ZHONG DENG

经济应用数学

第二册

（第二版）

中等财经学校教材

□ 李冠云 何屏生 / 主编

中国财政经济出版社

中等财经学校教材

经济应用数学（第二版）

第 二 册

李[illegible]云 [illegible] 主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学　第 2 册/李冠云，何屏生主编．－2 版．－北京：中国财政经济出版社．1999.1

中等财经学校教材

ISBN 7－5005－4083－3

Ⅰ．经… Ⅱ．①李… ②何… Ⅲ．经济数学－专业学校－教材 Ⅳ．F224．0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 02676 号

中国财政经济出版社出版

URL：http://www.cfeph.com

E－mail：cfeph@drc.gov.cn

社址：北京东城大佛寺东街 8 号　邮政编码：100010

发行处电话：64033095　财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷　各地新华书店经销

850×1168 毫米　32 开　6.375 印张　150 000 字

1999 年 7 月第 1 版　1999 年 7 月北京第 1 次印刷

印数：1— 15 000　定价：8.50 元

ISBN 7－5005－4083－3/F·3710

（图书出现印装问题，本社负责调换）

目　　录

第四章　数列、数学归纳法

§4－1　数　　列

数列是数学中的重要概念之一．它在很多领域中都得到广泛应用．本章将介绍数列的概念、等差数列、等比数列以及介绍证明以自然数 n 有关的数学命题的一种重要方法——数学归纳法．

一、数列的概念

在日常生活中，常常会遇到按某种顺序排成一列的数，如城镇街道的门牌号是按路一侧为单数，另一侧为双数顺序排列的，某街道 200 个门户，每侧 100 个，则其门牌号可编排为：

$$1，3，5，\cdots，199 \tag{1}$$

及

$$2，4，6，\cdots，200 \tag{2}$$

在经济生活中，这种排成一列的数也常常见到．如某店元月销售额是 1 万元，以后每月销售额都比上月增加 1 千元，该店 1 年内各月销售额可排成一列数

$$10000，11000，12000，\cdots，21000 \tag{3}$$

又如银行存款，若每月单利为 0.5%，则存款若干个月后，1 元本金的本利和可按月数排成如下的一列数：

$$1.005，1.010，1.015，\cdots，1.060，\cdots \tag{4}$$

营业员只需在这列数中找出与存款存放月数相应的终值乘以最初

存入的本金，就得出应付给存款人的本利和.

如上几例，可给出以下定义：

按照一定顺序排列的一列数叫做**数列**. 数列中的每一个数都叫做这个数列的项，各项依次叫做这个数列的第 1 项（或首项），第 2 项，……，第 n 项，……，如上面的数列（2）每一项与它的序号有以下的对应关系：

$$\begin{array}{lccccc} \text{项} & 2 & 4 & 6 & \cdots\cdots & 200 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{序号} & 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & 100 \end{array}$$

这告诉我们：数列可以看作一个定义域为自然数集 N（或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$）上的函数，当自变量 n 取 1，2，3，…时的一列函数值.

数列的一般形式为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，也称为通项. 通常我们把数列简记为 $\{a_n\}$，例如：

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots \tag{5}$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \cdots \tag{6}$$

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots \tag{7}$$

$$1,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{-1}{4},\ \cdots,\ (-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \cdots \tag{8}$$

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ \cdots\ (\pi\ \text{的不足近似值}) \tag{9}$$

等等，都是数列.

数列可以用图形来表示. 在画图时，为方便起见，在平面直角坐标系的两个坐标轴上所取的单位长度可以不同. 图 4－1（1）、（2）分别是数列的（5）、（6）的图形表示，从图上看数列的图形是一群孤立的点.

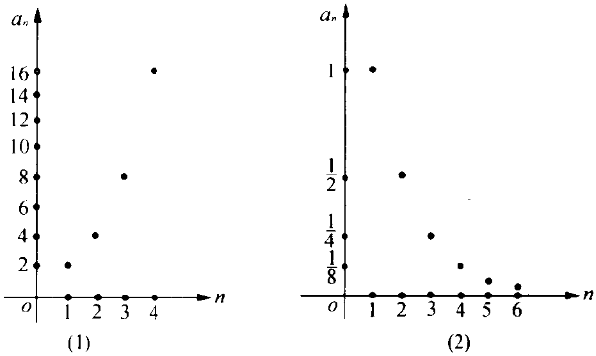

图 4－1

二、数列的通项公式

如果一个数列的通项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用解析式表示，那么这个解析式就叫做数列的通项公式，如数列（1）的通项公式是 $a_n=2n-1$（$n=1, 2\cdots100$）；数列（2）的通项公式是 $a_n=2n$（$n=1, 2\cdots100$）；数列（3）的通项公式是 $a_n=10000+1000(n-1)$（$n\in N$，且 $n\leqslant12$）.

并不是每一个数列都存在通项公式，如数列(9)π 的精确到 1,0.1,0.01,0.001…的不足近似值就无法用通项公式表示．存在通项公式的数列，其通项公式也不一定唯一，如数列（7），其通项公式既可以是 $a_n=(-1)^n$，又可以是 $c_n=\cos n\pi$ 等.

如果已知一个数列的通项公式，那么用求函数值的方法，容易求出它的每一项.

例 1 已知数列的通项公式 $a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{2n-1}$，试求它的前 3 项和第 30 项.

解 将 $n=1, 2, 3, 30$ 分别代入 $a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{2n-1}$，得结

果如下：

$$a_1=-2，a_2=1，a_3=\frac{-4}{5}，a_{30}=\frac{31}{59}$$

反之，有些数列的变化遵循比较明显的规律，我们也可以通过观察写出它的通项公式.

例 2 求下面各数列的一个通项公式

（1）$-\frac{1}{1\cdot2}$，$\frac{1}{2\cdot3}$，$-\frac{1}{3\cdot4}$，$\frac{1}{4\cdot5}$，…

（2）$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{15}{4}$，$\frac{24}{5}$，…

（3）1，1，2，3，5，8，13，…

解 数列（1）的前四项 $-\frac{1}{1\cdot2}$，$\frac{1}{2\cdot3}$，$-\frac{1}{3\cdot4}$，$\frac{1}{4\cdot5}$的绝对值都是序号与序号加 1 乘积的倒数，且奇数项为负，偶数项为正，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n\cdot(n+1)}$$

数列（2）$\frac{3}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{15}{4}$，$\frac{24}{5}$，…可写成 $\frac{2^2-1}{1+1}$，$\frac{3^2-1}{2+1}$，$\frac{4^2-1}{3+1}$，$\frac{5^2-1}{4+1}$，…由此可知数列的前四项的分母都是序号加 1，分子都是分母的平方减 1，所以通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n(n+2)}{n+1}$$

数列（3）从第三项起，每一项都是它前面两项的和，所以它的通项公式可表示为递推形式

$$\begin{cases}a_1=a_2=1,\\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\end{cases}$$

这是一个很有名的数列，叫做非波纳契数列.

三、数列的分类

1. 按项数有限或无限来分类

如果一个数列的项数是有限的，那么这个数列就叫做**有穷数列**；如果一个数列的项数是无限的，那么这个数列就叫做**无穷数列**.

前面所举数列中，数列(1)～(3)都是有穷数列，数列(4)～(9)都是无穷数列.

2. 按各项绝对值是否都小于某个正数 M 来分类

如果一个数列任何一项的绝对值都小于某个正数 M，即可找到某个 $M>0$，使所有 $|a_n|<M$ 都成立，那么就把这个数列 $\{a_n\}$ 叫做**有界数列**；如果不存在这样的正数，数列就叫做**无界数列**.

例如，数列（1）、(2)、(3)、(4)、(6)、(7)、(8)、(9）都是有界数列，而数列（5）则为无界数列.

3. 按后项与前项数值的大小来分类

如果一个数列从第 2 项起，每项都大于它的前一项，即 $a_{n+1}>a_n$，那么这个数列叫做**递增数列**；如果从第 2 项起，每项都小于它的前一项，即 $a_{n+1}<a_n$，那么这个数列叫做**递减数列**；如果从第 2 项起，有些项大于它前面一项，而有些项又小于它前面一项，那么这个数列叫做**摆动数列**.

例如，数列（1）、(2)、(3)、(4)、(5)、(9）是递增数列；数列（6）是递减数列；数列（7），(8）则是摆动数列.

如果数列的各项都相等，那么这个数列就叫做**常数列**，例如 5，5，5，…，5，…，就是一个常数数列.

习题 4－1

1．已知数列的通项公式，写出它的第 4，第 7，第 10 项．

(1) $a_n=(n-1)n(n+1)$　　(2) $a_n=(-1)^{n-1}\cdot n$

(3) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$　　(4) $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$

2．写出以下数列的通项公式和前 3 项：

(1) 依次排列的自然数平方的倒数；

(2) 从小到大排列的 5 的正整数倍；

(3) 从小到大排列的 3 的正整数次幂．

3．观察以下数列的特点，用适当的数填空：

(1)(　)，4，9，16，25，(　)，49；

(2) -8，-6，(　)，-2，0，2，(　)，6；

(3)(　)，$\sqrt{6}$，$\sqrt{5}$，(　)，$\sqrt{3}$，$\sqrt{2}$，(　)，0；

(4) -1，(　)，$-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，(　)；

(5) $-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，(　)，$\dfrac{1}{16}$，$-\dfrac{1}{32}$，(　)，$-\dfrac{1}{128}$．

4．写出以下数列的前 5 项：

(1) $a_1=-2$，　$a_{n+1}=a_n+5$；

(2) $a_1=-3$，　$a_{n+1}=2a_n$；

(3) $a_1=2$，　$a_2=6$，$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$；

(4) $a_1=1$，　$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$．

5．写出以下数列的一个通项公式，并写出它的第 10 项．

(1) 1，0，-1，-2，-3，…

(2) -2，4，-8，16，-32，…

(3) $\dfrac{2}{4}$，$\dfrac{4}{9}$，$\dfrac{6}{16}$，$\dfrac{8}{25}$，…

(4)$\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, …

(5)$-\frac{1}{2\times1}$, $\frac{1}{2\times2}$, $-\frac{1}{2\times3}$, $\frac{1}{2\times4}$, …

(6)$1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$, …

6. 已知无穷数列:$1\times2,2\times3,3\times4,4\times5,\cdots n(n+1),\cdots$

(1)求这个数列的第10项，第31项及第48项；

(2)420是这个数列中的第几项?

7. (1)已知数列 $\{a_n\}$ 的第1项是1，第2项是2，以后各项由公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$ 给出. 写出这个数列的前6项.

(2)用上面的数列，通过公式 $b_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 构造一个新的数列 $\{b_n\}$，并写出 $\{b_n\}$ 的前6项.

8. 下面的数列中，哪些递增？哪些递减？哪些是摆动的？哪些是常数列?

(1)1×3, 2×4, 3×5, 4×6, …

(2)1, -2, 3, -4, …

(3)1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}$, …

(4)$1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-5$, …

(5)0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, …

§4－2 等 差 数 列

一、等差数列的定义

考察数列

$$1.005,\quad 1.010,\quad 1.015,\quad \cdots,\quad 1.060,\ \cdots \tag{1}$$

及数列

$$8,\ 3,\ -2,\ -7,\ \cdots \tag{2}$$

我们发现，这两个数列都有以下特征：

从第 2 项起，每一项减去它前面一项，所得的差都是同一常数 d，如在数列（1）中，常数 $d=0.005$；在数列（2）中，常数 $d=-5$. 对于这样的数列，给出如下定义：

一般地，对于数列 $\{a_n\}$，如果从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数 d，即 $a_2-a_1=a_3-a_2=a_n-a_{n-1}=\cdots=d$，那么这个数列就叫做**等差数列**，常数叫做该等差数列的**公差**.

在等差数列中，若 $d>0$，则数列是递增的；若 $d<0$，则数列是递减的；若 $d=0$，则数列是常数列.

例 1 求证数列 $\{2n-1\}$ 是等差数列

证明 ∵数列的通项公式是

$$a_n=2n-1$$

而对于任何 $n>1$，都有

$$\begin{aligned} a_n-a_{n-1} &= (2n-1)-[2(n-1)-1] \\ &= (2n-1)-(2n-3) \\ &= 2 \quad （常数） \end{aligned}$$

∴数列 $\{2n-1\}$ 是公差 $d=2$ 的等差数列.

这个数列可用图 4-2 来表示，从图中看到，表示这个等差数列各项的点都在同一直线 $y=2x-1$ 上.

二、等差数列的通项公式

设等差数列 $\{a_n\}$ 首项是 a_1，公差是 d，则由其定义可知：

$a_2=a_1+d$

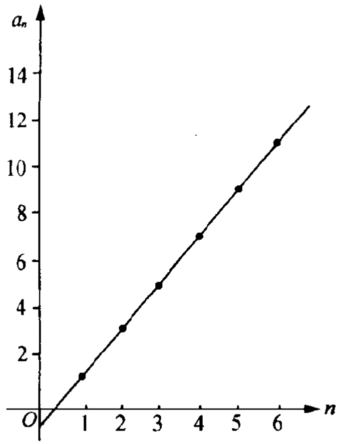

图 4－2

$a_3=a_2+d=a_1+2d$

$a_4=a_3+d=a_1+3d$

……

由此可得等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d} \quad (4-1)$$

公式（4－1）揭示了等差数列的四个量 a_n，a_1，n，d 之间的数量关系，通过此式我们可由其中任意三个量求出第四个量.

例 2 已知等差数列 $\{a_n\}$ 第 7 项是 0，第 11 项是 -10，求此数列的通项公式.

解 设此数列首项为 a_1，公差为 d，则由题意可得方程组：

$$\begin{cases} 0=a_1+6d \\ -10=a_1+10d \end{cases}$$

解这个方程组得：

$$d=-2.5,\ a_1=15$$

∴这个数列的通项公式是

$a_n=15+(n-1)(-2.5)$

即 $a_n=17.5-2.5n$

例 3 在 3 与 19 之间插入 3 个数，使它们与这两个数构成等差数列，求这个数列的中间项.

解 ∵要在 3 与 19 之间插入 3 个数构成等差数列.

∴此数列共 5 项，且

$a_1=3$，$a_5=19$，中间项为 a_3

又　$\because a_5=a_1+4d$

$\therefore 4d=19-3=16$

解得　$d=4$

$\therefore a_3=a_1+2d=3+2\times 4=11$

三、等差中项

如果三个数 a，A，b 成等差数列，那么数 A 就叫做a 与b 的等差中项.

由定义可知 $b-A=A-a$，则

$$\boxed{A=\frac{a+b}{2}} \tag{4-2}$$

例 4　利用公式（4－2）解例 3.

解　$\because a_3-a_1=a_5-a_3=2d$

$\therefore a_3$ 是 a_1 与 a_5 的等差中项，

则　$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=\frac{3+19}{2}=11$

四、等差数列的前 n 项和公式

在经济工作中，经常遇到求等差数列前 n 项和的问题，例如，按月计算单利的存款一年后的本利和；按等差折旧法计算折旧额的某设备，若干年的折旧总额等，都要用到等差数列前 n 项和的公式. 下面通过具体例子，说明求等差数列的前 n 项和的方法.

先来计算前 10 个自然数，前 100 个自然数的和.

设　$S_{10}=1+2+3+\cdots+8+9+10$

把项的顺序颠倒，S_{10}又可写成

$$S_{10}=10+9+8+\cdots+3+2+1$$

以上两式两边分别相加，得

$$2S_{10}=(1+10)+(2+9)+(3+8)+\cdots+(8+3)$$
$$+(9+2)+(10+1)$$
$$=(1+10)\times 10$$

因此 $S_{10}=\dfrac{(1+10)\times 10}{2}$

类似可得

$$S_{100}=\frac{(1+100)\times 100}{2}$$

一般地，设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n \qquad (1)$$

根据等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，(1) 式可以写成

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d] \qquad (2)$$

再把项的顺序反过来，S_n 又可写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d] \qquad (3)$$

(2) + (3)，得

$$2S_n=\overbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}^{n\text{ 个}}$$
$$=n(a_1+a_n)$$

于是得到等差数列的前 n 项和公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}} \qquad (4-3)$$

将 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式 (4－3)，又得等差数列前 n 项和的另一计算公式：

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d} \qquad (4-4)$$

利用公式 (4－3) 易知前 n 个自然数的和为

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 5 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=-3$，$a_{11}=20$，求 S_{11} 和 S_{30}.

解 由公式（4－3）得

$$S_{11}=\frac{11\times(-3+20)}{2}=93\frac{1}{2}$$

求 S_{30} 有两种方法：

（1）可先求 a_{30}，再用公式（4－3）计算 S_{30}；

（2）求出 d 后，用公式（4－4）计算 S_{30}.

由于求 a_{30} 也要先计算 d 的值，故选方法（2）求 S_{30} 为好，解法如下：

$$\because a_{11}=a_1+10d$$

$$\therefore d=\frac{a_{11}-a_1}{10}=\frac{20-(-3)}{10}=2.3$$

由公式（4－4）得

$$\begin{aligned}S_{30}&=30\times(-3)+\frac{30\times(30-1)}{2}\times 2.3\\&=-90+1000.5\\&=910.5\end{aligned}$$

例 6 银行无息贷款 5800 元扶植老区发展林业，还款方式是一年后的第一个月还 100 元，以后每月都比前一个月多还 20 元，问需要多少个月能还清全部贷款？

解 由题知每月还款数是首项 $a_1=100$，公差 $d=20$ 的等差数列，设 n 个月可还清贷款，n 个月的还款总额为 S_n，则由公式（4－4）有

$$\begin{aligned}S_n&=100n+\frac{n(n-1)}{2}\times 20\\&=10n^2+90n\end{aligned}$$