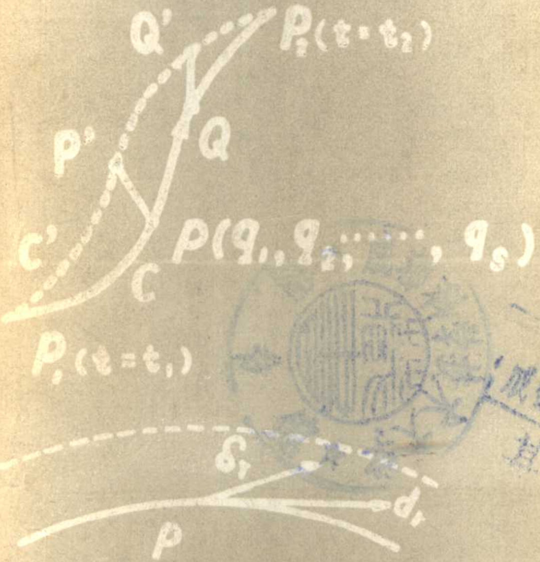
分析力学

谈开孚 主编



哈尔滨工业大学出版社

分析力学

谈开孚 主编

谈开孚 沙永海
刘锡录 刘国良 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 提 要

分析力学是理论力学的后续课程，是动力学部分的扩展和加深。

本书共分八章，系统地介绍了动力学的基本概念，着重讲述了拉格朗日方程、正则方程、力学的变分原理、哈密顿—雅可比方程、正则变换及非完整系统的拉格朗日方程。每章都有例题和练习题。

本书是为高等工科院校学生和研究生讲授用的教材。亦可供有关专业的工程技术人员参考。

分 析 力 学

谈开孚 主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 14.875 字数 334,000

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数 1—5,000

书号 13341·8 定价 2.35元

前　　言

分析力学所研究的对象和理论力学一样，仍然是宏观物质世界机械运动（远低于光速）的一般规律。一般说来，给分析力学下个比较完善而又和理论力学有严格区别的定义是相当困难的。为了使初学者对分析力学能有一个初步的了解，不妨把分析力学要讲的内容，作一番介绍。目前国内外所流行的分析力学教程以及专著等所讲授的主要内容，大致偏重于以下四个方面。

1. 系统介绍力学中若干主要的基本原理，即力学中最基本的规律。力学中许多基本定理、定律和方程等大都是基本原理数学演绎的结果。基本原理是不需要数学证明的，它是来自科学实验的经验总结。理论力学中的牛顿第二定律和能量守恒原理等就是属于基本原理。和理论力学不同的地方，在分析力学中所讲的那些基本原理不仅数量多些，内容深些，而且有不少还是属于变分性质的原理。

2. 以基本原理为基础，对它作数学演绎，从而推导出若干常用而又非常有效的力学方程，这是分析力学课程主要的内容之一。和理论力学的动力学微分方程相比，分析力学所讲的那些动力学方程（例如拉格朗日方程等），在使用中是更为方便和优越。

3. 分析力学所介绍的基本原理和基本方程等都是以概念高度抽象，数学形式优美而又对称的特点见称。为了深入认识这些规律性的东西，应对它们做一些必要的分析、研究和论述。这对我们开阔科学视野，锻炼思维方法、增强认识

客观世界规律性的能力是有益处的。分析力学在这一方面的论述也占了一定的篇幅。

4. 分析力学有时还把某一力学方程，或者某一动力学命题，如何从物理方面或从数学方面找出它的解（或部分解）作为课程的一个议题。这就是说，分析力学不仅局限于力学方程式或原理本身的讨论，而且对于某些可能的问题，还要从理论上阐述本命题解的存在性和找出解的办法。

远在三十、四十年代，分析力学还只是为理科和部分工科少数专业开设的课程。到了五十年代，随着近代航空、航天、控制等工程技术的发展，使得许多新的力学分支和其它一些非力学的技术科学同分析力学发生了跨边缘的联系（如：结构动力学、机电系统动力学、计算力学、自动控制理论、非线性力学等），都或多或少地渗透了分析力学的一些思想方法以及基本概念。所以说，从五十年代后期开始，分析力学就已经越出了经典力学的圈子，逐步走向为工程技术服务的大门了。这就是说，当前许多工程专业的学生懂一点分析力学知识是有必要的。

本书是为工科大学的本科学生和研究生讲授用的教材。对于一般工科专业的学生可按前五章的次序进行讲授，总学时数大致以50学时左右为限。对于工程力学专业的学生以及工科研究生则可适当压缩前五章的讲授内容，把后三章的内容作为补充材料，总共学时数以不多于64学时为宜。

本书的第一章（基本概念）、第二章（第二类拉格朗日方程）由刘锡录执笔；第三章（拉格朗日方程在其它方面的应用）、第五章（力学的变分原理）、第八章（非完整系统动力学方程）由沙永海执笔；第四章（哈密顿正则方程）由刘国良执笔，第六章（哈密顿——雅可比方程）、第七章

（正则变换）由谈开孚和刘国良执笔。全书由谈开孚统一修改定稿。

本书在编写的过程中洪敏谦同志提过不少改进的意见，在此谨表谢意。

由于编者业务水平所限，书中定有许多缺点和错误，请读者批评和指正。

编　者

目　录

为自由质点系统。所谓非自由质点系统，系指系统中的质点不能作完全自由的运动。非自由质点系统在主动力作用下，如果约束未受到破坏，系统只能在约束的允许条件下进行运动。例如，对单摆来说，在摆索未断的情况下（即约束未受到破坏），摆的集中质量只能沿着圆弧轨迹（或球轨迹）运动。在这个问题中，摆的约束即为不可伸长的绳索。

2. **约束方程**

对于非自由系统来说，约束对系统中各个质点的运动提供了限制条件。这些限制条件可以用数学方程把它们表示出来，我们把用数学方程所表示的约束关系称为**约束方程**。例如，单摆的约束方程就是以悬挂点为圆心（或球心）半径等于摆长的弧线（或球面）方程。下面举例说明如何建立系统的约束方程。

例 1—1 写出被限制在某一平面内运动的质点 M 的约束方程。

解 设xy平面是质点M的约束，即质点在运动过程中，始终不能脱离预先给定的xy平面，因此，其约束方程为

$$z = 0 \tag{1—1}$$

例 1—2 质点M_1和M_2由长为 l 的刚杆联系在一起，已知M_1，M_2两点被限制在某一平面内运动，试写出该系统的约束方程。

解 作直角坐标系统$oxyz$，（设xy平面为系统运动的平面）并设质点M_1，M_2的坐标分别为(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，则该系统的约束方程可写成为

$$\left\{\begin{aligned} &(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2\\ &z_1=0\\ &z_2=0\end{aligned}\right. \tag{1—2}$$

以上约束方程只与质点的坐标有关。

例 1—3 如图1—1所示，质点M可在直杆oM上滑动，而oM杆同时又以匀角速度ω绕o轴转动。试写出质点M的约束方程。

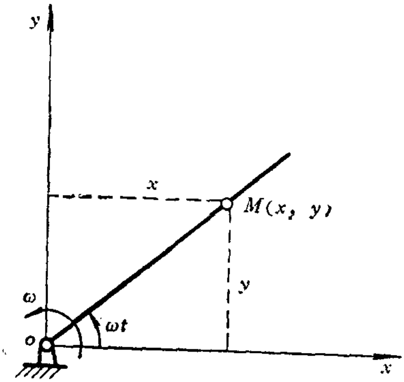


图 1—1

解 根据图1—1可见，不管质点沿杆作怎样的运动，它的坐标必须满足关系式

$$\left\{\begin{aligned} y &= x\text{tg}\omega t \\ z &= 0 \end{aligned}\right. \tag{1—3}$$

从上述方程中可见，在某些情况下，约束方程不仅与点的坐标有关，有时还与时间参数t有关（即约束方程中显含时间参数t）。

例 1—4 设车轮沿水平直线做纯滚动，如图 1—2 所示。试写出车轮的约束方程。

解 车轮是由无穷多个质点所组成，并且满足刚体的约束条件。我们知道，做平面运动的刚体，确定平面图形在平面中的位置需要三个坐标，即基点c在平面中的坐标x_c和

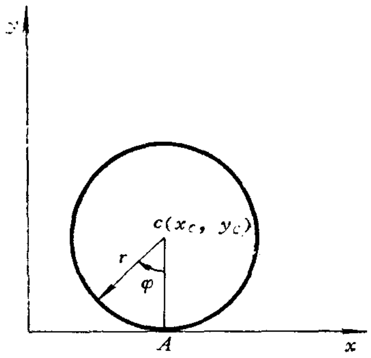


图 1—2

y_c，以及图形绕基点c的转角φ。至于刚体上其它各点的位置，则可以通过该点到基点c的距离和其转角φ求得。现在分析沿水平直线做纯滚动车轮的约束条件。既然做平面运动的刚体需要三个坐标确定其位置，我们就把此问题理解为一个具有三个自由度的“质点”，再研究这三个自由度的“质点”受到沿直线轨道做纯滚动的约束条件，这样就可以写出约束方程。直线轨道的约束条件为

$$y_c = r \tag{1—4}$$

车轮沿轨道做纯滚动的约束条件为车轮上和轨道相接触的点“A”处的速度为零，即

$$\dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0 \tag{1—5}$$

(1—4) 和 (1—5) 式，就是车轮沿直线轨道做纯滚动的约束方程。

从 (1—5) 式可见，约束方程有时还可能含有坐标的导数。这就是说，约束不仅局限于对系统的坐标进行限制，在某种情况下，约束还可能对坐标的一阶导数（甚至高阶导数）进行限制。

例 1—5 在例1—4中，若圆盘沿着水平面内某一曲线做铅垂滚动，如图1—3所示，试写出圆盘的约束方程。

解 作直角坐标系$oxyz$，设xy平面为水平面，圆盘在运

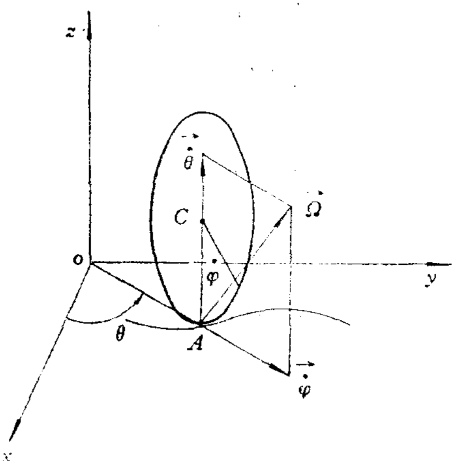


图 1—3

动过程中，由于盘面保持铅直，因此，圆盘中心 $c(x_c, y_c, z_c)$ 到水平面 xy 的距离保持常数，即有一个约束方程为

$$z_c = r \tag{1—6}$$

又因为圆盘做滚动，所以圆盘的瞬时转动轴恒通过圆盘和地面相接触的 A 点，如图1—3所示。而瞬时角速度 $\vec{\Omega}$ 有两个分量，其中一个分量为 $\vec{\dot\varphi}$，它的方向和圆盘平面垂直，且永远处于坐标平面 oxy 内，此分量表征圆盘滚动的快慢程度；另一个分量 $\vec{\dot\theta}$，它的方向沿着通过 A 点的直径，此分量表征圆盘滚动方向随时间的变化率。因此有以下关系式

$$\vec{\Omega} = \vec{\dot\varphi} + \vec{\dot\theta} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

$$= \dot\varphi \cos\theta \, \vec{i} + \dot\varphi \sin\theta \, \vec{j} + \dot\theta \, \vec{k}$$

由于圆盘做纯滚动，A 点为瞬时轴必定通过的一点，根据圆

盘上A点速度$\vec{v}_A=0$的条件，可得约束方程如下：

$$\vec{v}_A=\vec{v}_c+\vec{\Omega}\times\vec{r}_{cA}=0$$

或

$$\vec{v}_c-r\vec{\Omega}\times\vec{k}=0 \qquad (1—7)$$

上式中$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分别为沿x,y,z轴正向的单位矢量，r为圆盘的半径。

将（1—7）式写成投影形式，即

$$\begin{cases}\dot{x}_c=r\dot{\varphi}\sin\theta\\ \dot{y}_c=-r\dot{\varphi}\cos\theta\end{cases} \qquad (1—8)$$

和（1—5）式相比较，约束方程（1—8）式亦包含坐标的导数，所不同的只是（1—5）式可以写成可积分的形式，即

$$\frac{d}{dt}(x_c-R\varphi)=0$$

或

$$x_c=R\varphi+K$$

而（1—8）式，由于θ角也是一个变量，对于本题来说，它不能写成可积分的形式，即（1—8）式是不可积分的。

例 1—6 平面单摆如图1—4所示，试分析当单摆的OM线为无重刚杆或为柔软绳索时约束的性质。

解 当摆锤用无重刚杆悬挂时，约束方程为

$$x^2+y^2-l^2=0 \qquad (1—9)$$

当平面单摆的质点是由不可伸长的绳索悬挂时，那么，只有当绳索张紧时，质点才能做圆周运动。而当绳索松弛时，质点将在半径为l的圆内做自由运动。因此，此时质点的约束方程为

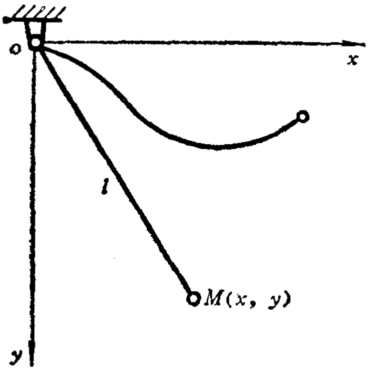


图 1—4

$$x^2+y^2-l^2\leqslant 0 \qquad (1—10)$$

式（1—10）说明，约束方程有时还可以用不等式表示。

以上所举各例，说明了如何根据题目所给定的几何条件和运动条件来建立系统的约束方程。此外，对于约束的性质以及约束方程与哪些参数有关，也做了一些分析。

3. 约束的分类

通过对上述许多例题的分析可知，约束的形式及其性质是多种多样的。对于同一个力学系统来说，如果所选取的约束不同，虽然作用于系统的主动力都一样，但反映在系统的运动形式上就可能不相同。因此，有必要对上述不同形式的约束进一步地给予分析，把具有相同性质的约束归并在一起，以便为今后解决具体问题，提供方便条件。这就是说，要把约束进行分类，分类的具体办法，可以从约束方程上找出共性，把具有相同性质的约束合在一起，归并为一类。下面对约束进行分类。

（1） 定常约束和非定常约束

根据约束是否与时间参数 t 有关，可把约束分为定常约束与非定常约束。所谓**定常约束**，就是指约束与时间参数 t 无关。这就是说，在这种约束的约束方程中，将不显含时间参数 t。例如约束方程(1—1)、(1—2)、(1—4)、(1—5)、(1—6)、(1—9) 等所表示的约束，都属于定常约束。定常约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z})=0 \qquad (1—11)$$

所谓**非定常约束**，就是指约束随着时间参数 t 而变化，反映在约束方程中，则是显含时间参数 t。例如约束方程(1—3) 所表示的约束，就是非定常约束。非定常约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)=0 \qquad (1—12)$$

对于一个质点来说，如果该质点受到一个定常约束的作用，一般可理解为该质点是在某一固定曲面上运动。如果质点受到的约束是非定常的，则表明该质点是在某一变曲面上运动（即曲面的形状或位置随时间在改变）。

(2) 几何约束和运动约束

根据约束方程中是否含有坐标的导数，约束可分为几何约束和运动约束。

所谓**几何约束**，系指约束只限制系统中各个质点在空间的位置，而不限制其运动速度以及高于速度的导数等，即在约束方程中不显含质点坐标的导数。例如约束方程(1—1)、(1—2)、(1—3)、(1—4)、(1—6)、(1—9) 等所表示的约束，就是几何约束。几何约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;t)=0 \qquad (1—13)$$

所谓**运动约束**，即约束对质点的运动参数（如速度、加

速度等）进行限制。这就是说在约束方程中，将显含质点坐标的导数，例如约束方程（1—5）、（1—8）所表示的约束，都是运动约束。运动约束的约束方程一般形式为

$$f(x,y,z;\dot{x},\dot{y},\dot{z};t)=0 \qquad (1—14)$$

在运动约束中，由于约束方程显含质点坐标的导数，因此，运动约束的约束方程是一个微分方程式（或微分方程组），如果该微分方程式（或组）是可积分的，那么，这种约束是属于**可积分的**，例如方程（1—5）。否则是不可积分的，例如方程（1—8）。因为在方程（1—8）中，θ 角也是一个变量，如果没有其它的附加方程，本方程就不能有解，因为变量的数目超过了方程的数目。而可积分的约束方程，通过积分可以转化为几何约束方程。

（3） 完整约束和非完整约束

几何约束和可积分为有限形式的运动约束（这两种约束的数学形式不显含质点坐标对时间的导数），统称为**完整约束**。例如约束方程（1—1）、（1—2）、（1—3）、（1—4）、（1—5）、（1—6）、（1—9）所表示的约束都属于完整约束。完整约束的约束方程的一般形式为

$$f_{\alpha}(x,y,z;t)=0 \quad (\alpha=1,2,\cdots,g) \qquad (1—15)$$

其中，g 代表完整约束的个数。一个力学系统，如果仅受到完整约束的作用，那么，这种系统称为**完整系统**。对于完整系统来说，在某一瞬时，系统在空间所占据的位置，必须满足完整约束的约束方程（1—15）式。

所谓**非完整约束**，就是指不可积分的运动约束。这些约束的约束方程在不考虑动力学微分方程的条件下是不可积分的，通过它找不到各个质点坐标之间的代数关系式。例如方