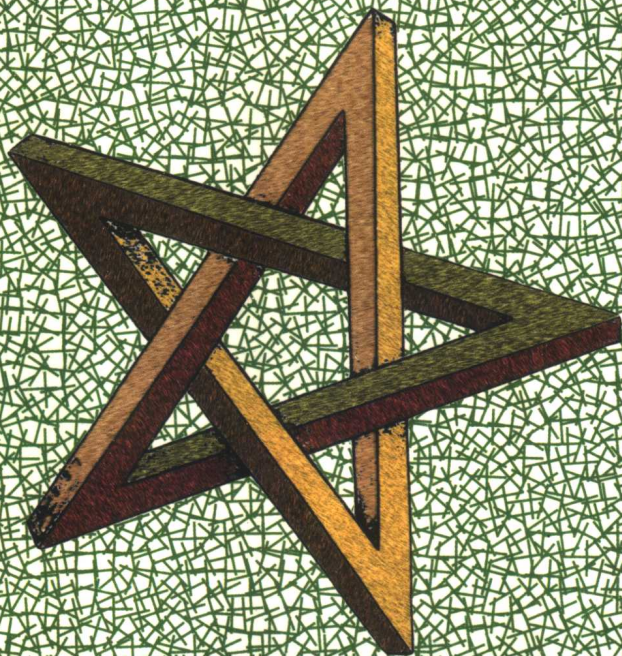


TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

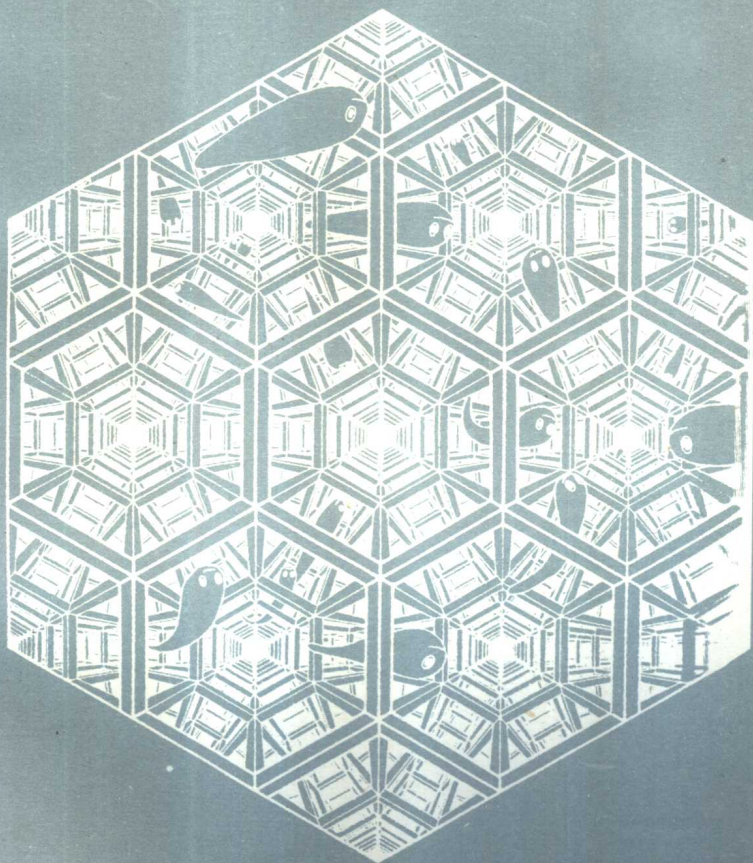
YILIAOZHICAI DE JIAOXING
HE QITA SHUXUE YULE

[美] 马丁·加德纳 著
胡乐士 译 齐民友 校
上海教育出版社

意料之外的绞刑 和其他数学娱乐

意料之外的绞刑 和其他数学娱乐

[美] 马丁·加德纳 著 胡乐士 译 齐民友 校 • 上海教育出版社



图书在版编目 (C I P) 数据

意料之外的绞刑和其他数学娱乐 / (美) 加德纳著;
胡乐士译. —上海: 上海教育出版社, 2003. 3

(通俗数学名著译丛 / 史树中主编)

ISBN 7-5320-8378-0

I. 意... II. ①加... ②胡... III. 数学—通俗读物
IV. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2003) 第014432号

Martin Gardner

**The Unexpected Hanging
And Other Mathematical
Diversions**

The University of Chicago Press

© 1991 by Martin Gardner

根据芝加哥大学出版社 1991 年版译出,

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

**意料之外的绞刑
和其他数学娱乐**

[美国] 马丁·加德纳 著

胡乐士 译 齐民友 校

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路 123 号)

(邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 上海新华印刷厂印刷

开本 850 × 1156 1/32 印张 9.25 插页 4 字数 225,000

2003 年 3 月第 1 版 2003 年 3 月第 1 次印刷

印数 1-5,100 本

ISBN 7-5320-8378-0/O·1 定价: (软精) 16.50 元

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,已阔步迈进了 21 世纪.

回顾过去的一个世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平

相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在外国已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多彩.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名

著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措。参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的。

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见。值得高兴的是，这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持，特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词，使我们深受鼓舞。到目前为止，这套丛书已出版了 13 种，印数大多逾万，有的已经是第四次印刷，这对编译者来说确是令人欣慰的信息。我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》的出版获得更大的成功。

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

2001 年 8 月

1991 年版序言

《意料之外的绞刑和其他数学娱乐》是我为《科学美国人》月刊所撰写的“数学游戏”专栏文章的第五本结集,这一栏目创办于1957年.这一系列的前两本集子《六边折叠形和其他数学娱乐》、《〈科学美国人〉数学难题和娱乐第二集》的芝加哥大学出版社的平装本迄今还能买到.

我尽我所能为各章的进展写了一个编后记,并在参考文献中新添了一百多条资料.

马丁·加德纳 [9]

目 录

译丛序言.....	1
1991 年版序言	1
第 1 章 意料之外的绞刑.....	1
第 2 章 纽结和波若米欧环	15
第 3 章 超越数 e	26
第 4 章 几何分割	36
第 5 章 漫谈赌博	46
第 6 章 四维空间的教堂	60
第 7 章 8 个小问题	72
第 8 章 火柴盒式的博弈机	87
第 9 章 谈螺线	102
第 10 章 旋转和反射镜像	114
第 11 章 单人跳棋	123

2 目录

第 12 章	平面国漫游记	140
第 13 章	魔术师年会记趣	153
第 14 章	除不除得尽?	168
第 15 章	9 个小问题	179
第 16 章	棋盘上谈数学	196
第 17 章	绳子把戏	210
第 18 章	定宽曲线	224
第 19 章	谈平面复生图形	235
第 20 章	37 个小问题	248
1991 年版编后记		258
参考文献		266

第 1 章

意料之外的绞刑

“最近出现了一个立意新颖而且理直气壮的悖论。”这是英国哲学杂志《心灵》^①1951 年 7 月份上史克利文先生^②那篇令人大伤脑筋的大作的第一句。史克利文的头衔是印第安纳大学的“科学逻辑”教授，他在这一方面的意见一向受人敬重。在学术期刊上已刊登了 20 余篇有关这一悖论的文章，这充分证实了这个悖论是强有力的。这些专文的作者们几乎全是有名望的哲学家。他们各持己见，以不同的论点辩论这个问题，希望得到共识。但是因为一直找不到大家都能接受的解释，所以这个悖论也一直流行着。

这个悖论最早由何人提出已无法考据。哈佛大学的逻辑学家蒯因先生^③曾在 1962 年 4 月份的《科学美国人》月刊^④讨论这个悖

① *Mind*.

② Michael Scriven.

③ W. V. Quine.

④ *Scientific American*.

论.他说早在1940年左右,这个悖论一直是靠口传而流行于世的.

【11】最常用的故事就是讲一个罪犯服绞刑前所经历的波折.

这个罪犯是在礼拜六被判绞刑的.“绞刑将在下周七天中的某一天中午十二时正举行,”法官对罪犯说,“但是只有在执行当天的早上通知你之后,你才会知道是在哪一天.”这位法官以言出必行而声名卓著.说完以上的话之后,罪犯便在律师的陪同之下回到牢房.一到只有他们两人在一起的时候,律师马上面露笑容,说道:“你看得出来没有?法官是无法执行绞刑的.”

“我没有看出来,”囚犯说.

“让我解释给你听.第一,下个星期六,也就是下周七天之中的最后一天,他们不能吊死你,因为,星期五的下午你仍然没有服刑,故而可以预期刑期将在星期六举行,也就是说还没有到星期六的早上,你已经预先知道了刑期.这和法官的判决不符.”

“对,”罪犯说.

“所以星期六这一天要被划掉,”律师继续说,“因此,星期五变成可以执行的最后一天.但是他们也不可以在星期五吊死你.因为到星期四时,离执行的日子只剩下两天,即星期五和星期六.既然星期六已经被划掉,成为不能执行的日子,所以执行非在星期五不可.如此,你又事先知道了执行的日子,这又和法官的判决不符.所以星期五也要被划掉.那么星期四就变成非执行不可的最后一天.但是你既然星期三下午还活着,这使得星期四执行也不符合法官的判决.因为你又事先知道执行将在星期四这最后的一天.”

“好!我看穿了,”囚犯说,精神也大为振奋,“依此类推,甚至星期三、星期二和星期一都要一一被划掉.这就只剩下明天.但是我现在就知道是明天,所以明天也不可以执行了.”

简单地来说,法官的判词似乎是自相驳斥.这判词的两部分在逻辑上来说确实不相矛盾,可是却无法付诸实行.奥康诺先生是

爱克斯特大学^①的哲学家，他就是从这个角度来看这个悖论的，他也是第一位用文字讨论这个问题的学者（见1948年7月份的《心灵》）。他的文章是用军队司令官发号施令的形式来讨论这个悖论的。这位司令官说下星期的某一天将举行一次甲级夜行军。所谓甲级，就是说只有在夜行军执行当晚的六点钟，参与的人才会知道夜行军即将举行。

“显而易见，”奥康诺写道，“根据如此宣布的规定来看，这次夜行军是无法执行的。”这就是说，执行是可以，但是会违背司令官所宣布的所谓“甲级”的规定。另外有两篇文章的作者也发表同样的看法。甚至鼎鼎大名的伽莫夫博士，在他与史登先生合写的《谜题数学》^②一书中也将这个悖论包括在内（故事的形式也是被判绞刑的罪犯的执刑经历）。

这个悖论如果只是到此为止，则正如奥康诺先生所说的“微不足道”了。但是史克利文先生早就提到这并不是一个微不足道的悖论。只不过前三位作者都忽视了问题的关键所在。为了剖析这一点，让我们再来谈谈回到牢房里去的罪犯。他认为律师所讲的逻辑听上去无懈可击，故而他是一定不会被执行绞刑的。因为如果执刑，执刑官会违背判决词中的规定。但是没有想到，星期四

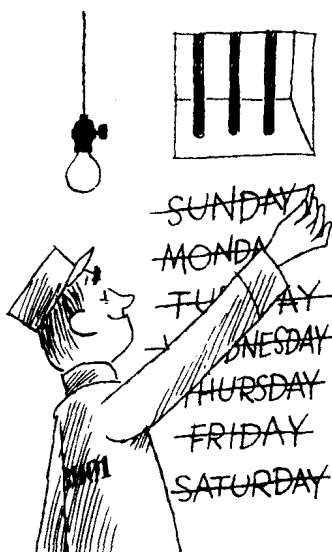


图1 囚犯将可能执刑的日子一一划掉

① Donald John O'Connor of University of Exeter.

② *Puzzle Math* by George Gamow and Marvin Stern.

的早晨,刽子手来到他的面前!这当然是在他的意料之外,让他大为吃惊.更令他不致置信的是,这一切运作全部符合判决词中【13】的一字一眼.“我认为这个悖论之所以引起众人的兴趣,正是由合情合理的逻辑却受到驳斥而起,”史克利文写道,“逻辑学家们按部就班地循理而辩,以往也是一向如此.但是现实却像一头猛兽,不顾一切地勇往直前推翻常规.”

为了让我们能更清楚地把握实际形势,也为了消除任何言语上的暧昧,我们将这个悖论再以两种不同的方式重新表述.这样做也是为了消除一些会混淆视听的题外枝节.例如法官临时变主意,甚至于囚犯在没有被执行刑之前便因病身亡等等.

第一个表述方法采自史克利文的专文,也可以称之为“意料之外的鸡蛋”悖论.

请假想你面前有十个空盒子.每一个都标明了由1到10之间的一个不同的号码.当你转过身去时,你的朋友放了一个鸡蛋在某一个盒子里.当你转过身来时,“你可以将盒子一个个打开,”你的朋友说,“你可以依照号码顺次打开.这些盒子中,你会意料之外地发现一个鸡蛋.”所谓“意料之外”,就是说在你没有打开盒子看之前,你是无法推测到鸡蛋是在这个你正要打开的盒子里.

假定你的朋友是言而有信的人,那么他的预测是否可以照章【14】实现呢?显然是不可能的.他当然不会把蛋放在第十个盒子里.因为在你一连打开了九个空盒子之后,你就可以预测到这个蛋会在那个还没有打开的盒子里.这就违反了“意料之外”的规定.所以,第十个盒子里是不可能没有蛋的.假如他愚蠢到竟然将蛋放在第九个盒子里的话,会有什么后果呢?你又一连发现了八个空盒子,只有第九个盒子和第十个盒子还没有打开.既然鸡蛋不会在第十个盒子里,所以一定是在第九个盒子里.打开一看,果然在内.这就是意料之内被找到的蛋.所以你朋友的话再度失真.因此第九个盒子里不能有蛋.从此你开始陷入了不可自拔的非现实的推理过程之

中.因为用同样的推理步骤,第八、第七、第六、第五、第四、第三、第二、第一,每个盒子都不能放蛋.当你全心全意以为每个盒子都是空盒子而一个个地打开时,第五个盒子里是什么?竟然是一个“意料之外”的鸡蛋!你朋友的预测居然实现了.你的推理过程错在什么地方?

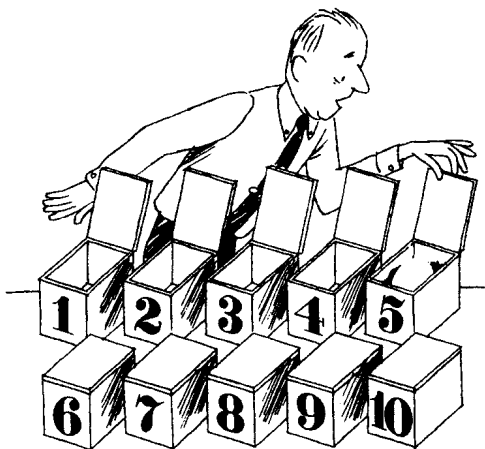


图2 意料之外的鸡蛋悖论

让我们用第二种表述方式来讨论这个悖论以显示其尖锐的矛盾性.这种表述方式我们姑且称之为“意料之外的黑桃”.你同你的朋友一同坐在玩牌的牌桌前,他把手中拿住的十三张黑桃先给你看看.洗一遍之后打开成扇形,不过牌面朝他自己.然后他将其中一张牌牌面朝下发到桌上,同时让你慢慢地依序从A开始到K叫出十三张牌的点数.如果你叫的点数和他发下来的牌的点数不同,他就说“不对”;如果叫对了,他就说“对了”.

“我跟你赌一千块钱,”他说,“在我还没有说‘对了’之前,你是无法推测到这张牌的点数的.”

你的朋友当然会尽其可能地不要输给你.他会不会把K放到桌上呢?似乎不可能.因为在你叫过其他的十二个点数之后,

就只剩下一个 K, 故而这时你可以极有信心地推测这张牌就是 K. 会不会是 Q 呢? 不会. 因为在你叫过 J 之后就只剩下 K 和 Q 两张. 既然刚刚说过 K 不可能, 所以一定是 Q. 你的正确推测会给你赢来一千块钱. 这样的推理可以重复使用在其他的牌上. 因此, 不论是什么牌, 你都可以成功地预测出它的点数. 这一套逻辑是 [15] 无懈可击的. 可是同样明显的是, 你眼睁睁地看着牌的背面, 但是一点都没有猜到其点数的头绪.

这个悖论即使先加以简化, 例如将七天改为两天, 或者将十个

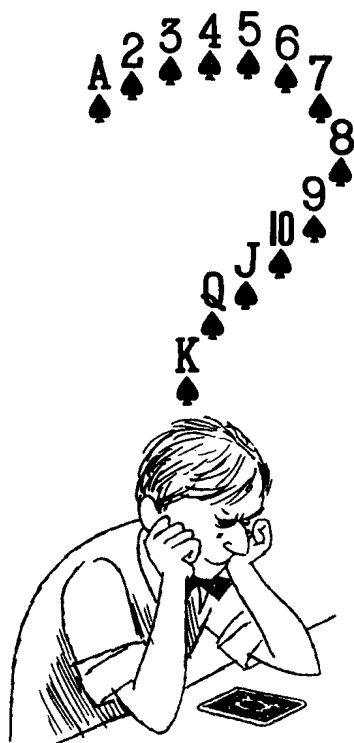


图3 意料之外的黑桃悖论

盒子减少为两个盒子, 十三张牌减少到两张, 仍然会有相当难以捉摸的情况存在. 假定你的朋友手中只有黑桃 A 和黑桃 2 两张牌. 如果他发下的是黑桃 2 的话, 你确实能够赢得赌注. 因为当你说出黑桃 A 并被其否定之后, 你便可以说: “依我的推测, 这张牌肯定是黑桃 2.” 这个推测所根据的是 “我面前的这张牌要么是黑桃 A, 要么是黑桃 2” 这一陈述的正确性. (前面以三种不同表述方式出现的同一悖论中, 大家都有一个假定: 那就是这罪犯一定会被处绞刑, 某一个盒子里一定有一个蛋, 或者你朋友手上的牌正是他所说的那些牌.) 因此, 你根据这些信息所作的推测是一定不会出错的, 而你赢得一千元的机会也是一定的.

假定你的朋友先放下黑桃 A, 你能在他未放牌之前便推测到

他会放下黑桃 A 吗？他一定不会放下黑桃 2 以免输掉一千元的赌注^[16]，所以放下来的一定是黑桃 A。你报了点数之后，他就说“对”。那么你是不是真的完全靠推理而赢了一千元赌注呢？

令人想不到的是，你并不能声称你完全是凭逻辑的推测而赢得这项赌注的。这就是这一个悖论的神秘之处。你以前做的推测所根据的先决条件是这两张牌是黑桃 A 和黑桃 2。这一次你的推测也是根据同一个先决条件，不过又加了另一个条件：假定你的朋友说的是真话。用实实在在的话说，这个条件就是他会尽其所能不付给你一千元。但是既然你将推测得到他会放下黑桃 A，所以不论他放下哪一张牌都是输。他也就没有充足的理由一定要先放下某一张牌！如果你领悟到这一点，你就会明白你的推测说第一张牌是黑桃 A 便没有什么把握了。当然猜黑桃 A 是比较聪明的，而且也很可能就是黑桃 A。但是要赢得让人服贴，你必须要用铁的逻辑来证明你的猜测。这却是办不到的。

事实上你已经陷入了自相矛盾的恶性循环的泥沼里。一开始，你假定你朋友所说的都会付诸实现。根据这个假定，你推测他放下的牌是黑桃 A。如果真的是黑桃 A，那他所讲的话就是假话了。可是，他的言词如果真的完全不能相信，那么你连如何去猜牌的点数都变得毫无根据了。而且如果你猜不出牌的点数，他讲的话就被证实是真话了。故而只好再从头开始继续在这个圈子里绕来绕去。在这一点上，情况颇类似于英国的大数学家朱尔丹^①在 1913 年提出的有关两张卡片的那个有名的悖论所形成的恶性循环（见图 4）。由于用这种方法来推测，真像狗咬自己的尾巴一样不会有任何结果，所以无法根据任何合乎逻辑的办法来推测桌上放的是哪张牌。当然你可以“猜”到桌上那张牌的点数。即使你很了解你的朋友，认为他放黑桃 A 的几率最大，可是如此的“猜测”，

① P. E. B. Jourdain.

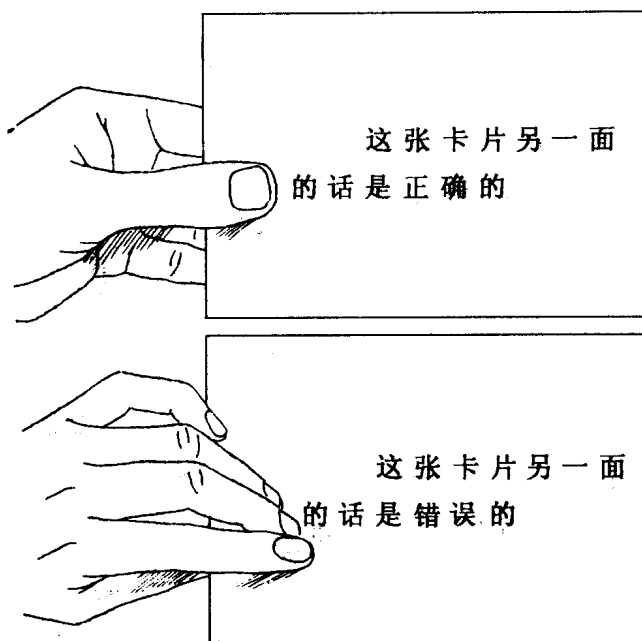


图4 朱尔丹的卡片悖论

是会被其他任何自重的逻辑学家所接受的。

- [17] 让我们再回到十个盒子的例子上来分析你的推理基础是如何的脆弱。首先，你“推测”鸡蛋会在第一个盒子里。但是第一个盒子是空的。于是你又“推测”这鸡蛋是在第二个盒子里，可是第二个盒子又是空的。接着又“推测”它在第三个盒子里。依此类推。（似乎盒子中的蛋在你正要打开盒子来看之前，就通过什么暗道逃到下一个盒子里去了似的。）最后，你终于在第八个盒子里看到被你“推测”到的蛋。这真的是你推测到的吗？你用来推测它在第八个盒子里的方法真是无懈可击吗？显然你不能这样说。如果你用正确的方法来推测，为什么会一连有七次错误呢？事实是，这枚鸡蛋可以在任何一个盒子里，包括最后一个盒子在内。

即使在你打开了九个空盒子之后，到底你能不能“推测”到蛋在