

Dynamics in Engineering Structures

工程结构动力学

〔捷〕弗·柯劳塞克 著

刘光栋 李家宝 罗汉泉 译

王 磊 校

人民交通出版社

工 程 结 构 动 力 学

〔捷〕 弗·柯劳塞克 著

刘光栋 李家宝 罗汉泉 译

王 磊 校

人 民 交 通 出 版 社

1980年·北京

内 容 提 要

本书是根据捷克斯洛伐克学者费拉基米尔·柯劳塞克博士所著的《工程结构动力学》一书的英译版本(1973)译出的。主要介绍如何运用角变位移法分析杆系结构的动力性能,并结合实际结构介绍了许多连续梁、桁架桥和拱桥的动力分析实例,列举出一些有关桁架和拱桥的实验数据,同时对于平面刚架、变截面刚架以及空间环状对称结构计算也作了详细论述。书后还附了有实用价值的频率函数的数值表。

本书可供从事公路桥梁、铁路桥梁、工业与民用建筑方面的结构设计、科研技术人员以及有关高等院校教师、研究生学习参考。

工程结构动力学 Vladimir Koloušek Dynamics in Engineering Structures

Butterworth & CO LTD, 88 KINGSWAY, LONDON, 1973

本书根据英国伦敦 Butterworth 有限公司1973年出版的
原著英译版本译出

工程结构动力学

[捷]弗·柯劳塞克 著

刘光株 李家宝 罗汉泉 译

王 磊 校

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张: 27.25 字数: 670 千

1980年10月 第1版

1980年10月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—5,300 册 定价: 3.50 元

译校者序

《工程结构动力学》一书是捷克斯洛伐克学者弗拉基米尔·柯劳塞克博士的名著。本书是根据原著的英译本(1973年版)译出的。

全书共有十章，内容十分丰富。书中除详细地介绍了杆系结构的动力分析方法外，还给出了许多有关桁架桥和拱桥的试验数据。第十章为附录，列出了有实用价值的频率函数的数值表。本书取材很广，能较好地适应多方面读者的需要。它不仅介绍了许多连续梁、桁架桥和拱桥的动力分析实例，而且对于平面刚架、变截面刚架以及空间环状对称结构等的计算也作了细致的叙述。因此，它对于高等学校教师、研究生以及交通、铁路、工业与民用建筑方面的设计人员都有一定的参考价值。

在动力分析方面，本书的重点是介绍运用角变位移法(The Slope Deflection Method)分析杆系结构的动力性能。我国许多工程技术人员对于应用角变位移法分析静力问题都是极为熟悉的，因此，掌握全书的分析方法及技巧并用于解决实际问题，对这些同志来说并不是很困难的事情。

在翻译过程中，我们对所发现的原书中的错漏之处已作了更正，对其中的一些差错和不妥之处作了附注。为便于用词的统一，本书中的技术名词的译名主要是参照有关力学书籍、手册和词典，个别则按照习惯用法。

由于时间匆促，加之译校者水平有限，译文中难免会有不少错误缺点，热诚欢迎读者批评指正。

译校者

一九七九年元月

序

在结构设计方面,要求工程专业人员能处理日益复杂的问题。现代土木工程结构需要跨越比以往更大的距离而且又不超出所规定的经济范围。按照后一条件要求,这就需要采用对动力效应非常敏感的细长型结构。在这类结构中,由于行驶于结构上的车辆速度日益增大,因此,期望它们在使用期间所要承受的动力荷载不断增长,连续不停的繁重运输加剧了地基的振动,以及结构上的机器的动力效应等等因素的影响,使有些结构受力更加恶化。对于这类结构,仅作静力分析已不再能确保它们的安全,因而包括动力分析在内的全面计算便提到议事日程上来了。

作者在行使设计工程师的职责时,首先是在设计风动力荷载起重要作用的天线塔结构中,接触到某些重要的动力学问题。随后作者对由不同材料(特别是钢、钢筋混凝土和预应力钢筋混凝土)建造的各种类型铁路桥的动力性能进行全面的试验研究,因而了解到这类问题更多的侧面。后来,又从事于各种机器基础的设计,安装有机器的建筑物的设计和鉴定,以及对结构动力学各种各样问题的研究。本书就是作者在这个领域里所作的理论研究和数学经验的总结。

在作者自己的经历中,所遇到的许多实际问题,可以用一般的结构动力学方法解决,但是,也有许多的问题,需要提出新的解决方法或者对已有的方法加以改进。这后一类问题构成了本书第二~十章的内容,而第一章只是对结构动力学的主要问题作一般性的介绍。

作者具有广泛的工业实践经验,并注意结合解决实际问题来开展理论研究。全书广泛地引用实例,以便使从事实际工作的工程师和学生了解理论的应用。参照这些实例,就可用适当的方法去解决自己的特殊问题。

本书所提出的分析方法,对于简单的问题采用列表的方式,而对于较为冗长的计算,则采用能容易地扩展为适合于数字电子计算机计算的形式。书中所附的一套汇总表和频率函数数值表更增强了本书的实用性。

在准备编写本书时,作者得到了他的几个同事的帮助,在此表示衷心感谢。J. Vaněk 帮助作者计算了例题 1.1。§4.1.1 是 Z. Němeček 和 P. Řeřicha 的研究成果,他们在写作期间参加了作者的动力学问题研究班。例题 4.3 和 5.9 是由 J. Šejnoha 解答的。§6.2 是由作者和 I. Babuška (科学博士) 合作准备的。

前 言

本书并不期望包括工程结构动力学的整个广阔领域，仅仅涉及到作者作为一个设计工程师和研究科学家在实践中所遇到的本学科的某些课题。本书分析的主要对象是一些结构物，其中包括等截面和变截面连续梁、二维和三维的刚架结构，以及承受移动荷载的各类桥梁。对于阻尼、静态轴力和其它效应给予了特别的注意。

本书第一章具有导言的性质，复习了对解算有限次自由度问题已被证明是最为有效的几种分析方法。对称、反对称和环状对称的问题得到专门的论述。

第二章论述等截面直杆的振动问题。由于引入了以符号 $F_i(\lambda)$ 和 $\Phi_i(\lambda)$ 表示的频率函数，使杆端力和杆端弯矩的计算、固有振型的标准化和其它相关量的确定大为简化。

第三章转入分析由棱柱形杆件组成的二维和三维刚架结构。由作者推演的角变位移法的应用，是分析问题的基础。随后讨论了将频率函数应用于其它方法（例如能量法）的可能性和优点。本章所概述的方法对于工业建筑物、桅杆和塔等等的振动分析都是很有用的。

第四章的主题是非棱柱形杆、曲杆和由这两类杆件所构成的体系。在非棱柱形直杆的直接解之后，推导了具有两个参数的频率函数 $F(\lambda_g, \lambda_h)$ ，并应用它们来分析杆端力。由于直接方法十分复杂，作者提出了两个近似方法：角变位移法和简化角变位移法，并证明这两种方法对于由直杆组成的体系和对于由平面或空间曲杆组成的体系都是同样适用的。在本章所讨论的另一重要方法是分离质点法。大跨度桥梁和结构是这类体系的实例。

第五章研究三维轴对称体系和具有重复构件的二维体系。这两类体系的理论解在形式上是相似的。由于标准化和预制的优点，具有重复构件的体系日渐流行起来。构件的重复性使得制造过程大为简化，动力分析也同样得到好处。

第六章涉及到阻尼振动的某些问题。其中第一节按通常假定（即阻尼与运动速度成正比）对刚架体系的阻尼振动进行了分析。在解答中应用了考虑阻尼影响的广义角变位移法和广义频率函数。第二节对阻尼振动的性质作出了透彻的分析，并系统地阐述了这个现象的更一般的理论。

第七章研究移动荷载的动力效应，并把注意力集中于铁路桥梁。对于有连续主桁梁的钢桥和钢筋混凝土拱桥的振动作了详细的论述。理论解以数值例题作了补充说明。在例题中把动力分析的结果与在实际结构上测定到的试验资料进行了比较。比较结果表明，对于连续钢桥，两种结果非常一致。对于钢筋混凝土拱桥，试验结果展示出新的论据，作者已将其结合到他的理论方法之中。

第八章转向某些次效应，例如轴向力、剪切变形和转动惯量的次效应。以牵缆式桅杆的振动为例，作者说明轴向力主要是对细长型结构的自由振动的频率和振型有影响。另一方面，剪切变形和惯性力的力矩在有笨重构件（例如大能量机器的构架基础）的体系的振动中发生作用。两参数频率函数 $F(a, d)$ 再次用来简化解答。

第九章指出了作者推演的频率函数若干进一步的应用。介绍了运用频率函数的两类示例性的动力学问题，它们分别研究单个板和连续板，以及对梁的冲击效应的分析。

第十章附录，列出了有助于实际计算的汇总表和频率函数的数值表。

符号表示法

(A) 符号

a	距离; 长度; 荷载作用点的横坐标 $x=a$
a	由方程8.9, 8.49或9.48确定的因数
$\bar{a}$	由方程8.14或9.54确定的因数
a, b, c, d	系数; 常数
b	矩形横截面的宽度
b	表示阻尼的下标
c	速度
d	由方程8.10, 8.50或9.49确定的因数
$\bar{d}$	由方程8.15或9.55确定的因数
e	自然对数制的底
f	频率
$f_0, f_{(i)}$	固有频率, 第 i 个振型的固有频率
g	重力加速度
g, h	用来表示体系上的点的字母
h	高度; 梁或板截面的深度
h	环状对称体系的结点数
i	$\sqrt{(-1)}$ (即 $\sqrt{-1}$)
i, j, k	下标; 整数——表示点的排列次序, 级数项, 固有频率等
k	系数; 常数
l	杆长; 跨度
m	集中质量
n	整数; 常数; 每秒钟的转数
$p(x, t)$	随 x 和 t 而变化的连续荷载
$p(x)$	当 $\sin \omega t = 1$ 时由 $p(x, t) = p(x) \sin \omega t$ 所确定的荷载幅值
p	均布荷载
$p_{(i)}$	振动在第 i 个振型 (振型分析) 时的荷载特征
p	力的作用点; 表示某个点的字母
q_1, q_2	广义座标
$q_{(i)}$	第 i 个振型的主广义座标
r	整数; 半径; 回转半径; 位移
$r(t, \tau)$	松弛曲线
r	位移向量
r, s	分别表示反对称和正对称的位移分量

r_j, s_j	表示环状对称体系位移的级数中的系数
s	表示某个点的字母; 点的横座标; 中心; 重心
Δs	曲杆单元的长度
t	时间
u, v, w	分别为沿 X, Y, Z 方向的位移
$u_{(j)}(x)$	体系在第 j 个振型中点 x 的位移幅值
x, y, z	座标
$^1y_k, ^2y_k$	在点 k 的位移 y 的逐次近似值
A	代数余子式
$A(t)$	包络曲线
A, B, C, D	常数; 系数
A, B	矩阵; 算子
C	弹性常数
E	拉、压弹性模量
E	单位矩阵
F	函数
$F(\lambda)$	频率函数
G	重量; 剪切模量
H	板的圆柱刚度
J	横截面的惯性矩
I	转动惯量
I	恒等算子
$K, \bar{K}$	系数; 常数
K	绕 X 轴的力矩
$\mathcal{K}$	绕 X 轴的外力矩的分量
L	损耗的能量; 滞后回线的面积
L	绕 Y 轴的力矩
$\mathcal{L}$	绕 Y 轴的外力矩的分量
M	力矩; 绕 Z 轴的力矩
$\mathcal{M}$	绕 Z 轴的外力矩的分量
N	法向力; 轴向力; 每秒钟的转数
P	力; 离心力
P	简谐荷载 $P(t) = P \sin \omega t$ 的幅值 (当 $\sin \omega t = 1$ 时)
Q	桥的总重量
R	随时间而变化的力 $R(t) = R \sin \omega t$ 的幅值
R_j, S_j	在环状对称体系情况下表示荷载级数的系数
S	横截面面积
T	周期
$T(x, t)$	截面 x 在时间 t 时的剪力
$U_{(d)}$	梁受到冲击后质点的法向位移

V	势能
$V_{i(j)}$ $V_{i(j)}(x)$	{ 自由振动时的法向位移分量
X, Y, Z	
$X_i(x)$	函数
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$	作用在刚架某一结点上的外荷载沿 X, Y, Z 方向的分量
α	由方程 1.109 或 8.51 确定的因数
$\bar{\alpha}$	由方程 1.168 确定的因数
α, β, γ	角度
β	由方程 6.39 确定的阻尼常数
β, γ	用于方程 4.12, 4.13 的变量
γ	由方程 8.11 和 10.1 确定的因数
δ	由方程 10.6 确定的因数
δ	阻尼的对数递减量
δ_{ik}	柔性系数, 即由于作用在点 i 的单位静力荷载在点 k 引起的位移
ε	单位正应变
ε	系数的比值
$\varepsilon, \bar{\varepsilon}$	用于方程 7.11 的因数
ε	方程 8.70 中楼层或节间的角位移
ζ	绕 Z 轴的转角
η	绕 Y 轴的转角
θ	由方程 2.75 确定的因数
κ	系数; 阻尼振动每一循环损耗的能量总数
κ	屈曲系数; 抵抗屈曲的安全因数
λ	由方程 2.23 确定的因数
μ	单位长度或单位面积的质量
ν	泊松比, $\nu < 1$
ξ	方程 4.9 中的变量
ξ	绕 X 轴的转角
ρ	密度; 距离
σ	单位面积上的力
τ	时间
φ	相位差
χ	每单位长度的转动惯量(扭转振动)
ψ	由方程 2.64 确定的参数
ψ	方程 6.67 中的阻尼因数
ω	角速度; 角频率或圆频率(简称频率)
$\omega_{(j)}, \omega_0$	自由振动的圆频率
ω_b	阻尼的圆频率
ω_c	阻尼自由振动的圆频率

$\Gamma(x), \Gamma(\delta)$ 屈曲函数

Δ 差分, 行列式

$\Theta = \frac{2\pi k}{T}$ (当 $k \rightarrow \infty, T \rightarrow \infty$ 时) (方程 6.93)

$\Lambda, \bar{\Lambda}$ 由方程 6.8 确定的参数

Φ 角度

$\Phi(\lambda)$ 频率函数

$\Psi, \bar{\Psi}$ 由方程 6.22 确定的因数

Ω 移动简谐荷载的圆频率

(B) 点的座标和位移

本书自始至终采用了笛卡儿直角座标的右手法则, Y 轴的正方向向下 (在板中 Z 轴的正方向向下)。一个点的位置由它的三个座标 x, y, z 确定。在给定的时间间隔, 点的位置变化由 $u(t), v(t), w(t)$ 表示。对于位移, 力, 转角和力矩的方向参见图 3-19。

(C) 变量

位移和力不仅随时间而变化而且随所考虑的点的位置而变化。在有限次自由度的集中质量体系, 位移和力分别以 $v_i(t)$ 和 $P_i(t)$ 表示, 其中 i 是按顺序排列的有关点的号码。在连续质量体系, 位移和荷载对于位置都是连续的, 其位移和荷载等量值以 $v(x, t)$ 和 $P(x, t)$ 等表示。各量值对位移和时间的函数依赖关系总是要完整地写出。当不加指明时, 则意味着各量值都是常数。

简谐运动和简谐力写作

$$v(x, t) = v(x) \sin \omega t$$

$$P(t) = P \sin \omega t$$

式中 $v(x)$ 和 P 表示幅值, 即是说, 这些量不随时间而变化。如写成

$$v(x, t) = v(x, t = \text{常数}) \sin \omega t$$

或

$$v(x, t) = v(x)_{\max} \sin \omega t$$

将更为正确, 但也更为复杂。

作者希望符号的简明将不致引起错误的解释,

对时间的导数, 以在各自的符号上面加一圆点表示之。于是 $\frac{dv(x, t)}{dt} = \dot{v}(x, t)$ 为截面 x

在时刻 t 沿 Y 方向的速度。类似地, $\ddot{u}(t) = \frac{[d^2 u_i(t)]}{dt^2}$ 是点 i 在 X 方向的加速度。对 x 的导

数, 用在符号右上角加撇来标注, 例如 $v''(x) = \frac{[d^2 v(x)]}{dx^2}$, 等等。

(D) 矩阵和向量

矩阵和向量用粗体字表示, 或者用包含一般项的方括弧 $[\delta_{ik}]$ 来表示。在第六章第二节中也用粗体字表示算子。

(E) 下标

所用下标的含义在正文中说明。为了将自由振动的频率和振型的下标同其它按顺序排列的号码 (例如表示体系上的点的号码) 区分开来, 我们将前者写在圆括弧内。例如, $f_{(2)}$ 表示第二个固有频率, 而 $v_{3(1)}$ 则表示自由振动在第一固有振型中点 3 的位移。然而, 固有频率—

一般是写作 f 。

(F) 正负号

当位移分量和力的分量沿着各正向座标轴作用时，则它们是正的。当在各轴的正向观察转角分量和力矩分量时，如果它们是顺时针转动，则为正。用角变位移法求解刚架体系时，这一规则也用来确定杆端弯矩和杆端力的正负符号。然而，对于内部应力分量，即弯矩和剪力的正负符号，这一规则不适用。这些内部应力分量总是成对作用的，它们的符号系统是按照与弹性理论相同的方式建立的，其正方向如图0-1所示。

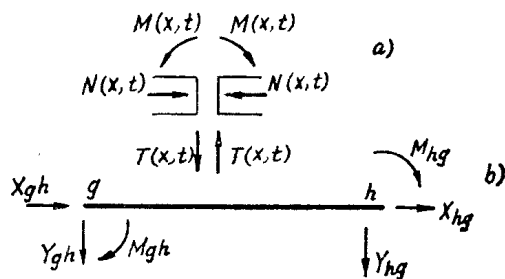


图0-1 力和弯矩的正方向 a)内力分量：弯矩，轴力和剪力；b)杆端力

(G) 采用的单位制

在数值计算中采用了力—长度—时间的单位制，就是说，力的单位是吨(力)(M_p)，1吨(力)的力在数值上等于质量为1000公斤的物体在标准重力场的重量，即1吨(力)=9810牛顿(N)，长度的单位是米(m)，时间的单位是秒(s)。

目 录

序

前言

符号表示法	1
第一章 多自由度体系	1
§1.1 引论	1
§1.2 影响系数法(Method of influence coefficients)	2
§1.3 弹性系数法(Method of elasticity coefficients)	12
§1.4 在几个方向振动的体系	20
§1.5 体系的对称和环状对称	22
§1.6 近似法	37
第二章 质量均匀分布的棱柱形杆件	39
§2.1 影响系数法: 运动的积分方程	39
§2.2 均质梁横向自由振动的微分方程	40
§2.3 均质梁横向自由振动的微分方程解答	41
§2.4 横向振动杆件的杆端弯矩和杆端力	43
§2.5 纵向振动	47
§2.6 扭转振动	49
§2.7 在外部简谐荷载作用下棱柱形杆件的横向振动	50
§2.8 频率函数	51
第三章 棱柱形杆件组成的刚架体系	56
§3.1 互等定理应用于质量连续分布的体系	56
§3.2 用角变位移法分析刚架体系	57
§3.3 简化解法	73
§3.4 能量法	78
§3.5 振型分析	82
§3.6 三维刚架体系	86
第四章 非棱柱形杆件的体系	90
§4.1 变截面直杆	90
§4.2 平面曲杆体系	107
§4.3 空间曲杆体系	115
第五章 环状对称体系。具有重复构件的体系	119
§5.1 三维环状对称体系	119
§5.2 具有重复构件的连续体系	133
第六章 阻尼振动的若干问题	175

§6.1 刚架体系的阻尼振动.....	175
§6.2 更一般的阻尼理论.....	189
第七章 移动荷载.....	204
§7.1 引论.....	204
§7.2 具有等截面主梁的钢桥的动力效应.....	204
§7.3 钢筋混凝土拱桥的动力效应.....	221
第八章 次效应.....	234
§8.1 剪切变形和转动惯量对横向振动的影响.....	234
§8.2 静轴向力对横向振动的影响.....	245
第九章 频率函数 $F(a, d)$ 的其它应用.....	260
§9.1 横向冲击.....	260
§9.2 平板的横向振动.....	265
第十章 附录.....	271
§10.1 杆端弯矩和杆端力汇总表.....	271
§10.2 频率函数数值表.....	290
参考文献.....	418

第一章 多自由度体系

§1.1 引 论

Betti 互等定理指出：若一弹性体受到两组荷载 A 、 B 的作用，当其维持平衡时，并且产生的位移分别为 a 和 b ，则由第一组外力 A 在第二组位移 b 上所作之功等于第二组外力 B 在第一组位移 a 上所作之功。运用将惯性力加到外部荷载上去的方法，该定理可推广适用于运动或振动状态的物体。按 Maxwell 提出的方式，互等定理采用了结构理论中广泛应用的影响系数的形式。

描述 n 次自由度体系自由振动的方程组，可将互等定理对该体系的两个状态相继运用 n 次而得到。其中一状态总是实际运动状态，可用位移 $r_i(t)$ 、外力 $R_i(t)$ 以及惯性力 $-m_i \ddot{r}_i(t)$ 来表示其特征；而另一状态则是任意虚拟的已知位移及其相应力系的“辅助”状态。后者既可为静力变形状态，也可可为运动的瞬时状态。图 1-1 说明了这个概念。将互等定理应用于状态 R 与 a ，

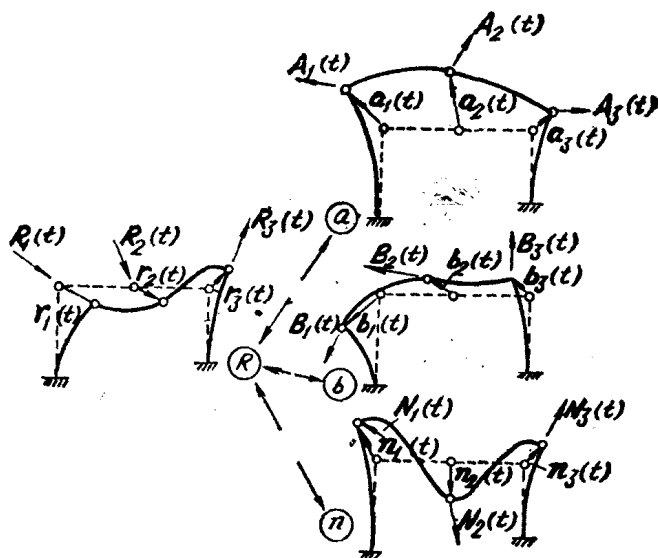


图1-1 运动方程的推导

Ⓐ-实际运动状态；Ⓐ、Ⓑ、Ⓒ-辅助状态

我们可得方程组

$$\sum_i [R_i(t) - m_i \ddot{r}_i(t)] a_i(t) = \sum_i [A_i(t) - m_i \ddot{a}_i(t)] r_i(t) \quad (1.1)$$

它表示第一状态的外力在第二状态的位移上所作的功等于第二状态的外力在第一状态的位移上所作的功。方程组中的乘积是纯量。如果我们所选择的辅助状态 a 是静力变形状态，则方程 1.1 可简化为：

$$\sum_i [R_i(t) - m_i \ddot{r}_i(t)] a_i = \sum_i A_i r_i(t) \quad (1.2)$$

将互等定理应用于状态 R 与 b 、……直至 R 与 n ，就可得到类似的方程组，即

$$\begin{aligned} \sum_i [R_i(t) - m_i \ddot{r}_i(t)] b_i &= \sum_i B_i r_i(t) \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \sum_i [R_i(t) - m_i \ddot{r}_i(t)] n_i &= \sum_i N_i r_i(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

辅助状态 $a \sim n$ 是任意的虚拟状态，它的选择，应与我们拟采用的方法相适应。

例如，我们可把状态 $a \sim n$ 取为由于在 i 点沿某坐标轴方向作用一单位力而引起的静力变

形状态。根据互等定理, 这样引起的体系的位移相应于 i 点沿所选坐标轴方向的位移影响系数。因此, 我们将采用影响系数法 (又称为力法, 它类似于超静定体系静力分析中所用的力法)。

或者, 我们也可将体系上某一点沿坐标轴方向发生单位变位 (位移), 而同时保持其余各点的位移为零的状态选作状态 $a \sim n$ 。此时, 我们将采用所谓弹性系数法, 又称为形变法——也类似于静力分析中的位移法。显然, 各点的虚位移必须是相互独立的, 否则这个方法就不能以这样简单的形式加以应用。

影响系数法和弹性系数法, 其两者都适用于分析集中质量体系的自由振动和强迫振动。

不过, 一旦知道了自由振动的振型, 对于强迫振动的情况, 我们即可方便地把它展成一列固有振型来求解。对于用固有振型表示的辅助状态, 这个方法——即所谓振型分析法 (The modal analysis method)——可直接得到一组彼此独立的有 n 个方程的方程组。

§1.2 影响系数法(Method of influence coefficients)

1.2.1 自由振动

图 1-2 表示一具有四个自由度的简单体系——有四个集中质量的弹性无重梁。在自由振动时, 体系在时刻 t 的位移示于图 1-3 的左边, 而具有单位荷载的辅助状态示于该图的右边。这些辅助状态的单位荷载与时间无关, 它们分别作用于过点 1、2、3、4 的竖直平面内。状态 R 的力在状态 1 的位移上所作的功示于方程组

1.4 第一式的右边, 而状态 1 的力在状态 R 的位移上所作的功则示于该式的左边。方程组 1.4 的其余三个方程同样可将互等定理应用于状态 $R-2$, $R-3$ 和 $R-4$ 而得到:

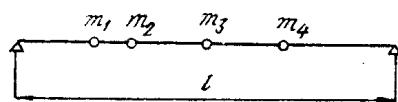


图 1-2 多自由度体系

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -m_1 \frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} \delta_{11} - m_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} \delta_{12} - m_3 \frac{d^2 v_3(t)}{dt^2} \delta_{13} - m_4 \frac{d^2 v_4(t)}{dt^2} \delta_{14} \\ v_2(t) &= -m_1 \frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} \delta_{21} - m_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} \delta_{22} - m_3 \frac{d^2 v_3(t)}{dt^2} \delta_{23} - m_4 \frac{d^2 v_4(t)}{dt^2} \delta_{24} \\ v_3(t) &= -m_1 \frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} \delta_{31} - m_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} \delta_{32} - m_3 \frac{d^2 v_3(t)}{dt^2} \delta_{33} - m_4 \frac{d^2 v_4(t)}{dt^2} \delta_{34} \\ v_4(t) &= -m_1 \frac{d^2 v_1(t)}{dt^2} \delta_{41} - m_2 \frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} \delta_{42} - m_3 \frac{d^2 v_3(t)}{dt^2} \delta_{43} - m_4 \frac{d^2 v_4(t)}{dt^2} \delta_{44} \quad (1.4) \end{aligned}$$

上列方程组的一般形式为

$$v_i(t) = - \sum_k m_k \frac{d^2 v_k(t)}{dt^2} \delta_{ik} \quad (1.4a)$$

而其矩阵形式 (按图 1-3 的符号) 是

$$\mathbf{v}(t) = - [\mathbf{m}_k \delta_{ik}] \ddot{\mathbf{v}} \quad (1.5)$$

式中:

$$[\mathbf{m}_k \delta_{ik}] = [\delta_{ik}] \mathbf{m}$$

• 译者注: 原文将“左边”与“右边”写反了, 译文已更正。

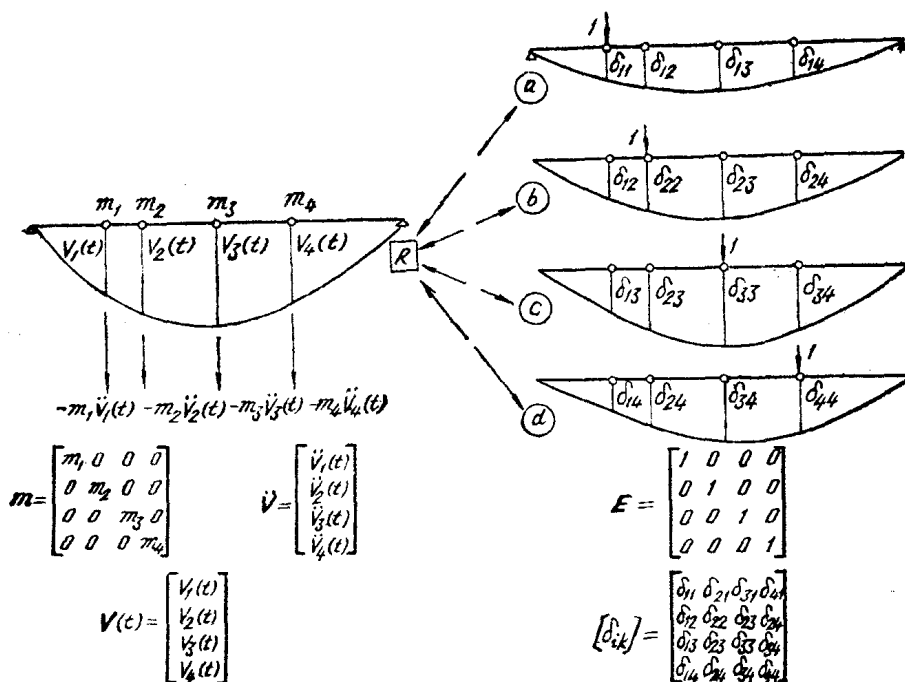


图1-3 影响系数法
R-实际运动状态, a、b、c、d-单位状态

对上面所述的步骤加以推广, 则式1.4a 和1.5可应用于任意次(n 次)自由度的体系。

式1.4有一简谐运动形式的特解

$$v_k(t) = v_k^0 \sin \omega_0 t \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

将它代入方程1.4并消去 $\sin \omega_0 t$, 则得到下列关于振幅的方程组为:

$$\begin{aligned} v_1^0 - \sum_k m_k \omega_0^2 v_k^0 \delta_{1k} &= 0 \\ v_2^0 - \sum_k m_k \omega_0^2 v_k^0 \delta_{2k} &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned}$$

振幅方程组的一般形式为

$$v_i^0 - \sum_k m_k \omega_0^2 v_k^0 \delta_{ik} = 0 \quad (1.7)$$

或以矩阵形式表示为

$$V^0 - \omega_0^2 [m_k \delta_{ik}] V^0 = 0 \quad (1.8)$$

式中:

$$V^0 = \begin{bmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_n^0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

方程1.9是位移列矩阵(向量)。

方程1.8也可写成

$$\left[A - \frac{1}{\omega_0^2} E \right] V^0 = 0 \quad (1.10)$$

式中:

$$A = [m_k \delta_{ik}] = \begin{bmatrix} m_1 \delta_{11} & m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{12} & m_2 \delta_{22} & \dots & m_n \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_1 \delta_{1n} & m_2 \delta_{2n} & \dots & m_n \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

而 E 为单位矩阵。

齐次方程组 1.7 有两个解: 对应于体系静止状态的零解和幅值不为零的非零解, 而后者只是在系数行列式等于零的条件下才能成立。这个条件就导出关于 ω_0^2 的 n 次方程 (即所谓的特征方程), n 表示振动体系自由度的数目。经整理后, 特征方程可写成下面的形式:

$$\begin{vmatrix} m_1 \delta_{11} - \frac{1}{\omega_0^2} m_2 \delta_{12} & \dots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{12} & m_2 \delta_{22} - \frac{1}{\omega_0^2} m_n \delta_{2n} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_1 \delta_{1n} & m_2 \delta_{2n} & \dots & m_n \delta_{nn} - \frac{1}{\omega_0^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.12)$$

或简写为

$$\det \left[A - \frac{1}{\omega_0^2} E \right] = 0 \quad (1.13)$$

它可用任一种常用方法求解, 例如牛顿近似法, “试位法” (Regula falsi), 等等。

解特征方程, 就可得到自由振动圆频率 ω_0 的 n 个正根, 即 $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \dots, \omega_{(i)}, \dots, \omega_{(n)}$ 。

因为方程组 1.7 是齐次的, 它们可解出比值 (而不是 v_0^0 的绝对值) $\frac{v_2^0}{v_1^0} \dots \frac{v_n^0}{v_1^0}$ 。自然, 对

于不同的 $\omega_{(i)}$ 值, 上述比值是不同的。对于我们所研究的情况, 这些比值可写出为 $\frac{v_{2(i)}}{v_{1(i)}} \dots$

$\frac{v_{3(i)}}{v_{1(i)}}$, 等等, 所用符号的含义, 读者可参看图 1-4。

固有振型满足正交性条件, 即

$$\sum_i m_i v_{1(i)} v_{1(k)} = 0 \quad (j \neq k) \quad (1.14)$$

$$\sum_i m_i v_{1(i)}^2 \neq 0 \quad (1.15)$$

振动强度不由式 1.7 确定, 而是假定强度有这样大, 它使得挠度 $v_{1(i)}$ (这里, 以 $V_{1(i)}$ 表示) 能满足条件

$$\sum_i m_i V_{1(i)}^2 = 1 \quad (1.16)$$

挠度 $V_{1(i)}$ 称为“标准化的”挠度, 它由非标准化的挠度按如下公式计算:

$$V_{1(i)} = \frac{v_{1(i)}}{\left[\sum (m_i v_{1(i)}^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (1.17)$$

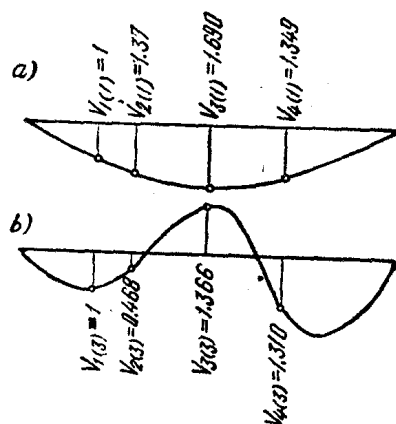


图 1-4 图 1-2 所示体系的固有振型
(a) 第一固有振型; (b) 第三固有振型