

三维弹性体的滚动接触

J. J. 卡尔克 著
李自力 译
沈志云 孔祥安 审校

西南交通大学出版社

前 言

本书是写给机械工程专家，工程数学家，以及泛而言之，写给偏于理论研究的工程技术人员。它起源于我1957年在德尔夫特理工大学(Delft TH)教授R. 第曼(R. Timman)博士及荷兰铁路(Netherland Railways)工程师A. D. 迪·帕特(A. D. de Pater)博士指导下完成的硕士论文。我当时认为那时对问题的认识还仅仅停留在表面，因此从师于当时已是德尔夫特理工大学工程力学实验室教授的迪·帕特，以此问题来写我的博士学位论文。1967年完成的博士论文得到了铁路界的广泛承认，这一方面是其自身的价值，但更多地应归功于迪·帕特的不懈的推荐。当时我仍感到研究得不够，需要进一步的数学处理，所以又作为一名副教授加入了第曼教授的小组。于是就有了这本书。

感谢G. M. L. 格耐维尔(G. M. L. Gladwell)，他对本书手稿从风格到内容上进行了彻底的润饰。感谢我的妻子，一位工程数学家，她认真校核了手稿并提出了许多有益的意见。还要感谢G. F. M. 布拉特(G. F. M. Braat)，他也阅读了手稿，提了意见，并且还和J. 舒勒菲勒(J. Schonewille)一起为本书绘了图；以及A. V. M. 迪·菲特(A. V. M. de Wit)小姐，M. 邓·波特(M. den Boet)小姐和P. C. 菲亭(P. C. Wilting)小姐，她们为原稿打了字。对出版者的耐心等待，也要表达我的谢意。

J. J. 卡尔克

1990年7月17日于代尔夫特——鹿特丹

中译本前言

中国人民对我的书发生如此大的兴趣，特意将它译成他们的母语，决非偶然。诚然，在该书英文原版的封面上，有一个铁路车轮和钢轨的图案，表明了该书与铁路的紧密联系；而在当今之世界，唯有中国，国家设有铁道部，它除了管理着庞大的铁路网，承担着全部运量的70%以外，还拥有十几所大学和一所铁道科学研究院。

我要感谢这次翻译的发起者，中国科学院学部委员沈志云教授的热心倡议；感谢孔祥安博士不辞辛劳地参加校对工作。最后，当然不是最不重要的，要感谢本书的很有才能的译者李自力，他为使译文正确作了不倦的努力。我们预祝中译本取得圆满成功。

原著作者 J.J. 卡尔克教授
(签字)

附：原件

Preface to the Chinese Translation

It is no coincidence that the Chinese have taken such an interest in my book that they went to the trouble of translating it into their mother tongue. Indeed, the original English edition of the book bears on its cover a picture of a railway wheel and rail, signifying the close connection of railways with the book—and where in the world of to-day but China there is a country with a Ministry of Railways, which operates, beside an extensive railway net, several Universities and an Academy? And where in the world 70 % of all freight is transported by rail?

We would like to thank the initiator of the project, Academician Prof. Shen Zhi-yung for this flattering initiative, the external examiner of the translation Dr. Kong Xiangan for his painstaking work, and last but not least the very able translator of the book Li Zili for his untiring efforts to make this translation correct, and we wish the Chinese Edition every success.



J.J. Kalker

绪 论

接触力学可定义为以一个接触区相互接触的可变形体之间相互作用的力学。接触区以后还将称为“接触”，“接触范围”，“接触斑”，“接触面”等。在本书中，我们只讨论两个或两个以上的三维线性弹性固体在库仑 (Coulomb) 摩擦作用下的接触问题。以下我们所说的“弹性”都是指的“线弹性”。

接触可以区分为两种：集中接触和非集中接触（或称大范围接触）。如果接触区的尺寸相对于相互接触物体接触局部的特征尺寸来说不大，则称为集中接触。发生集中接触时，在弹性计算范围内，相互接触的物体可假设为半空间，而其接触边界条件则可由真实几何形状和真实运动来确定。如果接触不是集中的，则称为大范围接触。

集中接触的例子有：

两个弹性球的接触；

铁路车轮和钢轨的非轮缘接触。

大范围接触的例子有：

一个圆柱体压在一薄层弹性垫上；

螺母里的螺钉；

热压配合。

半集中接触则是相对于接触体的某一特征直径而言，接触区短轴很小而长轴不算小的一类接触。例如：

两个轴线平行的圆柱体间的接触；

许多无润滑滚柱轴承中的接触。

对半集中接触常可把物体当作二维的来处理，正如轴线平行的两圆柱体的接触。不过这一简化有时会太粗糙，例如，对滚柱轴承的接触，就是这样。

虽然原则上讲集中接触和大范围接触没什么不同，但在实际处理上存在差别。集中载荷对三维半空间的作用已有解析解（布希尼斯克 (Boussinesq), 1885, 塞路提 (Cerruti), 1882)。这为三维集中接触问题和某些三维大范围接触问题及三维半集中接触问题的计算开辟了道路。对大多数大范围接触问题，半空间假设既行不通也不必要，而要用有限元法求解。虽然有限元法在二维问题的计算中已广为采用，但在三维问题中的应用才刚刚开始。这就是集中接触和大范围接触实际存在差别的原因。因此，在第四章中，当我们讨论接触问题的一般变分原理和算法的理论部分时，所作的分析适用于库仑摩擦条件下的三维大范围接触。但本书的结果都是在半空间假设条件下得出的，故仅适用于集中接触和某些半集中接触问题。

关于三维集中接触问题的文章和著作已有很多。在无摩擦接触方面，有赫兹 (Hertz) 的巨著 (1882 a, b)。在摩擦接触方面，从 1949 年直到五十年代中期，有卡塔尼奥 (Cattaneo) (1938)，明德林 (Mindlin) 及其合作者。对三维滚动接触问题的研究，则是约翰逊 (Johnson)

于 1958 年开始的。

下列一些书是专门讨论接触力学的：

加林 (Galín) 分别于 1953 年和 1980 年出版了两本关于弹性和粘弹性接触问题的书。1953 年的那本大部分以木斯海里什维里 (Muskhelishvili) 的文章 (1946, 1949) 为基础，讨论二维理论。1980 年的这本书中有一大章论述三维无摩擦接触问题。

费彻拉 (Fichera) (1964)，杜汪特 (Duvaut) 和莱昂斯 (Lions) (1972) 建立了接触问题的变分理论，重点放在解的存在性和唯一性的证明上。杜汪特和莱昂斯还考虑了粘弹性接触和动态接触问题。

1980 年，格耐维尔 (Gladwell) 出版了一本关于接触力学的专著，主要考虑集中的或大范围的无摩擦接触或粘着接触。

1985 年，约翰逊的关于接触力学的著作问世了。在这本书中，他对集中接触理论及工程实践作了全面的介绍，对许多接触问题进行了讨论。其中有一章讨论弹性体的滚动接触，还有一章论述非弹性滚动接触。

奇库希 (Kikuchi) 和欧登 (Oden) 于 1988 年写了一本关于无摩擦和有摩擦接触力学的书，重点讨论有限元法和变分原理的理论基础。

本书仅讨论库仑摩擦条件下的三维弹性接触问题。主要是滚动接触，附带也涉及到无摩擦接触和摩擦滑移等其他形式的接触问题。本书选材的宗旨是成为上述著作的补充。书中的许多结果在以前的文章中已经发表过，但也有许多是新的、没有发表过的材料。下面介绍本书的内容。

第一章提出问题，建立模型，并导出了边界条件。这一章是引论，必须先读。后面各章都可单独阅读。

第二章对已建立的弹性滚动接触理论进行详细的评价。讨论有限元法和边界元法的精度和计算速度，并解释为什么半空间近似在适用的场合下可使程序的计算速度加快。这一章的对象主要是铁道车辆动力学家，目的在于帮助他们针对自己的工作选用适当的滚动接触理论。

在第三章，我们讨论接触问题的简化理论。约翰逊 (1985) 也讨论过简化理论，并称之为“垫子理论”。它在解释许多复杂的接触问题时极为有用，尤其是在滚动接触中。因此，就有了将它由一种定性理论发展为近似定量理论的尝试，并取得了成功。但这样做并不总是可行的，因而必须进行验证。而且，简化理论之所以有用，在于其程序的计算速度快。故在第三章，我们讨论了简化理论的推导、验证和数值分析。简化理论对轮轨理论及轮轨的轮缘接触现象很重要，还描述了大范围接触覆层现象，它可应用于生物医学力学，特别是在关节理论中。

杜汪特和莱昂斯于 1972 年建立了摩擦接触的变分理论，并在变分不等式的基础上证明了解的存在性和唯一性，但并未给出此不等式的物理解释。第四章提供了这方面的基础，并阐述和证明了以变分理论为基础，数值求解接触问题的起作用集算法。这一章的主要对象是接触力学家。

第五章给出了数值计算结果与应用，其中有许多有趣而又棘手的试算算例。该章力图对问题作全面的阐述。这一章考虑的对象是那些要验证他们自己算法的研究者。

附录 A 和 B 分别介绍了弹性理论和数学规划的一些基本概念。

附录 C 给出了一个计算半空间内部和边界上的弹性场的算法，其载荷为作用于边界平面

内一矩形区域上的均布载荷。

附录 D 是稳态滚动下三维弹性半空间理论向粘弹性的推广。接着介绍灵敏度分析理论（在第 4.3.6 * 节介绍）向时间周期性扰动下的弹性和粘弹性问题的推广。最后，解释一个事实，即为什么根据第四章的理论编制的程序 CONTACT 不能准确计算灵敏度，尤其是滚动接触的蠕滑和自旋系数，见卡尔克 (Kalker) (1967 a)。

附录 E 给出与赫兹理论及其有关问题和滚动接触线性理论的一些数表。

本书中给出的我自己的一些结果，是用两个程序得出的，即 ROLLEN（赫兹滚动接触：简化理论）和 CONTACT（完全弹性半空间接触理论）。

——ROLLEN 是用赫兹理论，赫兹滚动接触的线性理论及赫兹滚动接触的简化理论编写的。另外，它还可计算赫兹深沟道滚动问题。

——CONTACT 可以计算：

接触形成；

滑移问题，如卡塔尼欧问题，单步和瞬态的都可处理；

滚动接触问题，稳态和瞬态的均可；

半空间内的弹性场。

所有这些问题的计算，均适用于赫兹和非赫兹接触，接触体材料相同或不同等各种情况。计算中都按集中接触的三维均匀各向同性半空间考虑。

ROLLEN 和 CONTACT 的输入形式对用户来说很方便。掌握 ROLLEN 需要通读第一章和第三章的一部分；掌握 CONTACT 要弄懂第一、五章和第四章的一部分。

上述程序以录于软磁盘上的 FORTRAN 源程序形式提供，在 640 KB 的 PC AT 机上即可使用。有关价钱和其他情况，请与下面地址联系：

Prof. Dr. Ir. J.J. Kalker

Delft University of Technology

Faculty of Technical Mathematics and Informatics

P. O. B. 356

NL - 2600 AJ Delft

The Netherlands

FAX (31) (15) 787022

* 原文有误——译者注。

符号说明

一、一般符号

白正体的大写字母表示点集或指标集。

黑正体字母表示矢量或矩阵, 但 B, C, D, E, K 除外, 参见下面二*。

斜体字母表示标量。

所有符号都可带指标:

- 指标 a : 物体的编号, 取 1 或 2。
- 指标 i, j, h, k , 取 1 到 3, 或 x, y, z , 表示笛卡尔坐标分量。
- 指标 $\alpha, \beta, \gamma, \tau$, 取 1 到 2, 也表示分量。 τ 表示的是“切向分量”。
- 指标 I, J 表示单元号。

所有这些指标, 除 a 外, 除非有特别说明, 在乘积中, 在重复指标的整个取值范围内, 都服从求和约定。

所有其他指标都可用作标识符。

$(\cdot) = d/dt$, 物质导数。

$(\cdot)$ 可用作标识符; 另外, 它也可表示变量取 t' 时刻的值。

$i = \partial / \partial x_i$; j, h, k 类推。

“sub” 表示“服从所附加的条件”。

二、变量表

表中所列变量的定义可自定义它的那一节扩展到其他章节。变量表如下。注意, 在“参考”栏目中, 括号中的数字为公式的编号, 不带括号的则是章节编号。

符 号	定 义 及 说 明	参 考
A	轮廓曲率差	(1.58)
A_s	轮廓曲率	(1.54)
$A_s(y)$	型面函数	(1.59a)
$A(x, y), A_{i,j}(x, y), A_{i,j}(x_a - y_a)$	影响函数	(1.37), (2.39), (2.40), (4.39)
$A_{i,j,j}$	影响系数	4.3.7, (4.39) ~ (4.46)
$A_{c,s}(A_{c,s})$	(物体 a 上的) 可能接触区	(1.39)
$A_{p,s}(A_{p,s})$	表面上面力给定的区域	(1.39)
$A_{u,s}(A_{u,s})$	表面上位移给定的区域	(1.39)
$A(x_i)$	在 x_i 处起作用的不等式的指标集	(4.28 e)
标号 a	物体的编号, $a = 1, 2$	

* 原文有误——译者注。

符 号	定 义 及 说 明	参 考
$a, (a')$	接触(粘着)区沿滚动方向的半轴长	(1.58 b), (2.11)~(2.12)
$a_1 \leq a_2$	接触椭圆半轴长	(1.57 a), (1.58)
B	轮廓曲率差	(1.58)
B_a	物体 a 之轮廓曲率	(1.54)
$B_a(y)$	物体 a 之轮廓	(1.59 a)
B	完全椭圆积分	(1.57)
B	约束指标集	(4.31 a)
$B(x_i)$	在 x_i 处起作用的约束指标集	(4.28 f)
b	接触椭圆横向半轴长	(1.58 b), (1.58 d)
C	余能	(4.21 b), (4.27 b), (4.47)
$C^* = -C$	余能	(4.47)
C_{ij}	蠕滑和自旋系数	2.2.2, (2.14)
C	完全椭圆积分	(1.57)
C	接触区	4.3.3
CC	有一共同方法的程序的集合	5.1
$c = \sqrt{ab}$	a, b : 接触椭圆之半轴长	(1.58 d)
D_1, D_2	曲率差	(1.54), (1.58)
D	完全椭圆积分	(1.57)
d	微分算子	
E	杨氏模量	附录 A
E_{ijkl}	弹性模量	附录 A
E	完全椭圆积分	(1.57)
E	外部区域, $A_c \setminus C$	4.3.3
e	变形后的局部距离, 即变形后距离	1.2, (1.1), (1.5)
e_i	局部滑移	(1.11)
e_{ij}	应变	附录 A
F_i	$i = 1, 2, 3$ 或 x, y, z , 接触区传递的总力	1.4, (1.64)
FEM	有限单元法	
$f; f_{stat}, f_{kin}$	摩擦系数: 静摩擦系数, 动摩擦系数	1.4, (1.31)
f_i	体力	(4.1), 附录 A
G	合成刚性模量	(1.44)

符 号	定 义 及 说 明	参 考
G_a	物体 a 的刚性模量	(1.44)
g	1. 切向力限值 2. 接触椭圆的轴长比, a_1/a_2	1.4 (1.57 a)
g_i	约束函数	(4.28 a, c)
H	粘着区	4.3.3
h	变形前的局部距离, 即未变形距离	图 1.3, (1.5)
h_a, h_{a1}	物体 a 视为刚体时的线速度	1.7.3, (1.73)
K	弹性差参数	(1.44)
K	完全椭圆积分	(1.57)
k	接触椭圆偏心率	(1.57 a)
L, L_i	柔度参数	(3.10), (3.53)
L'_i	柔度参数的值	(3.51), (3.52)
M_i	接触区上, 沿 z 轴方向作用于物体 1 上之力矩	
N	非作用约束的指标集	(4.31 a)
$N(x_i)$	在 x_i 处非作用约束的指标集	(4.28 g)
n, n_i	V 上的外法向, 可带下标 a	(4.3 c)
O	1. 坐标系的原点 2. 数量级符号	1.2
$\overline{p_i}$	A_i 处给定的表面力	(1.39), (4.4)
p, p	面力, 可带所有各种指标	附录 A
p_i, p_i	作用于物体 1 上的切向力	(1.32)
p_i	沿 z 轴方向作用于物体 1 上的法向力	(1.6)
Q	所有指标的指标集	(4.28 h)
q	1. 经过的距离 2. 接近量	(1.24) (1.53), (1.55)
q_i	原点处的刚体滑移	(1.62)
R_a	物体 a 在 O 处沿 x 方向的曲率半径	(1.27)
R_{a1}	物体 a 在 O 处沿 x_i 方向的曲率半径	(1.45)
RNJLK	实现某一方法的各种途径的集合	5.1

符 号	定义及说明	参 考
S_s	局部滑移	(4.8 a)
S	滑动区	4.3.3
dS	面积元素	
s_i, s_r	局部滑动	(1.15), (1.20) ~ (1.26)
s_{ij}	应力偏量	(5.18)
t	(当前) 时刻	1.3
t'	前一时刻, $t' \rightarrow t$	1.3
U	势能	(4.21), (4.27), (4.48)
U^*	势能	(4.51 a)
u, u_i, u_r	位移差	(1.21)
$u_{a,i}, u_a$	物体 a 的位移	1.2
$u'_{a,i}$	物体 a 在时刻 t' 的位移	(1.7), (1.8)
$\overline{u_{a,i}}, \overline{u_a}$	在 $A_{a,i}$ 上给定的位移	(1.39), (4.4)
V	滚动速度的大小	(1.21 c)
V	物体所占的体积	
V_a	物体 a 所占的体积	(4.1)
dV	体积元素	
v, v_i	滚动速度	(1.21 c)
v_R	滚动方向	(1.23 b)
$W_a, W_{a,i}$	物体 a 关于其轴线的角速度	1.7.3 (1.72)
W_r	局部刚体滑移	(4.8 b)
w, w_i, w_r	局部刚体滑动	(1.21 b)
w_i	库仑定律的拉格朗日乘子	4.3.3 第 4 点
w_R, w_{Ri}, w_{Rr}	相对局部刚体滑移	(1.21 e)
X	$x = x_1 = 0$ 平面	
x, x_1	滚动方向的坐标	(1.23) 到 (1.24) 间
x_i	笛卡尔坐标, 原点为 O	1.2
$x_{a,i}$	物体 a 的笛卡尔坐标	1.7.1
$x_a, x'_{a,i}$	未变形状态下时刻 t 的质点坐标	1.2
$x'_{a,i}$	同 $x_{a,i}$, 但在时刻 t'	1.2
Y	$y = x_2 = 0$ 平面	

符 号	定义及说明	参 考
$y = x_2$	横向坐标	
$y_{.i}, y_{.i}$	变形状态下时刻 t 的质点坐标	1.3
$y'_{.i}$	同 $y_{.i}$, 但在时刻 t'	1.3
Z	1. $z = x_3 = 0$ 平面 2. 可行集	(4.28 d)*
$z = x_3$	指向物体 1 内部的法向坐标	
δ	变分算子	第四章
$\delta_{i,j}$	克罗内克 δ (Kronecker delta), $= 1$, 当 $i = j$; 否则 $= 0$	
η	横向蠕滑率	(1.82)
ν	合成泊松比	(1.44)
ν_a	物体 a 的泊松比	
ν_i	拉格朗日乘子	(4.29)
ν_i	无嵌入条件的拉格朗日乘子	4.3.3 之表中第 4 点
ξ	纵向蠕滑率	(1.82)
ρ	密度	
$\sigma_{i,j}$	应力	附录 A
σ_i	等效应力	(5.19)
ϕ	自旋蠕滑率	(1.82)
ω_i	主曲率平面间的夹角	1.7.1

* 原文有误——译者注。

目 录

前 言	1
中译本前言	2
绪 论	3
符号说明	6
第一章 滚动接触问题	1
1.1 问题的表述	3
1.2 接触形成的数学模拟	4
1.3 滑动的数学模拟	7
1.4 摩擦的数学模拟	12
1.5 完全边界条件	14
1.6 半空间近似法	15
1.6.1 许多几何体可在弹性方面相似	16
1.6.2 $A(x, y)$ 可精确计算	16
1.6.3 在半空间问题中, 准同一性 (Quasiidentity) 普遍存在	16
1.6.3.1 帕那格奥托波罗斯 (Panagiotopoulos) 算法	16
1.6.3.2 帕那格奥托波罗斯算法的代用算法 (KOMBI)	17
1.6.3.3 约翰逊 (Johnson) 算法	17
1.6.3.4 对称性与准同一性	17
1.6.3.5 明德林 (Mindlin) 方法	19
1.6.4 三维接触问题的精确解	19
1.7 某些实例的边界条件	19
1.7.1 赫兹问题	19
1.7.2 集中或半集中非赫兹接触的无摩擦或准同一接触形成	24
1.7.3 轴线几乎在一个平面内的旋转体的摩擦边界条件	27
1.7.3.1 集中接触, 如赫兹接触, 的几何关系	30
1.7.3.2 在共形滚道中滚动的球	31
第二章 回 顾	32
2.1 无摩擦接触	32
2.1.1 单元法	33
2.1.1.1 弗里曼 (Fridman) 和切尼拉 (Chernina)	34

2.1.1.2	后来的研究者	34
2.1.1.3	半空间的影响函数法: 单元的选择	35
2.1.1.4	单元的精度	37
2.1.1.5	结 论	38
2.2	弹性滚动接触	39
2.2.1	卡特 (Carter) 和弗罗姆 (Fromm)	40
2.2.2	滚动接触的无滑动理论	42
2.2.2.1	约翰逊自旋理论与精确值的比较	43
2.2.2.2	费妙伦 (Vermeulen) 和约翰逊的无自旋理论与精确值的比较	43
2.2.2.3	通过对拉普拉斯方程分离变量计算 C_{ij} 的精确值	44
2.2.2.4	推广的加林定理及有关计算	45
2.2.2.5	条形理论/线接触理论	46
2.2.2.6	半空间的 IF 法	47
2.2.3	非线性, 有限摩擦滚动接触	48
2.2.3.1	约翰逊和费妙伦—约翰逊	48
2.2.3.2	条形理论	51
2.2.3.3	简化理论	52
2.2.3.4	第一个精确理论	53
2.2.3.5	二维情形的线性规划方法	54
2.2.3.6	第 2.2.3.5 节方法向三维情形的推广	59
2.2.3.7	建立在杜汪特 (Duvaut)—莱昂斯 (Lions) 理论基础上的方法	61
第三章	简化接触理论	63
3.1	线性弹性理论摘要	63
3.2	弹性薄覆层	64
3.3	无摩擦接触时的验证	65
3.3.1	与梅杰斯 (Meijers) 理论的比较	65
3.3.2	与赫兹理论的比较	68
3.3.3	结 论	71
3.4	摩擦压缩	71
3.5	FASTSIM 算法	73
3.6	滑 移	75
3.6.1	$\psi = 0$, $\mathbf{w} = (L_1, 0)^T$, 椭圆接触区的情形	75
3.6.2	$\psi = L_1$, $\mathbf{w} = 0$	76
3.7	稳态滚动接触	76
3.7.1	全粘着解	77
3.7.2	有限摩擦系数	78

3.8 瞬态滚动接触.....	83
3.9 求 L_i 的另一方法	84
3.10 关于切向问题简化理论的结论	84
第四章 接触问题的变分与数值理论	85
4.1 接触问题的虚功原理及其对偶.....	85
4.1.1 虚 功.....	85
4.1.2 余虚功.....	89
4.2 在弹性理论中的应用.....	92
4.2.1 解的势能最小, 余能最大及解的唯一性.....	93
4.2.2 $\partial g \neq 0$ 的情形	96
4.2.3 存在一唯一性理论.....	97
4.2.4 表面力学形式.....	98
4.2.5 余能原理和势能原理在数值计算中的比较.....	99
4.3 方法的实现.....	99
4.3.1 基本算法.....	100
4.3.2 接触问题的离散化.....	105
4.3.3 4.3.1 节的算法在半空间接触问题上的应用	108
4.3.4 弹性和粘弹性稳态滚动.....	113
4.3.5 给定总力的分量.....	113
4.3.6 灵敏度.....	114
4.3.7 半空间中影响函数的计算.....	114
4.3.8 半空间的表面下弹性场.....	115
4.3.9 关于向非集中接触推广的说明.....	115
第五章 数值计算结果	116
5.1 法向接触问题.....	116
5.1.1 验证 (法向接触)	118
5.1.2 由 RNJLK 和 CC 得到的新结果	121
5.2 准同一摩擦接触问题.....	126
5.2.1 验 证.....	127
5.2.1.1 卡塔尼欧 (Cattaneo) 滑移.....	127
5.2.1.2 明德林滑移	128
5.2.1.3 稳态滚动的蠕滑和自旋系数	129
5.2.1.4 稳态滚动的费妙仑-约翰逊理论及其推广	130
5.2.1.5 费妙仑-约翰逊理论及其推广的验证.....	133
5.2.1.6 布里克尔 (Brickle) 的实验与 CONTACT 和 FASTSIM 的比较	135

5.2.2 赫兹型摩擦滚动的结果.....	135
5.2.2.1 总的切向力	135
5.2.2.2 粘着区和滑动区	137
5.2.2.3 面 力	138
5.2.2.4 表面下应力	139
5.2.2.5 瞬态滚动接触	141
5.2.2.6 关于表面波磨的一些看法	143
5.3 非准同一摩擦接触问题	144
5.3.1 验 证	145
5.3.2 新的结果	146
5.3.2.1 斯本思 (Spence) 压缩的卸载过程	146
5.3.2.2 斯本思压缩到稳态滚动的过渡过程	146
第六章 结 论	149
附录 A 线性弹性理论的基本方程*.....	150
附录 B 数学规划基础	153
附录 C 半空间中弹性场的数值计算*.....	159
附录 D 三维粘弹性体的稳态摩擦滚动接触及向接触扰动的推广	171
附录 E 表	185
参考文献	192
索 引	201
译名对照表	208

第一章 滚动接触问题

本章中我们讨论连续体滚动接触理论，重点放在滚动的连续性特征上，如：接触区如何在弹性实体间形成，切向力在接触区和弹性体内如何分布等。在一个有摩擦的刚体系统内，物体要么相互滑动，要么摩擦力使它们粘在一起。在一个有摩擦的弹性系统内，则可能在接触区的某一部分上有滑动，而在其他部分上则相互粘着。结果，物体好象是在接触上缓慢地滑行。这一现象称为蠕滑。图 1.1 为刚体系统和弹性体系统的比较，它表示了滑动 v^* 和同时产生的切向力 F 。在刚体系统中，滑动一出现，力 F 就跃升至最大值，如图 1.1(a) 所示；相反，在弹性系统中，如图 1.1(b) 所示，力 F 逐渐增大至其饱和值。实际上所有物体都是可变形的，因而图 1.1(b) 的情形事实上是普遍成立的，只是 $v-F$ 曲线中的初始斜率不同而已。是用图 1.1(a) 还是 1.1(b) 来近似模拟一个给定的问题，要视其性质及模型所需的精度而定。

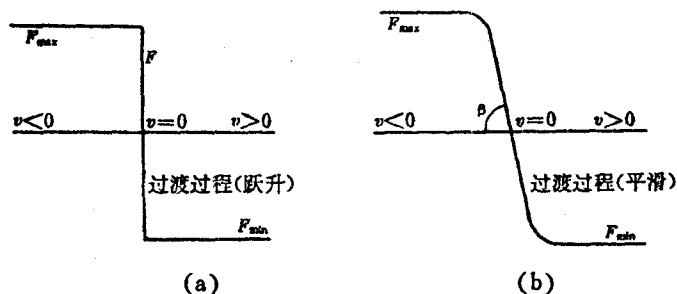


图 1.1 滚动中力 F 与滑动 v 的函数关系
(a) 刚体系统；(b) 弹性系统。 β 为初始斜率

如果感兴趣的是系统的整体运动，比如在研究自行车的运动时，那么用图 1.1(a) 来近似就足够了。相反，在有些问题中，接触的弹性性质起着很重要的作用。下面我们列举一些这样的问题。

A. 铁道车辆的寄生运动与稳定性

考虑一铁道车辆，车下有两台转向架，它由构架和两套轮一轴组，称为轮对，组成。铁路车辆的主运动是以前转向架沿轨道方向的滚动前进。但是，在主运动上，还迭加了一个寄生运动，即转向架和车体沿轨道横向的运动。确定该寄生运动是否持续下去很有意义。如果是，那么车体的运动将会很剧烈；如果不是，则车体的运动很平稳。显然，这种寄生运动只能用图 1.1(b) 那样的模型来描述。

B. 印刷机的图象失真

胶板印刷机主要由包有胶皮的两个钢滚筒组成。一个滚筒上有要印的图形，并在适当

* 以下简称波磨——译者注。

的位置涂上油墨，另一个滚筒送纸并将纸压向胶版滚筒。但是由于弹性，胶版会发生变形，随之印出的图形也会变形，我们要知道是否这种变形小到可以忽略不计，否则如何才能减小这种变形。这一问题包含了所有连续体滚动理论的典型特征：运动学方面很简单，注意力要集中在物体的弹性性质方面。

C. 轴承的能量损失

轴承被用来将一定的载荷从轴箱传到轴上。它的运动已完全确定。但还要考虑其它问题，如：应使能量损失最少，或者说，保证轴的平稳运行。这就要深入研究轴承的摩擦特性。用图 1.1(a) 的刚体系统不能满足要求，需要图 1.1(b) 这种更为复杂的模型。

D. 型面研究

考虑两个相互滚动的物体。在它们之间将产生一个接触区，传递法向力和切向力。摩擦和滑动在接触区上产生，从而产生磨损。一种形式的磨损是微小的颗粒从接触物体上脱落，因而物体形状发生变化。这又会影响到接触区和作用在上面的力。磨损的发展和物体形状的变化很值得注意，它对零部件的更换体制有重要影响。作为特例，我们列举铁路部门的两则应用。

D.1 铁路轮、轨型面的研究

接触物体是铁路车轮和钢轨。轮和轨的相对运动非常复杂且变化多端。然而可以发现，轮和轨磨合后的形状都趋于标准的形式。通过理论研究和模拟仿真得出这种标准，将是十分有意义的。

D.2 铁道轮/轨的波浪形磨损

目测许多铁路轨道表明，钢轨表面并非平直的，在沿轨道方向稍有起伏，其波长约为 6 cm，称为轨道的波浪形磨损*。在有的路段，这种磨损尤为严重。许多研究人员都在寻求对这种现象的解释，但要么一无所获，要么得出的结论认为所有轨道都会出现波磨。显然，情况非常复杂，波磨的原因可能有好几种。但无论如何，它是一种必须用连续体滚动理论才能解释的磨损现象。

E. 汽车轮胎特性

汽车轮胎是个非常复杂的力学系统。它的运动复杂而又具有显著的连续介质特点。要建立汽车轮胎的精确理论还不是目前能力所及，但是已有许多很好的近似理论。这里我们列举一些复杂因素：轮胎的结构复杂，一般由软橡胶和钢丝网组成；轮胎表面有凸纹、不是实体，而是充气的；外形复杂；而且车轮可以自由转动，因而可以有比铁路车轮大得多的滑动；汽车轮胎的品种又如此繁多。所有这些都表明汽车轮胎是连续体滚动理论最棘手的对象。