弹性波的散射理论

钟伟芳　聂国华　著

华中理工大学出版社

弹性波的散射理论

钟伟芳　聂国华著

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第10号

图书在版编目（CIP）数据

弹性波的散射理论/钟伟芳　聂国华著
武汉：华中理工大学出版社，1997年5月

ISBN 7-5609-1488-8

Ⅰ．弹…

Ⅱ．①钟…②聂…

Ⅲ．弹性波-弹性散射-理论

Ⅳ．O347.4

弹性波的散射理论

钟伟芳　聂国华著

责任编辑：佟文珍

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山　邮编：430074）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168　1/32　印张：14　字数：338 000

1997年5月第1版　1997年5月第1次印刷

印数：1—2 000

ISBN 7-5609-1488-8/O·165

定价：13.00元

内容简介

本书是关于异质体(夹杂物或孔洞)散射问题的专著。全书阐述了处理弹性波散射问题的重要理论和主要方法，总结了作者近10余年来在该领域的主要研究成果，同时也反映了国内外一些研究现状。

全书共九章。引论部分概述了弹性动力学各个发展阶段的重要工作；第一、二章阐述了弹性动力学和波动问题的基本理论和方法；第三章综述了有关弹性波散射问题的国内外研究概况，并重点介绍了六种理论和分析方法；第四章给出了度量散射效应的物理量——散射(微分)横截面的数学表达式，给出了一些重要面积分、体积分的解析结果，同时也对三类函数：Dirac、Heaviside 和 Bessel 函数的主要性质等进行了阐明；第五章至第八章具体采用等效内含物、积分方程(Born 近似)和边界元法分析了各向同性和各向异性介质中内含单个和多个异质体时的散射问题；第九章对一维、二维和三维弹性波反问题给予了分析，其中包括介质阻抗重建、形状识别和三参数同时反演等。

本书可供高等院校固体力学、地球物理学、地震工程学等专业的高年级本科生和研究生，以及相关领域内的科研人员参考，也可作为有关专业的参考教材。

前　言

弹性波在弹性介质中传播，当其遇到障碍物（如夹杂物、孔洞和裂纹等）时，将与障碍物发生相互作用，这种相互作用的结果使障碍物表面上任何一点成为一个新的波源，这些次生的波源向各个方向发出次生波，这种现象就是弹性波的散射，次生波即称作散射波，障碍物也就称为散射体。

弹性波的散射是弹性动力学学科中最重要的研究课题之一，它对于地球物理勘探和材料的定量无损检测等两个主要领域具有重大意义。迄今为止，国内外有关弹性动力学方面的专著或编著不下 40 种，然而关于弹性波的散射，尤其是以夹杂物、孔洞等异质体为主的散射体的波动问题，国内至今还未见到一本专门的著作。国外也不多见，其中主要是由 Y. H. Pao（鲍亦兴）和 C. C. Mow（毛昭宙）合著的《Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concerntrations》（《弹性波的衍射与动应力集中》，1973 年由 Crane and Russak 公司出版）。该书主要采用的分析方法是波函数展开法，对于像球体、圆柱体等规则、简单形状的散射体，该种经典方法能够有效地得到级数形式的精确解。但是对于多个或形状更加复杂的散射体，由于不能进行变量分离和难于克服邻接条件的困难，这种方法难以奏效。由此随后便发展了许多近似的处理方法，诸如 T 矩阵方法、射线方法、积分方程（Born 近似）、复变函数法以及边界积分方程-边界元法等等。这些方法的提出和使用散见于国内外有关学术刊物中。

作者自 80 年代中后期以来，一直致力于夹杂物（或孔洞）对弹性波的散射问题的研究，具体就各向同性和各向异性（如具有一个弹性对称面的各向异性体）介质中单个和有限多个异质体的散射，运用并发展了上述一些理论方法，如射线方法、等效内含物方法、积分方程（Born 近似）以及边界元方法等，得到了许多理论分析和

数值计算结果，其中有关异质体形状的体积分(面积分)、各向异性体反平面剪切运动的基本解以及一些近场、远场解具有重要意义。这本专著便主要总结了作者近10余年来的研究成果。作者希望该书的出版，能够对弹性动力学学科的发展，尤其是对于异质体的散射现象的研究起到促进作用。

全书共分九章和一个引论部分，具体内容安排如下：

引论部分概述了弹性动力学学科在各个发展阶段的主要进展，并对已问世的专著、编著和评述进行了介绍。

第一、二章阐述了弹性动力学和波动问题的基本理论和方法，包括重要的弹性动力学基本解、表象定理和变分原理；各种体波和界面波的特征和产生条件；积分变换法及其性质、定理等等。

第三章综述了有关弹性波散射问题的国内外研究概况，同时对经典的波函数展开法、积分方程法以及随后发展的 T 矩阵(转换矩阵)法、射线理论、复变函数法和等效内含物法给予了重点介绍。

第四章给出了平面入射波对应的衡量散射效应的物理量——散射(微分)横截面的数学表达式；解析得到了几个与散射体形状(如椭圆形、圆形、矩形的面域，椭球体、球体、椭圆柱体、圆柱体、立方体的体域)相关的面积分和体积分；阐明了经常要用到的 Dirac 函数、Heaviside 函数和 Bessel 函数的主要性质和相互关系等等。

第五章至第八章，具体就各向同性和各向异性弹性介质中内含单个或有限多个异质体情况，采用等效内含物方法、积分方程(Born 近似)法和边界积分方程-边界元法进行了关于散射场的分析，得到了散射位移远场及近场的积分方程式；运用双重 Fourier 变换及反演获得了各向异性介质反平面剪切运动(三参数问题)的基本解；给出了许多算例分析，包括散射场以及多个散射体之间的相互作用等等。

最后，第九章介绍了弹性波反问题的研究状况，并对一维问题的有关介质阻抗分布的重建，二维问题的有关散射体形状的识别

和三维问题中的三参数 λ,μ 和 ρ 的反演进行了具体分析。

本书的撰写工作主要由聂国华博士完成，钟伟芳教授修改并最后定稿。由于时间仓促，并限于作者水平，书中一定会有不足和错误之处，在此恳请读者不吝提出和指正。

华中理工大学出版社对本书稿进行了全面、深入和细致的修改、编辑工作，在此表示衷心的谢意。

钟伟芳(华中理工大学)
聂国华(同济大学)
1995.10 初稿
1996.6 修改搞

目　录

引　论

一、弹性动力学发展的早期重要工作

对弹性动力学问题进行研究已有数百年的历史。最早的研究针对两类常见的波动现象：乐调和水波，采用的手段限于定性的观察。自从伽利略(Galileo)时代起，对动力问题的定量分析，随着有关固体静力学的发展开始取得进展。

Galileo 于 1638 年对单摆的振动、共振现象及影响振动的因素进行了详细分析，牛顿(Newton，1686)稍后研究了水波及空气中声波的波速。Taylor (1713)，D'Alembert (1747)，Bernoulli (1755)和 Lagrange(1759)等人从不同的角度探讨了弦的动力问题。R. Hooke 在 1678 年提出了弹性体中应力-应变关系定律。这个定律成为弹性静力和动力理论的基础。

直到 19 世纪上半叶，人们还一直为弄清光的本质作着不懈的努力。一种主导观点是，光可以看成是扰动在一种弹性以太中的传播。Fresnel(1816)和 Young(1817)先后发现，在相互垂直的平面内偏振的两束光彼此不会发生干涉，Fresnel 由此将光解释为一种横波，即传播方向与位移方向垂直的波。这一工作推进了弹性固体理论的深入研究。

作为弹性动力学发展的最重要的标志是 19 世纪 20 年代初，Navier(1821)提出了弹性体平衡和运动方程。这一弹性体运动理论的创立大大推动了弹性波问题的研究。其后，Cauchy(1822)和 Poisson(1829)对弹性体理论进行了进一步的分析，他们在考虑弹性波的传播时先后(1828～1830)发现了两种波的存在，即横波和纵波。研究表明，用位移表示的运动方程的解可以用两个位移分量之和来表达，其一为某一标量势函数的梯度，其一为无散场。势函

数和无散位移分别满足含有纵波和横波波速的波动方程。然而,当时在 Poisson 给出的通解中并没有涉及符合无散位移分量的矢量势。

采用标量势和矢量势来求解波动问题,首推 Lamé。他于 1852 年得到了相应的通解形式。11 年后,Clebsch(1863)提出了 Lamé 解的完备性问题,至于其严格证明是由 Somigliana(1892),Tedone(1897),Duhem(1898)和后来的 Sternberg(1960)给出的。解的唯一性证明则是 Neumann 于 1885 年作出的。

对由于体力作用而产生的波动问题的研究最先的是 Stokes(1849)。他指出,Poisson 所导出的两个波方程分别对应于膨胀波和旋转波,并据此首次获得无穷介质中某点受突加集中力产生的位移场的奇异解(基本解)。后来,Love(1903)运用迟滞势对同一问题独立地进行了详尽的分析,进一步完善了 Stokes 给出的解。Christoffel(1877)还讨论了间断面的传播特性。

有关杆、板和壳体等结构的动力问题早期研究工作有:Euler(1744)和 Bernoulli(1751)先后导出了梁的弯曲振动方程,并得到相应于各种边界下的正则振动模态和频率关系式;Germain(1815)推出了板的振动方程;Navier(1824)建立了杆的纵向振动方程;Poisson 在 1828 年发展了用于杆振动分析的近似理论;Jaerisch(1880)和 Lamb(1882)独立分析了球体的一般振动问题;Rayleigh(1888)和 Lamb(1889)依据精确的弹性理论获得了板中波的频率方程;Rayleigh(1894)和后来的 Timoshenko(1921)还分别考虑了转动效应和剪切变形对梁的影响,从而对前述的 Euler 和 Bernoulli 梁的弯曲波理论给予了修正,这些修正理论对于近代有关杆的相关问题的研究仍起着重要的作用。另一个重要的工作是,Pochhammer(1876)对无限长圆柱体振动所作的精确分析。他运用分离变量的思想,将圆柱体的径向、环向、轴向坐标及时间进行分离,将位移表示成与时间、轴向坐标相关的无限谐和波列的形式,其波幅是环向角的正弦与关于径向坐标的贝塞尔函数的积,然

后利用圆柱体自由表面边界条件得到与波数有关的频率方程。后来，Chree(1889)进行了类似的研究。这一重要进展奠定了当今关于弹性圆杆的稳态和瞬态波动问题的理论基础。

Russell(1844)是第一个观察到水中的波群现象的人。他注意到，水中单个波的传播较作为整体的群波要快。Stokes 在 1876 年首先确定了群速度的解析表达式，Rayleigh 随后取得了进展。1887 年 Kelvin 群方法应用于水波研究中。该方法是对频散波积分表示的一个近似，也即现称之为静相方法。有关波群的分析，Havelock(1914)在其专著中给予了详细的论述。

Rayleigh 在 1887 年作出了重大发现，即对表面波(Rayleigh 波)的发现。这种波的产生源于在弹性半空间表面入射的一对平面谐和波：膨胀波和等容波。表面波沿着平行于表面的方向并以略小于等容波的波速(为等容波波速的 0.862～0.955 倍)传播，且随着远离表面的方向指数衰减。后来，Love(1911)在研究表面层对 Rayleigh 波传播的影响时，发现了另一种面波，即 Love 波。再后，Stoneley(1924)发现在不同介质的层与层交界面上还存在一种与 Rayleigh 波相同类型的面波，它被称为 Stoneley 波，这是一种波速与两种介质的性质有关的变态 Rayleigh 波，其产生与介质弹性常数和密度有关。

本世纪初，Lamb(1904)首次对半无穷弹性体中脉冲波进行了研究，形成了“Lamb 问题”。他应用稳态解的 Fourier 综合法考虑了四种典型的“源”，即表面法向线和点载荷，内部埋藏的线和点载荷。对于表面法向载荷，Lamb 得到了水平和竖向表面位移，响应包括膨胀波、等容波和 Rayleigh 面波。分析获知，远离“源”的所谓远场处，最大扰动是 Rayleigh 波。对于点“源”激发，Rayleigh 波以径向坐标值的平方根的倒数形式衰减。后来，Lamb(1916)本人还进行了推广工作，进一步分析了非脉冲形式的线和点载荷沿固定方向以常速运动的情况。以后对 Lamb 问题研究的有 Nakano (1925)。Lamb 问题对地震科学具有重要意义。这类工作在后面将

进一步介绍。

此外，对于冲击问题，早期的工作是由 Poisson(1833)和 Saint-Venant(1867)等人做的。开始考虑的是对两个圆柱体碰撞所产生的冲击，采用纵波理论进行分析。研究发现，理论结果不能与实验很好吻合。其后，Voigt(1882)作了一些改进，计及了两个圆柱体接触面的形状对冲击过程的影响。Hertz(1882)进一步研究，通过假设两个碰撞物体内部所诱发的应变为一种局部静力效应，从而获知冲击过程的持续时间和接触区域的尺寸和形状，最终结果与实验符合得很好。Hertz 由此成功地创立了冲击理论。后来，Sears(1908,1912)等人做了更广泛的研究。

对动力问题给出实验分析的早期工作有：E. F. F. Chladni 在 1802 年对梁和柱体进行了振动实验；J. Hopkinson(1872)首先对导线中的塑性波传播给予了实验分析。这里，需要提到的是两个重要的实验，即 B. Hopkinson(1914)和后来的 Davies(1949)对杆中的波所进行的实验研究。B. Hopkinson 的实验目的在于分析炸药爆炸或子弹射击撞到坚硬的杆表面时压力随时间的变化规律。实验用的杆件为圆柱形钢，由四条线挂成水平位置，在其一端加上用作测时器的短柱形颗粒，而另一端作用瞬变压力。当压力脉冲从一端传递到有测时器的另一端时，在测时器的自由端面上反射成拉伸脉冲，进而使测时器脱离杆端。通过测量测时器的动量确定出压力随时间的关系。Davies 率先设计了一个电测实验装置，这个装置用来连续记录压力脉冲引起的杆自由端的纵向位移，以实测的位移随时间变化的曲线为基础，通过微分获得压力与时间的关系(曲线)。后人为了纪念他们的创造性工作，将他们实验用的杆件分别称作 Hopkinson 压杆和 Davies 压杆。他们使用的装置至今仍广泛应用在包括地震波的探测和声学领域之中。

二、弹性动力学近代、现代发展状况

就弹性动力学发展过程来看，到 19 世纪末，比较完善的经典

理论已经建立。此后直到 20 世纪初的前后近半个世纪内，弹性动力学理论的发展总的来说没有得到重视。自第二次世界大战起，尤其在本世纪 50、60 年代，由于人们需要了解载荷高速冲击下的结构性能，地震现象与探测核技术等相关知识，弹性动力学的研究工作又大大向前推进，与之相关联的对声波和电磁波的研究也取得了进展。

在弹性动力学一般理论的发展中，Born 和 Wolf 在 1975 年证明了，对于瞬态波的 Kirchhoff 定理可以在 Fourier 综合中从相应于稳态波的 Helmholtz 定理中导出。这两个定理已成为 Huygens（惠更斯）原理的数学基础。其他学者，如 De Hoop（1958），Kupradze（1963），Morse 和 Feshbach（1953）作了类似的分析。

Gurtin（1972）在其专著 The Linear Theory of Elasticity 中，研究了将瞬态波函数展开为特征函数求解时特征函数正交集的完整性，Reismann（1967）给出了通解形式。虽然从理论上所有瞬态问题可用此方法来解答，但因特征函数的求解困难，至今尚无重大进展。

在对圆柱、板和圆柱壳等波导问题进行分析中，如前所述，Pochhammer 和 Chree 分别于 1876 年和 1889 年给出了圆柱体的频散关系，Rayleigh 和 Lamb 在 1888～1889 年间导出了板的频散关系，但对这些关系的详细分析和超越方程根的计算，直到本世纪 60 年代前后才有人作出。对于弹性介质，圆频率总是实数，但人们进一步研究发现，对于杆和板中的波存在虚值和复数波数，表征频散关系的曲线上因而出现许多波型的分支线，每一支线从圆频率为零开始延伸至无限。Mindlin 于 1951 年提出了一种处理板中波问题的近似理论，该理论成为发展板的高阶理论和杆理论的广泛基础。

对于层状介质频散关系的计算，针对多层其矩阵形式的频率方程变得很大，计算非常困难，Thompson[147]和 Haskell[54]发展了一种传播矩阵方法，即把对应于多层介质的大矩阵简化为与层数

相等的小矩阵的乘积。该方法大大简化了频散关系的计算，这对于地震勘探具有指导作用。

本世纪 30 年代，Cagniard(1939)研究出求解 Lamb 问题的一般方法，即是对 Lamb 问题使用了 Fourier 变换的位移场，运用 Laplace 变换求其逆变换，此后 De Hoop[34]作了进一步的改进。Cagniard 方法分别被 Pekeris[112]和 Chao[23]用来具体分析竖向力和水平力作用下的解，Johnson[64]也用 Cagniard-De Hoop 方法求得了点“源”作用的 Lamb 解，并同时给出了与“源”和“接收点”坐标相关的解的导数(Green 函数的导数)形式。这些解方便用作数值分析。对点“源”Lamb 问题进行分析的还有 Lapwood，Dix[38]，Pinney[114]，Pekeris 和 Lifson[111,113]，De Hoop[35]，Aggarwal 和 Ablow 等人[1]，Kawasaki 和 Sato 等[69]还考虑了双力偶“源”的情况。近年我国学者王可成和王贻荪[154]推出了半空间内竖向集中力产生的表面位移的表达式，郑健龙[168]运用叠加原理，依据全空间基本解导出半空间内部集中点“源”的基本解。至于弹性半空间表面移动集中载荷的瞬态响应，即“移动 Lamb 问题”，Gakenheimer 和 Miklowitz[49]于 1969 年研究过。对于全空间的“移动 Stokes 问题”，Payton[110]给出了求解过程。

近年的研究工作还有：Brock[20]分析了半平面和半空间中的表面接近于平面的波的传播问题，他在 1981 年还解答了在粘弹性半平面中非均匀螺旋位错运动的传播问题[19]。Tajuddin[140]研究了具有多孔性质材料的半空间中 Rayleigh 波的传播问题，Bedding 和 Willis[12]利用含有埋藏的各向异性层的半空间的弹性动力格林张量，获得了动力响应的合理表达式。

Furutsu[47]于 1980 年提出了随机介质中时间相关波的运算子方法，Engelbrecht[40]采用波运算子来描述瞬态波在二维非线性连续介质中的传播特性。Kennett[70]在 1984 年给出了用以解决反射和透射问题的反射运算子方法。这种算子的作用是在入射场中产生相应的反射和透射位移场。

Aleksandrov 和 Zelentsov[3]分析了粘弹性层中具有混合边界条件的二维动力响应问题，Braclay[17]运用射线级数法和由 Pade 所作的近似推广，给出了非均匀粘弹性介质中波的瞬态分析。Kamel 和 Felsen[66]探讨了 SH 波在低速层中传播的杂交 Green 函数。

对于板和杆，Ceranoglu 和 Pao[22]利用广义射线理论和 Cagniard 方法对平板中弹性脉冲和声发射的传播进行了详细的分析，Reeves 和 Greenspan[118]采用离散颗粒方法对应力波在细长杆中的传播进行了讨论，Nagaya[94]还研究了应力波在任意形状截面杆的传播。Wright[164]考察了弱冲击波在非线性弹性杆或颗粒状材料中的传播。Sugimoto[137,138]等人运用指数函数和幂函数形式的松弛函数，研究了扭转和纵向冲击波在粘弹性非线性弹性细圆杆中的传播问题。Malik 和 Singh[82]在 1984 年分析了非线性波在杆中的传播。

另一方面，从本世纪 60 年代以来，由于航空、航天等工业中结构元件设计的需要，高强、轻质的复合材料获得广泛的应用，各向异性、层状及复合材料介质中的波动问题也就成为众多研究者们广为涉足的一个热点研究领域，近年来在这个领域弹性波的研究取得了很大进展。

Nemat-Nasser 等[96]，Bedford 等[13]，Christensen(1975)，Ting 和 Mukunoki[92,148]等研究了简谐波和瞬态波在各向同性层的复合材料中的传播问题。Dey 和 Mukherjee[37]在分析由三层不同刚度和密度的材料组成的复合材料中 SH 波的传播时，考虑了初应力的情况。Tokuoka[150]还考虑了弹性波在不可伸长刚性纤维复合材料中的传播。Ting 和 Mukunoki[148]在 1979 年提出了分层各向异性弹性复合材料中波传播的粘弹性比拟理论，即采用等效的均匀粘弹性材料来替代分层介质。Anderson[4]，Nemat-Nasser 和 Yamada[97]，Tang 和 Ting[145]也先后讨论了各向异性分层材料中的波动问题。Shah[132]等研究了简谐波在周期性层状介质中的传播