. 下限为初始条件, $t=0$ 时, $x=x_0=0, v=v_0$; 上限时间为 t , 速度为 v , 位置为 x .

1-7 一飞机相对于空气以恒定速度 V 沿正方形轨道飞行, 在无风天气其运动周期为 T , 若有恒定的风沿平行于正方形的一对边吹来, 风速为 $v=KV (K \ll 1)$. 求飞机沿原正方形(对地)飞行的周期的增加量.

解题思路 此题为相对运动问题. 当有风存在时, $v_{\text{机对地}} = v_{\text{机对风}} + v_{\text{风对地}}$, 分别求出每边机对地的速度, 再算出飞行一周的时间跟原来无风时的周期比较, 即可求得.

解 设正方形边长为 l , 无风时周期

$$T = \frac{4l}{V}.$$

有风时周期

$$T' = \frac{l}{V-KV} + \frac{l}{V+KV} + \frac{2l}{\sqrt{V^2 - (KV)^2}} = \frac{2l}{V} [(1-K^2)^{-1} + (1-K^2)^{-\frac{1}{2}}]$$
$$\approx \frac{2l}{V} (1+K^2 + 1 + \frac{1}{2}K^2) = \frac{4l}{V} + \frac{3K^2 l}{V},$$
$$\Delta T = T' - T \approx \frac{3K^2 l}{V}.$$

1.4 题解

1. 一质点在平面上作曲线运动, 其速率 v 与路程 S 的关系为 $v=5+3S^2$ (SI), 写出切向加速度以路程 S 来表示的表式.

解 根据 $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, 将 $v=5+3S^2$ 代入, 得

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(5+3S^2) = 6S \frac{dS}{dt} = 6Sv = 6S(5+3S^2) = 30S + 18S^3.$$

注意: S 是随时间而变的量, $\frac{d}{dt}(5+3S^2) = 6S \frac{dS}{dt}$. 如果 $\frac{d}{dt}(5+3S^2) = 6S$, 就错了.

2. 在离水面高为 h 的岸边, 有人用绳拉船靠岸. 当人以 v_0 的速率收绳, 求船在离岸边 x_0 处船的速度和加速度各为多少?

解 建立如图 1.4-2 所示的坐标系 xOy , 船在任一时刻的矢径

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x\mathbf{i} + h\mathbf{j}.$$

根据速度的定义,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i}.$$

因为 $r = \sqrt{x^2 + h^2}$, 又由题意可知

$$v_0 = -\frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt}(\sqrt{x^2 + h^2}) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \frac{dx}{dt},$$

所以船速

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -\sqrt{x^2 + h^2} \frac{v_0}{x}\mathbf{i}.$$

$x = x_0$ 时,

$$\mathbf{v} = -\sqrt{x_0^2 + h^2} \frac{v_0}{x_0}\mathbf{i}.$$

根据加速度定义,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sqrt{x^2 + h^2} \frac{v_0}{x}\mathbf{i}\right) = -\frac{h^2}{x^3}v_0^2\mathbf{i}.$$

$x = x_0$ 时,

$$\mathbf{a} = -\frac{h^2}{x_0^3}v_0^2\mathbf{i}.$$

3. 一小球沿斜面向上运动, 其运动方程为 $S = 3 + 27t - t^3$ (SI), 则小球运动到最高点的时刻是多少?

解 小球运动到最高点时 $v = 0$, 所以

$$v = \frac{dS}{dt} = 27 - 3t^2 = 0, \quad t = 3 \text{ s}.$$

4. 一质点的运动方程为

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u_0 t, & \textcircled{1} \\ \theta = \omega t. & \textcircled{2} \end{cases}$$

式中 r_0, u_0, ω 是正常数. 试求:

(1) 质点的运动轨迹;

(2) $t = 0, t = \frac{\pi}{\omega}$ 时刻质点的速度.

解 (提示: 本题是在极坐标情况下求解运动轨迹及速度表式.) 速度表式:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{r} + v_\theta \boldsymbol{\theta} = \frac{dr}{dt} \mathbf{r} + r \frac{d\theta}{dt} \boldsymbol{\theta}.$$

(1) 从②式得 $t = \frac{\theta}{\omega}$, 代入①式,

$$r = r_0 + \frac{u_0 \theta}{\omega}, \text{螺旋线}.$$

$$(2) v_r = \frac{dr}{dt} = u_0, v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = (r_0 + u_0 t) \omega, \mathbf{v} = u_0 \mathbf{r} + (r_0 + u_0 t) \omega \boldsymbol{\theta}.$$

$$t = 0, \quad \mathbf{v} = u_0 \mathbf{r} + r_0 \omega \boldsymbol{\theta};$$

$$t = \frac{\pi}{\omega}, \quad \mathbf{v} = u_0 \mathbf{r} + (r_0 + u_0 \frac{\pi}{\omega}) \omega \boldsymbol{\theta} = u_0 \mathbf{r} + (r_0 \omega + u_0 \pi) \boldsymbol{\theta}.$$

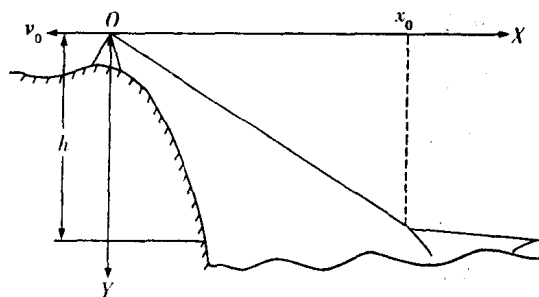


图 1.4-2

5. 设质点的运动方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$, 在计算质点的速度和加速度时: 第一种方法是, 先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 然后根据 $v=\frac{dr}{dt}$ 及 $a=\frac{d^2r}{dt^2}$ 而求得结果; 第二种方法是, 先计算速度和加速度的分量, 再合成求得结果, 即

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \text{ 及 } a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

你认为两种方法中哪一种正确?

解 第二种方法是正确的. 因为速度和加速度都是矢量, 根据定义,

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{d}{dt}(xi+yj)=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j;$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j\right)=\frac{d^2x}{dt^2}i+\frac{d^2y}{dt^2}j.$$

所以

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}; \quad a=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}.$$

第一种方法中, $v=\frac{dr}{dt}$ 及 $a=\frac{d^2r}{dt^2}$ 只考虑了矢径 r 的数值 r 随时间 t 的变化. 根据定义, 速度是描述位置变化快慢的大小及方向的物理量. 从图 1.4-5 中看质点从位置 1 经过 Δt 时间变化到位置 2, 位移 $\Delta r=r_2-r_1$, 速度 $v=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$, 而 Δr 是 r_2 的长度减去 r_1 的长度: $\Delta r=r_2-r_1$.

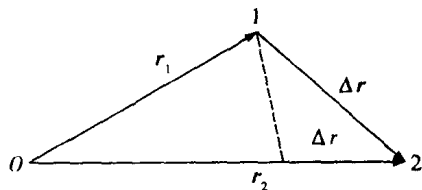


图 1.4-5

从图中看出 Δr 的长度 $|\Delta r|$ 也不等于 Δr , 所以 $\frac{dr}{dt}$ 也不是速度的大小. 只有在直线运动中, 速度的大小才等于 $\frac{dr}{dt}$. 对加速度的大小 $a \neq \frac{d^2r}{dt^2}$ 也可以用同样方法加以讨论.

6. 已知一质点沿 x 轴运动, 其加速度为 $a=A\sin\omega t$, 式中 A, ω 为常数, 且 $t=0$ 时, $x_0=0$, $v_0=0$. 求运动方程.

解 由 $a=\frac{dv}{dt}=A\sin\omega t$,

$$dv=A\sin\omega t dt,$$

两边积分得 $\int_0^v dv = \int_0^t A\sin\omega t dt = \left. \frac{-A}{\omega} \cos\omega t \right|_0^t = \frac{A}{\omega} (1 - \cos\omega t),$

$$v = \frac{A}{\omega} (1 - \cos\omega t).$$

由 $v = \frac{dx}{dt}, \quad vdt = dx,$

两边积分得 $\int_0^x dx = \int_0^t vdt = \int_0^t \frac{A}{\omega} (1 - \cos\omega t) dt,$

$$x = \frac{A}{\omega} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin\omega t \right).$$

7. 小球从某一高度 h 以速度 u 沿水平方向抛出, 下落到地面上, 发生碰撞后损失一部分能量. 已知竖直方向的分速度碰撞后与碰撞前之比为 $k(k < 1)$. 设水平方向没有摩擦, 因而水平

方向分速度大小不变. 试求从抛出小球到其停止跳跃之点的水平距离.

解 小球的运动轨迹如图 1.4-7 所示. 第一次碰撞前, 竖直方向的速度和运动的时间分别为

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

第一次碰撞后, 竖直方向的速度 $v_1 = kv_0 = k\sqrt{2gh}$, 以碰撞后起跳的瞬间作时间的起点, 竖直方向的位移 h_1

$= v_1 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$, 令 $h_1 = 0$, 则第一次碰撞到第二次碰撞的时间, 由 $v_1 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0$ 得出

$$t_1 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2k}{g} \sqrt{2gh} = 2k \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

同理得到第 n 次碰撞后, 竖直方向的速度为

$$v_n = k^n v_0 = k^n \sqrt{2gh},$$

第 n 次碰撞到第 $(n+1)$ 次碰撞的时间为

$$t_n = \frac{2v_n}{g} = 2k^n \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

故小球沿水平方向运动的总时间为

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + \cdots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}}(k + k^2 + \cdots + k^n + \cdots).$$

因为 $k < 1$, 括号内为递减的无穷几何级数之和, 所以

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \times \frac{k}{1-k} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1+k}{1-k} \right).$$

因而, 小球从抛出到它停止跳跃时, 水平距离为

$$L = ut = u \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(\frac{1+k}{1-k} \right).$$

8. 求证: 从原点在竖直平面内以相同的初速度 v_0 向各个方向投射出的物体, 它们的最高点位于同一椭圆上 (忽略空气阻力).

解 如图 1.4-8 所示, 设物体到达最高点的时间为 t_1 , 则

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

令最高点的坐标为 x_1, y_1 , 有

$$x_1 = v_0 \cos \alpha \cdot t_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

$$y_1 = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{v_0^2 (1 - \cos 2\alpha)}{4g},$$

所以 $\sin 2\alpha = \frac{2gx_1}{v_0^2}$; $\cos 2\alpha = 1 - \frac{4gy_1}{v_0^2}$.

将上两式两边平方求和, 得

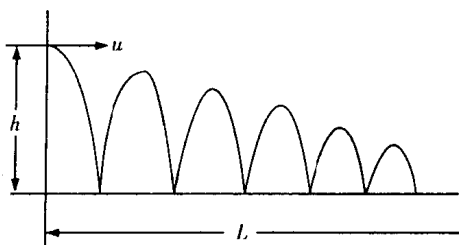


图 1.4-7

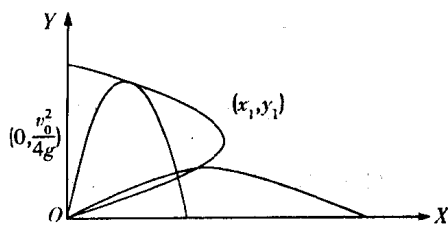


图 1.4-8