报考研究生复习丛书

YAN
JIU
SHENG

高等数学复习纲要

（下 册）

中国展望出版社

高等数学复习纲要

顾秉琏　曾华堂　洪鸿炳
张春炎　蒋和理　蔡凤生　编

（下　册）

中国展望出版社

一九八五年九月·北京

编 辑 说 明

《报考研究生复习丛书》是为了帮助广大青年复习有关课程，应考硕士研究生，约请有丰富教学经验的教师，根据部颁教学大纲和报考研究生的要求而编写的。力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生和社会青年的辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本丛书包括：《大学政治理论课纲要》、《大学英语复习指导》、《高等数学复习纲要》、《大学物理复习纲要》、《物理化学复习纲要》、《化工原理复习纲要》、《理论力学复习纲要》、《材料力学复习纲要》、《结构力学复习纲要》、《电工基础复习纲要》。

本套丛书由宋权、席庆义主编。

高等数学复习纲要(上、下册)

*

中国展望出版社 出版

(北京西城区太平桥大街4号)

南京京新印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本787×1092毫米1/32 21.625 印张

485.6千字 1985年9月 北京第1版

第1次印刷 1—20,000册

统一书号：7271·092 定价：3.96元

目　　录（下册）

第一章　线性代数

I　内容提要

（一）　n阶行列式

1．n阶行列式：定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

其中$A_{1j}, j=1,2,\cdots,n$，是由n阶行列式中去掉第一行及第j列而余下来的$n-1$阶行列式再乘以$(-1)^{1+j}$，并称A_{1j}是a_{ij}的**代数余子式**。a_{ij}的代数余子式类似定义。

2．n阶行列式的性质

性质一　行列互换，行列式不变。

这个性质表明了行列式中行、列地位的对称性，由此可见，行列式中有关行的性质对列也同样成立。

性质二　行列式中某行的公因子可以提出来。

由性质二可以推出：如果行列式中有一行为零，那么行列式为零。

性质三　如果行列式中某一行是两组数的和，那么这个

行列式就等于两个行列式之和。

性质四　对换行列式中两行的位置，行列式反号。

性质五　如果行列式中有两行成比例，那么行列式等于零。

性质六　把某一行的倍数加到另一行，行列式不变。

性质七　行列式的值等于它的某一行(列)与其代数余子式之积的和；行列式的某一行(列)与另一行(列)的代数余子式之积的和等于零。即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ji}=\begin{cases}D, & k=j,\\ 0, & k\neq j;\end{cases}\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ij}=\begin{cases}D, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}$$

3．克莱姆法则

如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式$D\neq0$，那么方程组有解，并且解是唯一的。

表示成：　$x_i=\dfrac{D_i}{D}$　$(i=1,2,\cdots,n)$

其中D是方程组的系数行列式；D_i是把D中第i列(即x_i的系数)的元素换成常数$b_i(i=1,2,\cdots,n)$所构成的行列式。

（二）矩　　阵

1．矩阵

(1) 定义：由$s\times n$个数排成的s行n列的表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

称为一个$s\times n$矩阵。(1) 中的数a_{ij} ($i=1,2,3\cdots s$; $j=1,2,3\cdots,n$)称为矩阵的元素，i称为行标，j称为列标。矩阵常用A，B，…，或者(a_{ij})，(b_{ij})，…或者A_{sn}，B_{sn}…，或者 $(a_{ij})_{s\times n}$，$(b_{ij})_{s\times n}$，…表示。

矩阵A的行数、列数皆为n时称A为n级**方阵**。

两矩阵的行、列数分别相等，并且对应元素都相等，就称这两矩阵相等。

(2) 矩阵的初等变换：是指对于矩阵施行下列三种变换

① 用一个非零数乘矩阵的一行(列)；

② 把矩阵某行(列)的k倍加到另一行(列)上去；

③ 互换矩阵中两行(列)的位置。

2. 矩阵的一些概念及运算

(1) 加减法　设$A=(a_{ij})$；$B=(b_{ij})$同行同列，则$A=(a_{ij}\pm b_{ij})_{s\times n}$，

(2) 零阵与负阵　元素都是零的矩阵称为零阵，记为$O_{s\times n}$或O；而$-A=(-a_{ij})$称为矩阵A的负矩阵。

(3) 矩阵的乘法　设$A=(a_{ij})_{sn}$，$B=(b_{ij})_{nm}$

令　$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，($i=1,2,\cdots,s$；$j=1,2,\cdots,m$)

则 $$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{sm} \end{pmatrix}=(c_{ij})_{sm}$$

称为A与B的乘积，记为$C=AB$或$(a_{ij})_{s\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times m}=(c_{ij})_{s\times m}$

(4) 单位矩阵

称 $$E_{n\times n}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ 为n级单位矩阵。记作E_n或E

(5) 矩阵的数量乘法 称$kA=k(a_{ij})=(ka_{ij})$为A与数量k的乘积。

(6) 转置矩阵 称 $$A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

为A的转置阵。或记为 $(a_{ij})'_{s\times n}=(a_{ji})_{n\times s}$

(7) 矩阵运算的一些规律

$A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$,

$A(BC)=(AB)C$, $A(B+C)=AB+AC$,

$(B+C)A=BA+CA$.

$(k+l)A=kA+lA$, $k(A+B)=kA+kB$,

$k(lA)=(kl)A$,

$1\cdot A=A$, $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

$(A')'=A$, $(A+B)'=A'+B'$, $(AB)'=B'A'$

$(kA)'=kA', A+O=O+A=A, A+(-A)=O,$
$E_sA_{sn}=A_{sn}E_n=A_{sn}$。

3．矩阵的等价

(1) 矩阵等价的定义：如果矩阵 B 可从矩阵 A 经过一系列初等变换而得到，则称**矩阵A与B是等价的**。等价矩阵具有反身性、对称性、传递性。

(2) 初等变换与初等矩阵：

定义 由单位矩阵经过一次初等变换而得到的矩阵称为**初等矩阵**，有三类初等矩阵

① 把 E 的 i 行与 j 行互换后，得初等阵 $P(i,j)$

② 用非零数 c 乘 E 的第 i 行，得初等阵 $P(i(c))$

③ 把 E 的第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，得初等阵 $P(i+j(k))$

同样对 E 进行三种列变换所得初等矩阵包括在上述三类之中。

定理 设 $A_{s\times n}$，对 A 施行一次初等行变换，就相当于在 A 的左边乘上一个相应的 s 级初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，就相当于在 A 的右边乘上一个相应的 n 级初等矩阵。

(3) 矩阵的标准形 称 $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$ 为**矩阵的标准形**。任一矩阵 A 都可以经过初等变换化为标准形，其中对角线上 1 的个数恰为矩阵 A 的秩数。

矩阵的秩是指矩阵中最大的不为零的行列式的阶数。

矩阵经初等变换后其秩不变，即初等变换前后的矩阵是等价的。

(4) 定理　下述五个条件等价

① 矩阵A与B等价；

② 存在初等矩阵　$P_1,P_2,\cdots,P_s$；$Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$，使得　$B=P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t$，

③ 存在可逆矩阵 P、Q，使$B=PAQ$（关于可逆阵的定义见4）

④ A与B的秩相等；

⑤ A与B的标准形相同。

4. 逆矩阵

(1) 定义　如果有方阵B使$AB=BA=E$，则称方阵A为可逆矩阵，称矩阵B为矩阵A的**逆矩阵**记作A^{-1}。

(2) 可逆矩阵具有下列性质：

$(A^{-1})^{-1}=A,(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；$(A')^{-1}=(A^{-1})'$；

$|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$　　　　（$|A|$为A的行列式）

(3) 矩阵可逆的条件：下列诸条件等价

① 矩阵A可逆；

② A非退化阵，即$|A|\neq 0$；

③ A的n个行（或列）向量线性无关；（参见(三)）

④ A可表示为一些初等矩阵的乘积；

⑤ A可经初等行变换化为单位阵；

(4) 逆矩阵的求法

方法一　用伴随矩阵A^*求逆：A_{ij}是a_{ij}的代数余子式，则

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

方法二　用初等行变换求逆

$$(AE)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(EA^{-1})$$

5．关于矩阵秩及行列式的定理

秩$(A+B)\leqslant$秩$(A)+$秩(B)

秩$(AB)\leqslant\min$[秩(A),秩(B)]

$|AB|=|A||B|$

当A可逆时，秩$(AB)=$秩(B)；秩$(CA)=$秩(C)

6．分块矩阵

把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，此种小矩阵称为矩阵的子块，这就是矩阵的分块。

（1）分块矩阵的加法：设A,B是同行同列矩阵，若分块方法相同，

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & A_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$$

其中A_{ij}，B_{ij}的行、列数皆相同，则$A+B=(A_{ij}+B_{ij})$

（2）分块矩阵的乘法：设$A_{s\times n}$，$B_{n\times m}$，如果A之列的分法与B之行的分法一致，则可进行乘法运算。即

$$
A=\begin{array}{c}
 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_l \end{array} \\
\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1l} \\
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2l} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A_{t1} & A_{t2} & \cdots & A_{tl}
\end{pmatrix}
\end{array},
\quad
B=\begin{array}{c}
 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\
B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\
\vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\
B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lr}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

其中 $s_1+s_2+\cdots+s_t=s$; $n_1+n_2+\cdots+n_l=n$;
$m_1+m_2+\cdots+m_r=m$。则

$$
AB=\begin{array}{c}
 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_t
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} \\
\begin{pmatrix}
C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\
C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
C_{t1} & C_{t2} & \cdots & C_{tr}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{l}A_{ik}B_{kj}\ (i=1,2,\cdots t;\ \ j=1,2,\cdots r)$

(3) 分块矩阵的转置：设

$$
A=\begin{pmatrix}
A_{11} & \cdots & A_{1n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
A_{m1} & \cdots & A_{mn}
\end{pmatrix}
\quad \text{则} \quad
A'=\begin{pmatrix}
A'_{11} & \cdots & A'_{m1} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
A'_{1n} & \cdots & A'_{mn}
\end{pmatrix}
$$

(4) 分块对角矩阵的逆：当A为n级矩阵，又是分块对角矩阵，即主对角线上有非零子方块阵，其余子块为零，

则有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$

7．几类特殊矩阵

(1) **数量矩阵**：设$A_{s\times n}$阵，E_i为i级单位阵，k为数，称kE为**数量矩阵**．它的运算性质如下：

若$A=A_{s\times n}$，则$kA=(kE_s)A=A(kE_n)$；

若$A=A_{n\times n}$，则$kA=(kE)A=A(kE)$；(可以交换)

$kE+lE=(k+l)E$；$(kE)(lE)=(kl)E$；

$(kE)^{-1}=k^{-1}E\quad(k\neq 0)$．

(2) 对角矩阵：称方阵$\begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{pmatrix}\equiv[a_1,a_2,\cdots,a_n]$

为**对角阵**，性质如下：

$[a_1,a_2,\cdots,a_n]+[b_1,b_2,\cdots,b_n]$

$=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]$

$[a_1,\cdots,a_n]\cdot[b_1,\cdots,b_n]=[a_1b_1,\cdots,a_nb_n]$

$k[a_1,\cdots,a_n]=[ka_1,\cdots,ka_n]$

当$a_i\neq 0,(i=1,2,3,\cdots,n)$时

$[a_1,\cdots,a_n]^{-1}=[a_1^{-1},\cdots,a_n^{-1}]$

(3) 上(下)三角矩阵：主对角线以下(上)的元素全为零的方阵称为上(下)**三角阵**．

(4) 对称矩阵：若$A=A'$，则称方阵A为**对称矩阵**，$(a_{ij}=a_{ji})$

(5) 反对称阵：若$A=-A'$，即$a_{ij}=-a_{ji}$称方阵A为**反对称阵**．

(6) 共轭方阵：设$A=(a_{ij})$方阵中的元素是复数，则称$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$为$A$的**共轭方阵**．

(7) 厄米特 (*Hermite*)方阵，若方阵A适合$A=\overline{A}'$，即适合 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$，则称A为厄米特方阵。

（三） 线性方程组

1. 线性方程组的定义及矩阵形式

称 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \tag{1}$$

为齐次线性方程组。

称 $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{cases} \tag{2}$$

为非齐次线性方程组。

若令 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

则 (1) 化为 $AX=0$， (2) 化为$AX=B$

2. 齐次线性方程组的解

(1) 解向量：若$x_1=c_1,\cdots,x_n=c_n$是线性方程组的解，则称$\alpha=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是线性方程组的解向量或解。

(2) 解的性质：若α，β是 (1) 的解向量，k_1，k_2是任意常数，则$k_1\alpha+k_2\beta$也是(1)的解向量。

(3) 基础解系：设$\eta_1,\cdots,\eta_t$是(1)的t个解向量，如果：(i) 由$\eta_1,\cdots,\eta_t$组成的分块列矩阵的秩为t；(ii) (1) 的

任何解向量都可用$\eta_1,\cdots\eta_t$线性表示，则称$\eta_1,\cdots,\eta_t$是(1)式的**基础解系**。

当A的秩为r时，(1)式的基础解系包含$n-r$个解向量。

(4) 解的结构：如果$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是(1)式的一个基础解系，则(1)式的全部解就是：$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$。其中$k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$是任意数。

如果秩$(A)=n$，(1)式只有零解；

如果秩$(A)=r<n$，(1)式有非零解，此时方程组中有$n-r$个自由未知量，有无穷多解，其一般解中有r个未知量由其余$n-r$个自由未知量线性表示；

如果$s=n$则(1)式有非零解的充要条件是：系数行列式等于零。

3．非齐次线性方程组的解

(1) **解的判别定理** (2)式有解的充要条件是：秩$(A)=$秩$(\overline{A})$，其中$\overline{A}$为A的增广矩阵。

如果秩$(A)=$秩$(\overline{A})=n$，则(2)式有唯一解。

如果秩$(A)=$秩$(\overline{A})=r<n$，则(2)式有$n-r$个自由未知量。

(2) 非齐次线性方程组解的结构

(1)式称为(2)式的导出组。

如果α,β是(2)的解，则$\alpha-\beta$是导出组(1)式的解；如果α是(2)式的解，γ是(1)式的解，则$\alpha+\gamma$是(2)式的解。

解的结构：如果γ_0是(2)式的一个解(称为特解)，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$是(1)式的基础解系，则(2)式的全部解就是$\gamma_0+k_1\eta_1++k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中$k_1,k_2,\cdots k_{n-r}$是任意数。

4．消元法

在具体解方程时，常常利用矩阵的行变换来解线性方程组（齐次的或非齐次的）。

（四） n维向量空间

1. 一些概念

定义1 n个数组成的有序数组$(a_1, a_2 \cdots, a_n)$称为一个n维向量，其中a_i称为向量的第i个分量。

当$n=2$，$n=3$时，即几何中的向量。

定义2 如果n维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$中$a_i=b_i (i=1, 2, \cdots, n)$，就称$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$。

定义3 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, \cdots, b_n)$，$k$为一个数，则定义：**加减法**$\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta}=(a_1 \pm b_1, \cdots, a_n \pm b_n)$，**数乘**$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$。

向量的加减法与数乘统称为向量的**线性运算**。

定义4 分量全为零的向量$(0, 0, \cdots, 0)$称为零向量，记作$\mathbf{0}$；向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$称为$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots a_n)$的负向量，记作$-\boldsymbol{\alpha}$

要注意，维数不同的零向量尽管都用“0”表示，但它们是不相同的。

2. 向量运算的基本规则

设$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$是同维向量，$k, l$是数，容易证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$；

(3) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$，$1 \cdot \boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；