



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

量子力学

第二版

苏汝铨 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材.本书着重阐述量子力学的基本原理、基本方法和广泛的应用.全书共包括 13 章,分别讲述量子论基础、力学量和算符、表象理论、近似方法、自旋和角动量、散射理论、波函数的相位、多体问题、路径积分、相对论量子力学、隐变数理论、量子纠缠和量子信息等.本书还就朗道坠落、相干态、贝利相位、卡什米尔效应、超导和超流微观理论等前沿应用问题作了深入浅出的介绍.各章都有一定量的例题、习题,供读者练习,用以检验自己对概念的理解和熟练应用各种数学方法.

本书可作为高等学校物理类本科生和研究生的教材或教学参考书,也可供相关专业师生和科技研究人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

量子力学/苏汝铿编著. —2版. —北京:高等教育出版社,2002.12

ISBN 7-04-011575-1

I. 量... II. 苏... III. 量子力学—高等学校—教材 IV. 0413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 068623 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 33
字 数 600 000

版 次 1997 年 6 月第 1 版
2002 年 12 月第 2 版
印 次 2002 年 12 月第 1 次印刷
定 价 37.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

第二版序

自本书于 1997 年面世以来,量子力学又有了许多新的重要的发展.一方面,虽然对量子力学的基础、原理等最根本的问题,仍然存在着一些至今尚未被完全理解,甚至仍然使人困惑的课题;但近年来出现的许多精巧的实验,已经使一些问题,特别是一些旷日持久的争论从哲学的思辩发展到可以通过实验判别是非对错,或者从抽象的论争发展到可以建立一些具体的模型,通过推理计算以求得合理的结果.另一方面,量子力学的应用日益广泛.它已经越出物理学,进入信息、计算机领域.最近蓬勃发展的量子信息、量子纠缠、量子通讯,量子密码乃至量子计算机,已经发展成为一门新的学科——量子信息学.作为一本“面向 21 世纪课程教材”,理应对这些课题有所反映.

在第二版中,相对于第一版,我们增加了两章:第七章,波函数的相位和第十三章,量子纠缠和量子信息.对其他各章,也作了一些适当的增补和删削.特别是,对第一版的一些印刷上的纰漏,作了全面的校勘.

限于水平,特别是限于作者对量子信息学的肤浅的理解,书中错漏在所难免,诚恳地希望读者批评指正.

作者特别感谢在修订过程中给过我许多帮助的教授、学生和朋友,希望本书能够不辜负他们的期望.

苏汝铿

2001 年 9 月于复旦大学

第一版序

本书是根据作者从 20 世纪 60 年代初开始在复旦大学物理系为大学生开设量子力学课程,为研究生开设高等量子力学课程的讲稿补充修改而成的。

量子力学是物理系学生的一门重要的基础理论课程,也是物理学工作者从事现代物理学研究不可缺少的基本知识和基本训练。它的基本概念除了和经典力学不同之外,还视量子力学的各种表述形式的不同而各异。本书将分别就波动力学、矩阵力学和路径积分三种概念完全不同,但结果又彼此等价的表述形式展开讨论,力求对一些基本概念,包括它的适用范围、相互联系、各种推理作深入浅出的阐述,希望能免除读者难以捉摸之苦,便于掌握量子力学内容。量子力学的另外一个特点是它的应用范围非常广泛,在固体物理、介观物理、原子分子物理、表面物理、原子核物理、天体物理,甚至化学、生物学等各个领域中都有许多精彩的应用。当然,任何一本量子力学书都不可能囊括所有这些应用,而只能按需要和可能作一些挑选。作者历来认为,一本好的教材,不仅应该是一本好的教学用书,而且也应该是一本好的参考书。它不仅需要阐述本门课程的基础知识,还应该介绍一些与本门课程有关的现代物理题材,以便逐步引导学生走向现代科学的前沿。当然,限于可能和篇幅,只能挑选一些有兴趣的内容。在这方面,本书介绍了朗道坠落、相干态、形式微扰理论、密度矩阵、阿哈朗诺夫-玻姆效应、贝利相位、卡什米尔效应、跃迁矩阵和散射矩阵、扭曲波近似、超导微观理论、超流和近似二次量子化方法、哈特里-福克近似、克莱因佯谬、MIT 袋模型、转动算符、对称性特别是手征不变性等内容,以供读者参考。在本书的最后一章,我们还对量子力学中在物理上争论颇多的问题,包括爱因斯坦-潘多尔斯基-罗森佯谬、贝尔不等式、隐变数理论等作了一些简单的介绍。

就作者看来,量子力学和高等量子力学之间并没有什么本质的界线或者严格的分水岭,无非是视教学时数的多少,学生水平的高低而对量子力学的内容作不同的取舍和安排。前者偏重于基本知识、基本理论,后者可以涉及更多的应用和更深刻的理论探讨。但是,量子力学既不同于量子统计,它无需考虑温度的影响;也不同于量子场论,它不必讨论场的量子化。本书的选材基本上是按照上面这个原则进行的。作为参考,带“*”号的章节或许可以留在高等量子力学中讲授。另外,各章所附的习题也并不需要学生每道题目都做,因为有些习题,特别是注明出处的习题,其实就是一篇学术论文。附在这里的原因无非是希望开阔学生的视野,以便有能力、有兴趣的学生能有进一步钻研的余地。

作者特别感谢周世勋教授,1960年,从作者踏入复旦校园参加工作开始,就有幸在周世勋教授的指导和主持下,参加量子力学课程的教学和教材的编写工作.他精彩的讲课内容和严谨的治学态度让作者受益良多.

作者感谢历年来在复旦大学参加过本门课程教学的同事和学习过本门课程的学生.他们的讨论、质疑以及对许多问题的有趣回答常常使作者深受启发.事实上,收录在本书习题中的大部分论题,就是在和这些学生的讨论、研究中完成的.

最后,限于作者水平,书中错漏或不妥之处在所难免,诚恳地希望读者批评指正.

苏汝铿

1996年春于复旦大学

目 录

第一章 量子论基础	1
§ 1.1 经典物理学的困难	1
§ 1.2 光量子 and 普朗克-爱因斯坦关系	5
§ 1.3 玻尔的量子论	9
§ 1.4 波粒二象性和德布罗意波	11
本章小结	16
习 题	16
第二章 波动力学基础	18
§ 2.1 波函数的统计解释	18
§ 2.2 态叠加原理	21
§ 2.3 薛定谔方程	24
§ 2.4 一维方势阱	30
§ 2.5 一维谐振子	35
§ 2.6 一维薛定谔方程的普遍性质	40
* § 2.7 一维可解势	47
§ 2.8 势垒贯穿	52
§ 2.9 三维薛定谔方程的普遍性质, 朗道坠落	55
§ 2.10 氢原子	62
§ 2.11 三维可解势	70
§ 2.12 薛定谔方程的经典极限	76
本章小结	78
习 题	79
第三章 矩阵力学基础(I)——力学量和算符	84
§ 3.1 力学量的平均值	85
§ 3.2 算符的运算规则	88
§ 3.3 厄米算符的本征值和本征函数	95
§ 3.4 连续谱本征函数	101
§ 3.5 量子力学中力学量的测量值	104
§ 3.6 不确定性原理	109

§ 3.7 力学量随时间的变化	114
§ 3.8 运动积分 宇称算符	116
* § 3.9 对称性和守恒律	123
本章小结	126
习 题	127
第四章 矩阵力学基础(II)——表象理论	131
§ 4.1 态和算符的表象表示	131
§ 4.2 矩阵力学表述	136
§ 4.3 么正变换	140
§ 4.4 狄拉克符号	147
§ 4.5 线性谐振子和占有数表象	151
* § 4.6 受迫谐振子和相干态	158
* § 4.7 密度矩阵	164
* § 4.8 薛定谔绘景和海森伯绘景	167
本章小结	170
习 题	172
第五章 近似方法	175
§ 5.1 非简并定态微扰论	175
§ 5.2 简并情况下的定态微扰论	182
§ 5.3 变分法	188
§ 5.4 含时微扰理论	195
§ 5.5 跃迁概率和费米黄金规则	198
§ 5.6 含时微扰论与定态微扰论的关系	204
§ 5.7 光的发射和吸收,选择定则	205
* § 5.8 相互作用绘景和形式微扰理论	210
* § 5.9 绝热近似和盖尔曼-劳定理	213
* § 5.10 WKB 近似	216
本章小结	224
习 题	226
第六章 自旋和角动量	230
§ 6.1 电子自旋	230
§ 6.2 电子的自旋算符和自旋函数	232
§ 6.3 粒子在电磁场中的运动 泡利方程	237
§ 6.4 朗道能级	241
§ 6.5 两个角动量的耦合	243

§ 6.6 克莱布希-戈尔登系数	248
§ 6.7 光谱线的精细结构	254
§ 6.8 塞曼效应	258
§ 6.9 自旋单态和自旋三重态	262
* § 6.10 转动算符	265
本章小结	269
习 题	270
第七章 波函数的相位	274
§ 7.1 阿哈朗诺夫-玻姆效应	275
* § 7.2 阿哈朗诺夫-凯瑟尔效应	278
* § 7.3 超导环的磁通量	280
* § 7.4 磁单极	281
* § 7.5 贝利相位	283
* § 7.6 不可积相位因子	287
* § 7.7 真空能量和卡什米尔效应	288
本章小结	291
习 题	292
第八章 散射理论	294
§ 8.1 散射问题的一般描述	295
§ 8.2 分波法	299
§ 8.3 分波法示例	303
§ 8.4 格林函数法和玻恩近似	307
* § 8.5 格劳勃近似	314
* § 8.6 质心坐标系和实验室坐标系	317
* § 8.7 跃迁矩阵(T 矩阵)	320
* § 8.8 李普曼-许温格方程	322
* § 8.9 戴逊方程	325
* § 8.10 散射矩阵(S 矩阵)	327
* § 8.11 复势场中的散射和光学势	332
* § 8.12 非弹性散射的一般理论	334
* § 8.13 扭曲波近似	337
本章小结	339
习 题	340
第九章 多体问题	343
§ 9.1 全同粒子的性质	344

§ 9.2 全同粒子的散射	349
§ 9.3 氦原子	352
§ 9.4 分子	355
* § 9.5 二次量子化	361
* § 9.6 哈特里-福克平均场近似	368
* § 9.7 托马斯-费米方法	371
* § 9.8 超导电理论	373
* § 9.9 超流理论和玻戈留博夫近似二次量子化方法	379
本章小结	382
习 题	383
* 第十章 路径积分	387
§ 10.1 经典作用量和量子力学振幅	388
§ 10.2 路径积分	391
§ 10.3 高斯积分	397
§ 10.4 路径积分和薛定谔方程	400
§ 10.5 路径积分的正则形式	404
本章小结	407
习 题	408
* 第十一章 相对论量子力学	409
§ 11.1 克莱因-戈尔登方程	410
§ 11.2 狄拉克方程	413
§ 11.3 狄拉克方程的自由粒子解	417
§ 11.4 电磁场中的狄拉克方程	422
§ 11.5 狄拉克方程的协变形式	424
§ 11.6 磁力场中的狄拉克方程	429
§ 11.7 狄拉克方程的库仑场解	435
§ 11.8 克莱因佯谬	438
§ 11.9 MIT 口袋模型	445
§ 11.10 手征对称性	449
本章小结	451
习 题	453
* 第十二章 量子力学和隐变数理论	455
§ 12.1 爱因斯坦-潘多尔斯基-罗森佯谬	456
§ 12.2 冯·诺曼定理 格里森定理和隐变数理论	462
§ 12.3 贝尔不等式	467

本章小结	472
第十三章 量子纠缠和量子信息	473
§ 13.1 纯态和混合态	474
§ 13.2 纠缠态和贝尔基	478
§ 13.3 薛定谔猫和路径选择实验	482
§ 13.4 测量和退相干	486
§ 13.5 量子隐形传态	488
§ 13.6 量子信息	491
本章小结	493
附录	494
附录 I 物理常数表	494
附录 II δ 函数	495
附录 III 合流超比函数和超比函数	496
附录 IV 一些常用公式	499
答案	504

第一章 量子论基础

在简单回顾和罗列经典物理学困难的基础上,本章将扼要地介绍普朗克的谐振子量子化的概念、爱因斯坦的光量子 and 玻尔的量子论,以及如何利用这些量子化的假说解决经典困难.然后引入光的波粒二象性和德布罗意波,并给出量子力学中的平面波和波包.本章的许多结果,最后虽然被量子力学在更高的水平上重新给出,但本章的许多概念,即使在今天,对于物理学工作者,仍然是极端重要的.

§ 1.1 经典物理学的困难

19 世纪末 20 世纪初,经典物理学,主要是经典力学、热力学和经典统计物理学、经典电动力学,已经发展得相当完善.比方说,速度远小于光速的物体的机械运动遵从牛顿力学规律;电磁现象满足麦克斯韦方程组;光的现象满足光的波动理论;特别是当时已认识到热辐射和光辐射都是电磁波,还提出了热辐射满足的基尔霍夫(Kirchhoff)定律和斯忒藩(Stefan)-玻耳兹曼(Boltzmann)定律,证实黑体辐射场的能量密度与温度的四次方成正比.对于热现象,除了已经有了非常系统的热力学理论外,还有玻耳兹曼、吉布斯(Gibbs)等人提出的统计物理学.经典物理学的大厦已经建立得相当完美了.

但是,在和实验进一步对比的过程中,也出现了一些困难,而且这些困难,在经典物理的范畴内是无法解释的.这主要表现在:

1. 黑体辐射^①

任何物体总在吸收投射在它身上的辐射. 物体吸收的辐射能量与投射到物体上的辐射能之比称为该物体的吸收系数. 一般地, 物体只吸收投射到它表面上的部分能量, 吸收系数小于 1. 如果一个物体, 能吸收投射到它表面上的全部辐射, 即其吸收系数为 1 时, 则称这个物体为黑体. 一个开有一个小孔的空腔可近似视为黑体. 因为一旦光线通过小孔射入空腔后, 就很难再通过小孔反射出来.

另一方面, 由于腔壁具有一定温度, 它还会发出热辐射. 当空腔和内部的热辐射达到平衡后, 实验发现, 在频率 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 之间的辐射能量密度 $\rho_\nu d\nu$ 只与频率 ν 和热力学温度 T 有关. 在不同温度下, ρ_ν 随 ν 的变化曲线如图 1.1.1 所示. 实验曲线存在维恩(Wien)位移: 辐射能量密度按波长分布的最大值 λ_m 与 T 的乘积为常数:

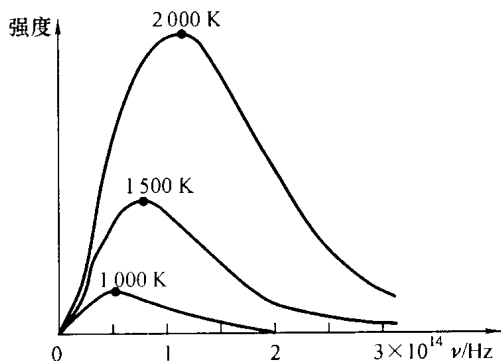


图 1.1.1 黑体辐射

$$\lambda_m T = 0.2898 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (1.1.1)$$

而且满足

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = a T^4 \quad (1.1.2)$$

其中 a 是常数.

1893 年, 维恩利用经典热力学和电动力学给出了辐射能量密度的经验公式

$$\rho_\nu d\nu = C_1 \nu^3 e^{-C_2 \nu / T} d\nu \quad (1.1.3)$$

(1.1.3) 式称为维恩公式, 式中 C_1 、 C_2 是经验参数. 与实验结果比较后发现, 维恩公式只适用于高频区.

1899 年, 瑞利(Rayleigh)和金斯(Jeans)利用经典统计物理学和电磁理论,

^① 关于黑体辐射和比热的详细论述可参阅苏汝铿:《统计物理学》, 复旦大学出版社, 1990. § 4.1, § 4.2, § 4.5, § 4.6.

推导出公式

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k T \nu^2 d\nu \quad (1.1.4)$$

(1.1.4)式称为瑞利-金斯公式,式中 k 是玻耳兹曼常数, c 是光速.它只在低频区与实验相符.在高频区,当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, $\rho_\nu \rightarrow \infty$,而且能量密度发散.

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} k T \int_0^\infty \nu^2 d\nu \rightarrow \infty \quad (1.1.5)$$

这个结果称为紫外灾难.

2. 光电效应

1888年,赫兹(Hertz)在验证电磁波存在的实验中,发现当用紫外光照到火花隙的负极上时,放电比较容易发生.1897年汤姆孙(Thomson)通过气体放电和阴极射线的研究发现电子.1900年,林纳(Lenard)的实验证明,金属在紫外光的照射下发射电子.这是由于紫外光照射到金属表面上时,金属中的电子吸收了光的能量而从金属表面逸出所致.这种逸出的电子称为光电子.对于表面光洁的金属材料,光电效应的实验结果是:

(i) 存在临界频率 ν_0 :当入射光的频率 $\nu < \nu_0$ 时,无论光的强度多大,都无光电子逸出.只有在 $\nu \geq \nu_0$ 时,即使光的强度较弱,但只要光照到金属表面上,几乎在 10^{-9} s的极短时间内,就能观测到光电子.

(ii) 出射的光电子的能量只与入射光的频率 ν 有关,而与入射光的强度无关.

(iii) 入射光的强度只影响光电流的强弱,即只影响在单位时间内由单位面积上逸出的光电子的数目.

显然,这些实验结果,特别是(i)和(ii),无法用经典电磁理论解释.因为按经典电动力学,光是电磁波,电磁波的能量决定于它的强度,即只与电磁波的振幅有关,而与电磁波的频率无关.而要释放光电子,显然需要有足够的能量.

3. 原子的线状光谱

1885年,巴耳末(Balmer)通过对氢的光谱线分析研究后,发现氢原子可见光的光谱线满足经验公式

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=3,4,5,\dots) \quad (1.1.6)$$

$\tilde{\nu}$ 为波长的倒数,称为波数. R_H 称为里德伯(Rydberg)常数,数值上等于 109677.581cm^{-1} .以后又陆续发现了其他线系,1889年,里德伯把氢的所有谱线归纳为一个里德伯方程,即

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = R_H \left[\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right] = T(n) - T(n') \quad (1.1.7)$$

式中, $n=1,2,3,\dots$;对于每一个 n ,有 $n'=n+1, n+2, n+3, \dots$ 构成一个谱线系.

$T(n)$ 称为光谱项.由(1.1.7)式可见,如果光谱中有频率为 ν_1 和 ν_2 的两条谱线,则也有频率为 $\nu_1 + \nu_2$ 及 $|\nu_1 - \nu_2|$ 的谱线.这个结果称为里兹(Ritz)的并合原则.

原子的线状光谱用经典理论也是无法解释的.因为按卢瑟福模型,原子中电子绕原子核运动.这是一种加速运动.但按经典电动力学,加速电荷应不断发出辐射,于是电子不断损失能量;而且,加速电荷发出的辐射的频率是连续分布的,不可能产生线状光谱.此外,按经典电动力学,若体系发出频率为 ν 的波,则它也可能发出频率为 ν 的整数倍的其他谐波.这个结论也与并合原则不符.

4. 原子的稳定性

原子结构的卢瑟福模型在经典理论中是无法理解的.因为电子既然绕原子核运动,则在这一加速运动过程中,由于辐射能量,必然使电子绕核运动的轨道变小,最后“落到”原子核中去.也就是说,按经典理论,卢瑟福的原子模型是不稳定的.这种原子最后必然坍缩成一团.但是现实世界中原子是稳定的.经典理论无法解释原子的稳定性.

5. 比热

经典统计物理的比热理论建立在能量均分定理的基础上.在和实验比较后发现,经典的比热理论存在着下述困难:

(i) 固体比热的杜隆-珀蒂(Dulong - Petit)定律

$$C_p \approx C_v = 3R \quad (1.1.8)$$

与温度 T 无关.这个结果只在常温下与实验相符.在极低温下,固体比热服从德拜(Debye) T^3 定律: C_p 与 T^3 成正比.

(ii) 不能解释为什么原子中处于束缚态的电子对比热的贡献可以略去.因为按原子模型,原子核外的电子在运动.而按能量均分定理,每个电子运动的平均动能为 $\frac{3}{2}kT$,相应的定容比热应为 $\frac{3}{2}k$.

(iii) 不能解释为什么绝大部分双原子分子、多原子分子在常温下振动自由度被冻结,对比热没有贡献.

除了当时已出现的这些困难外,1923年发现的康普顿(Compton)效应,也不能用经典理论解释.实验发现,高频率的X射线被轻元素的电子散射后,散射波的波长随散射角的增大而增大.这个结果也无法用经典理论说明.因为散射过程只涉及入射光与电子之间的能量和动量交换,而按经典理论,电磁波的能量只与振幅有关,而与波长无关,能量、动量的交换不应导致波长的变化.

对于经典物理学的这些困难,19世纪的许多有为的物理学家,其实是早有察觉,忧虑重重的.1859年,气体分子运动论的奠基人之一——麦克斯韦,就明确指出了经典比热理论的困难.十年后,他又重复强调了困难,并且指出这里存在着一些经典物理根本不可能解释的东西.以后,金斯等人又作过许多讨

论.正是麦克斯韦等人的这些真知灼见,使得美国著名物理学家费曼(Feynman)得以有根据地说:“人们经常听说 19 世纪后期的物理学家认为,他们已经了解了所有有意义的物理规律,因而以后所能作的只是去计算更多的小数位.某个人可能这么说过一次,其他人就争相传抄.但是彻底查阅当时的文献表明,他们所有的人都是对某些问题忧虑重重的.”^①正是因为当时这些有为的物理学家们,根本不像有些人所说的那样,躺倒在经典物理学的大厦里怡然自得,以为已经最后解决了一切物理学问题.恰恰相反,他们多年如一日地深入思考着经典物理学的困难,不固步自封,勇于进取,寻找解决这些困难的途径,提出各种新的物理概念和方法,这才会有量子论,继而有量子力学的出现,使人们的视野深入到原子世界.

§ 1.2 光量子 and 普朗克-爱因斯坦关系

深入考察一下经典物理学中的困难后会发现,这些困难都来自以往经典电动力学中,电磁波的能量只与振幅有关而与频率无关,而且能量连续变化的结论.要统一解决这些困难,应该从它们的共性着手.重新考察这一经典物理中过去认为颠扑不破,奉为基石的结论.于是,1900 年,为解决黑体辐射的困难,普朗克提出了能量量子化的观念.他假定黑体相当于一组连续振动的谐振子,振子的能量只能取最小能量单位 ϵ 的整数倍的值.黑体吸收或发射电磁辐射能量的方式是不连续的,只能以发射或吸收以 ϵ 为单位的“量子”的方式进行.每个量子的能量与频率 ν 成正比,

$$\epsilon = h\nu \quad (1.2.1)$$

式中的比例常量 h 称为普朗克常量.这和过去经典电动力学中电磁波的能量只与振幅有关而与频率无关完全不同.而且能量的吸收和发射是量子化的.利用能量量子化的概念和统计物理学,普朗克导出了以他的名字命名的普朗克公式,成功地解释了黑体辐射的实验结果.

1905 年,普朗克的量子化概念被爱因斯坦进一步推广.爱因斯坦提出,不仅黑体和辐射场的能量交换是量子化的,而且辐射场本身就由不连续的光量子组成.每一个光量子的能量 ϵ 与辐射场频率 ν 之间仍满足 (1.2.1) 式.爱因斯坦的光量子其实就是光子.由于光子以光速运动,根据狭义相对论的质能关系式有

$$\epsilon^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.2.2)$$

① 费曼,莱登,桑兹:《费曼物理学讲义》第一卷,上海科学技术出版社,1978,第 398 页.

c 是光速, m_0 是光子的静质量, 为零. 因此得到光子的能量和动量的关系是

$$\epsilon = cp \quad (1.2.3)$$

联立(1.2.1)和(1.2.3)式得

$$p = \frac{h\nu}{c} \mathbf{e}_n = \frac{h}{\lambda} \mathbf{e}_n = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \mathbf{e}_n = \hbar \mathbf{k} \quad (1.2.4)$$

式中 $\mathbf{e}_n$ 是光子运动方向上的单位向量, $\hbar = h/2\pi = 1.054\,573 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{e}_n \quad (1.2.5)$$

是波矢量. 公式(1.2.1)和(1.2.4)称为普朗克-爱因斯坦(Planck - Einstein)关系式.

利用普朗克-爱因斯坦关系, 可以解释下述实验结果:

1. 黑体辐射

光子可以被物质发射和吸收. 黑体向辐射场发射或吸收能量 $h\nu$ 的过程就是发射或吸收光子的过程. 因此光子数不守恒. 相应地光子的化学势为零. 另外, 光子是玻色子, 自旋 $s=1$, 简并度 $g=2s+1$ 应等于 3. 但由于电磁场存在横波条件, 满足一个约束方程, 所以光子的自旋简并度 g 应取为 2. 在物理上就表现为光子具有两个不同的偏振方向. 根据爱因斯坦光量子假说, 将辐射场看成是光子气. 利用玻色-爱因斯坦分布和(1.2.1)式, 可得光子气在频率间隔 $\nu \rightarrow \nu + d\nu$ 中的能量密度是

$$\rho_\nu d\nu = \frac{g}{Vh^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} 4\pi V p^2 dp \quad (1.2.6)$$

再利用(1.2.3)式, 最后得

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (1.2.7)$$

(1.2.7)式称为普朗克公式. 可以证明, 普朗克公式给出的场能密度满足斯忒藩-玻耳兹曼定律, 的确, 由

$$E = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.2.8)$$

令 $y = \frac{h\nu}{kT}$, 再注意到

$$\int_0^\infty \frac{y^3 dy}{e^y - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

完成(1.2.8)式的积分后可得

$$E = a T^4 \quad (1.2.9)$$

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \quad (1.2.10)$$

(1.2.9)式和(1.2.10)式与实验相符. 另外, 利用普朗克公式可以解释维恩位移律. 由(1.2.7)式给出的 ρ_ν 对 ν 的曲线与图 1.1.1 的实验结果相符.

2. 光电效应

当光子照射到金属的表面上时, 能量为 $h\nu$ 的光子被电子吸收. 根据能量守恒定律, 这个能量部分用来克服金属的逸出功, 使电子能逸出金属表面; 部分变为电子逸出金属后的动能, 即有

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_0 \quad (1.2.11)$$

式中 m 是电子质量, v 是电子逸出后的运动速度, W_0 是金属中电子的逸出功. 显然, 临界频率 ν_0 满足

$$\nu_0 = W_0/h \quad (1.2.12)$$

由(1.2.11)式可见, 当 $\nu < \nu_0$ 时, 电子不能逸出金属表面, 无光电效应出现; 当 $\nu > \nu_0$ 时, 有光电效应发生. 逸出的电子的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 与入射光的频率 ν 有关. 当入射光的强度增大时, 入射的光子的数目增多, 发生光电效应的电子的数目也增多, 从而使逸出的电子的数目也增多, 光电流的强度增大. 这就相当完整地解释了所有光电效应的实验结果.

3. 康普顿效应

康普顿效应是光具有微粒性的进一步的实验证据. 以 X 射线入射到轻元素或原子质量很轻的物质中, 对于这种物质, 电子在原子中的束缚能很小, 可以略去. 另外, 碰撞前电子的速度也很小, 可近似视为静止. 利用光子说, 把 X 射线被电子散射的过程看成是光子与电子的碰撞过程. 再利用碰撞过程中能量和动量守恒, 可解释康普顿、吴有训^①等人的实验结果: X 射线被轻物质中的电子散射后的波长将随散射角的增加而变大. 记碰撞前、后光子的能量分别为 $\hbar\omega$ 及 $\hbar\omega'$, 电子的静质量为 m_0 , 被光子碰撞后的速度为 v , 由能量守恒定律, 有

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1.2.13)$$

由垂直方向和水平方向的动量守恒又可得(图 1.2.1):

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar\omega'}{c} \cos \theta + \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cos \theta' \quad (1.2.14)$$

$$0 = \frac{\hbar\omega'}{c} \sin \theta - \frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \sin \theta' \quad (1.2.15)$$

^① 吴有训于 1921 年在美国芝加哥大学, 参与康普顿的 X 射线散射方面的开创性工作, 以精湛的实验技术和卓越的理论分析, 验证了康普顿效应. 1924 年与康普顿合作发表《经过轻元素散射后的钨 K_α 射线的波长》.