

TURING 图灵新知

Coursera热门课程
《数学思维导论》配套教科书

Introduction to Mathematical Thinking

数学思维导论

学会像数学家一样思考

[美] 基思·德夫林 著 林恩 译

 中国工信出版集团

 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING

图灵新知

Introduction to Mathematical Thinking

数学思维导论

学会像数学家一样思考

[美] 悉思·德夫林 著 林恩 译



人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

数学思维导论:学会像数学家一样思考/(美)德夫林著;林恩译. —北京:人民邮电出版社,2016.1

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-41047-4

I. ①数… II. ①德… ②林… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1—49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第275625号

内 容 提 要

这是一本写给高中生、大学生以及所有希望提高分析思维能力者的数学思维入门书。它将教你学会像数学家一样思考,顺利完成从中学数学到大学数学的过渡,或者让你掌握在各行各业获得成功必备的关键性思维能力。阅读本书只需高中程度的数学。同时,本书也是 Coursera 热门课程《数学思维导论》的配套教科书,配合线上课程,必能获得更好的学习效果。

◆ 著 [美]基思·德夫林
译 林 恩
责任编辑 楼伟珊
责任印制 杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本:880×1230 1/32
印张:4.75

字数:106千字 2016年1月第1版
印数:1-4000册 2016年1月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字:01-2013-3127号

定价:32.00元

读者服务热线:(010)51095186转600 印装质量热线:(010)81055316

反盗版热线:(010)81055315

广告经营许可证:京崇工商广字第0021号

前 言

许多学生都曾在从中学数学到大学数学的过渡中遇到过困难。即便他们中学时数学学得很好，他们中大多数也有一段时间难以适应从 K-12 到大学的过渡：因为 K-12 的数学教育主要关注的是掌握解题过程，而大学数学教育主要要求掌握“数学思维”。尽管最终他们大多还是成功地渡过了难关，但还是有一些学生做不到，从而放弃了数学，转而选择其他专业（该专业可能不再属于科学领域，也可能还是与数学相关）。因此，大学里通常会开设一门“过渡课程”来帮助大学新生完成这场转变。

这本小书就是为了配合这样一门课程而写的。不过，它并不是一本传统意义上的“过渡课程教科书”。人们一般把过渡课程当作一门速成课程，在这门课上教给大学新生（以及中学高年级学生）数理逻辑、形式证明、一些集合论以及少量的初等数论和初等实分析，而我试图帮助学生培养的是一种至关重要却又难以捉摸的能力：**数学思维**（mathematical thinking）。数学思维与

“做数学”不一样，后者往往涉及一些套路的应用以及一些繁重的符号运算。与之相比，数学思维是思考世间万物的一种独特方式。它并不需要与数学有任何关系，尽管我认为数学的某些部分为学习如何使用这种方式思考提供了理想的背景。在本书中，我主要关注的也是那些领域。

数学家、科学家和工程师都需要“做数学”。但对于 21 世纪的生活来说，拥有数学思维将使每个人都或多或少受益。（数学思维不仅包括量化推理能力，也包括逻辑与分析思维等所有关键性的能力。）这就是我试图使本书对所有希望或需要拓展改进他们的分析思维技能的人可读的原因。一旦人们在掌握基本的逻辑与分析思维的基础上更上层楼，真正掌握了数学思维，那他们所得到的回报将至少不亚于 21 世纪社会发展所带来的其他优越条件：数学将从令人困惑、令人沮丧、有时看起来高不可攀的，变成可理解、虽然困难但却可行的。

20 世纪 70 年代晚期，我在英国兰开斯特大学教书时开设了一门课程，它是第一批大学过渡课程之一。1981 年，我还出版了一本过渡课程教科书《集合、函数与逻辑：抽象数学引论》，这也是第一批过渡课程教科书之一。^①现如今，当我教授这样一门课时，我的安排跟以前的有所不同，会使它着眼于更宽泛的“数学思维”。同样地，本书也与上面提到的那本书有所不同。^②当我

① 现在它已经出到了第三版：*Sets, Functions, and Logic: An Introduction to Abstract Mathematics*, Chapman & Hall, CRC Mathematics Series.

② 由于上面那本书与这本新书均来自于我所开设的过渡课程，两本书的内容仍有大量重叠，我的这两本书与由其他作者所著的过渡课程教科书之间的情况也是如此。但这本书的重点不一样，目标读者也不一样，它的目标读者比其他书的目标读者范围更广。

明白了那些更为人熟知的过渡课程及其教科书背后的原理后，我现在所开设的课程以及配合它的这本书试图能够为更大范围的受众服务。（诚然，逻辑为数学推理提供了一个有效的模型，而这也正是最初人们研究该领域的原因，但我已不再认为学习逻辑是培养实用的逻辑推理技能的最佳途径，因此我不再将时间花在形式化的数理逻辑上。）在采用这种更开阔的社会化视角后，我相信我的课程以及这本书将不仅仅能帮助大学数学新生成功完成从中学到大学的过渡，它们也将能帮助任何有需要的人去提高他们的推理技能。

出于某种原因，过渡课程教科书通常是非常昂贵的，在某些情形下价格甚至超过一百美元，这对一本也许最多只能用一个学期的书来说是一笔非常大的数目。本书是为配合长仅五至七周的过渡课程而设计的，因此，我决定将其作为一本低成本的按需印刷的书自主出版。不过，我与一位有经验的专业数学教科书编辑乔舒亚·费希尔（Joshua D. Fisher）建立了密切合作，他在出版前通读了整部原稿。最终你所看到的这本书离不开他的专业知识的帮助，为此我非常感激他。

基思·德夫林
斯坦福大学
2012年7月

目 录

导论 本书是讲什么的?	1
第 1 章 什么是数学?	9
1.1 不止是算术	10
1.2 数学符号	13
1.3 现代大学数学	15
1.4 你为什么需要学这些?	19
第 2 章 语言的精确化	23
2.1 数学陈述	24
2.2 逻辑联结词“与”、“或”、“非”	31
2.3 蕴涵	40
2.4 量词	58

第 3 章 证明	79
3.1 什么是证明?	80
3.2 反证法	82
3.3 证明条件式	86
3.4 证明含量词的陈述	90
3.5 归纳证明	93
第 4 章 证明一些关于数的结论	103
4.1 整数	103
4.2 实数	114
4.3 完备性	118
4.4 序列	123
附录 集合论	129
译后记	137
索引	139

本书是讲什么的？

亲爱的读者，

在写本书的时候，我考虑的是这样两类读者：(1) 希望（或者可能）学习数学或数学相关专业的大学新生；(2) 出于某些原因，希望或者需要发展和提高分析思维技能的人。不管怎样，他们关注的都是学习用某种（非常强大的）方式思考。

从本书中，你不会学到任何数学套路，更不需要应用任何数学套路！尽管最后一章的重点是数（初等数论和实分析基础），但我只放入了极少量关于这部分内容的“传统”数学材料。这一章仅仅展示了一些精彩的范例。长期以来，这些范例帮助数学家们发展分析思维技能，而这种技能也正是我将在本书中通篇描述的东西。

19世纪期间，不断提高的社会民主化和“扁平化”，使每一位公民拥有更多的自由和机会，在商业或社会中扮演重要及自主的角色。与此同时，大众对分析思维技能的需求也随之增长。今天，当代民主社会给人们提供了自我发展和提升的机会，而对

任何希望能够充分利用这些机会的人来说，优秀的分析思维技能显得比以往任何时候都更加重要。

数十年来，我都在教授那些在大学^①（纯）数学上获得成功所需要的思维模式，并写作关于这方面的书。然而，直到最近十五年，在为产业界与政府提供了一部分咨询工作后，我才了解到，商业和政府领导人最欣赏的雇员恰恰正是具备“数学思维技能”的人，而该能力也正是我的课程与书所着重培养的能力。很少会有 CEO 或政府实验室主任说，他们需要有特定技能的人；相反，他们需要的是，在必要时能够学习新的特定技能、拥有优秀分析思维技能的人。

根据这些来自学界和商界的互不相同却明显相互联系的经验，我决定尝试用一种能够被更广泛的受众接受的方式构思写作。

话虽如此，这篇导论的其余部分还是主要针对那些需要学习一些（纯）数学课程的大学新生。而正如我刚才所讨论的那样，对于一般读者，我将要讲述的内容的价值在于，掌握现代纯数学所需要的数学思维技能，正是在各行各业中获得成功必备的关键性思维能力。

* * *

亲爱的学生，

正如你们即将发现的，从中学数学到大学水平（纯）抽象数学的过渡是很困难的。这并不是因为数学变难了。那些成功完成了过渡的学生可能会说，从许多方面来讲，大学数学其实是变得更容易了。就像我之前所提到的那样，许多人之所以会遇到这个问题，不过是因为重点变了。在中学，重点主要是掌握解决不同

^①贯穿全书始终，我将用“大学”指代“大学或学院”。

类型问题的套路，这使得学习过程变得像是阅读并且掌握一本数学烹饪书中的食谱。而在大学，重点成了学习用一种不同的、特殊的方式思考——像数学家一样思考。

（事实上，并非所有大学数学课程都是如此。那些为科学和工程专业的学生设计的数学课程常常与构成中学数学最难部分的微积分课程并无二致。真正不同的是数学专业的那些数学课程。不过由于从事科学及工程领域中一些较高级的工作通常需要学习一些数学专业的课程，科学及工程专业的学生可能也会遇到这种“不同类型”的数学。）

用数学的方式思考并不是一种不同的数学，它是一种数学视角，这种视角更开阔，更与时俱进，但却不会因为它的广度而流于浅薄。中学数学必修课通常强调数学套路而在很大程度上忽略了数学的其他部分。对于你们而言，大学数学起初确实像是一门完全不同的学科。当初我开始学习本科数学的时候，情况也是如此。如果你在大学里学习数学专业（或者像数学一样难的学科，如物理），那么你在中学时数学一定很好。这意味着，你一定十分擅长掌握及遵循既有套路（并且从某种程度上说，是在一定时限内完成）。中学教育体系嘉奖你，也正是因为这一点。然后你升入了大学，所有的规则都变了。事实上，根本没有规则可依，或者即便有，你一开始也是感觉仿佛教授们把它们偷偷藏了起来，秘而不宣。

为什么当你进入大学后，重点发生了改变？答案很简单。教育是为了学习新技能及提高办事能力的。你能从中学毕业，便表示你已能学习新的数学套路，再教更多同样的东西给你也没什么用了。无论何时，只要你需要，你都能学习新的技能。

例如，当一名钢琴学生掌握了一首柴可夫斯基钢琴协奏曲后，只需要一点点练习，而不需要再学什么新东西，他就能演奏另一首。从那时起，该学生便该考虑如何发挥他的全部才能以演奏其他作曲家的作品，或者更充分地理解音乐以创作自己的作品。

类似地，对数学而言，你在大学时的目标是培养能够让你解决新鲜问题的思维技能。这些问题可能是现实生活中的实际问题，也可能是来自数学或科学的问题，而你并没有解决这些问题的标准做法。而在某些情形下，这样一种标准做法可能并不存在。（当初两位斯坦福大学研究生拉里·佩奇和谢尔盖·布林在研发一种新的搜索信息的数学算法时，情况便是如此。后来利用这种算法，他们创立了 Google。）

让我们换个说法来更清楚地说明，为什么数学思维在现代世界中会如此珍贵。在大学前，你在数学上获得成功是通过学习“在盒子内思考”；而在大学时，你在数学上获得成功是通过学习“跳出盒子思考”，这种能力是今天每个大雇主都声称十分看重的。

与其他所有“过渡课程”和“过渡课程教科书”一样，本书的首要重点是帮助你学习如何动手处理一个新问题，而对这个问题，你没有任何熟悉的模板可套用。这可归结为学习如何思考（一个给定的问题）。

要想成功完成这次从中学到大学的过渡，有两个关键步骤你必须做到。第一个关键步骤是，学着不再寻找可使用的公式或者可遵循的套路。找一个模板（例如教科书中的或者 Youtube 视频中演示的一个范例），然后仅仅替换其中的数字，这样的办法往往解决不了新问题。（你仍然可以用这种方式来处理大学数学的许多方面和现实生活中的应用，它们仍然有效。因此，你在中

学的所有努力都不会被浪费。然而对于许多需要用新的“数学思维”思考的数学课程来说,这就不够了。)

如果你不能通过寻找可效仿的模板、可套用的公式或者可应用的算法来解决问题,你会怎么做? 答案是,思考这个问题,这就是第二个关键步骤。不是思考这个问题的形式(这是中学时所教的,在那时也很管用),而是思考它实际上说的是什么。尽管这听起来应该很容易,但我们中的大多数人一开始都会觉得这非常难和令人沮丧。考虑到你也可能经历过这些,你需要了解,这样的转变有其理由。它与数学在现实生活中的应用有关。我将在第1章中阐述这一点,但现在,我只给你打个比方。

如果我们将数学比成汽车世界,那么中学数学就是学习驾驶汽车,而大学数学所对应的则是学习汽车如何运作以及如何保养和维修它,并且如果你对这门学科钻研得足够深入,你还要学习如何设计及建造你自己的汽车。

我将以一些要点结束这篇简短的导论。当你们学习本书时,要将这些要点牢记于心。

- 学习本书仅要求学完(或即将学完)中学数学常规必修课。有一两处(特别是最后一章)需要一些初等集合论的知识(主要是集合的包含、并、交等概念及性质)。我将必要的材料放在附录中,以供不熟悉这个领域的人学习。
- 记住:你觉得会很难的一个原因可能是,一切看上去漫无目的。其实这一切的目标都是为你学习树立数学思维(这种数学是你以前没有遇到过的)奠定基础。所以不可避免地,这个过程需要你主动尝试运用这种新的思维。
- 把你的重点放在理解新概念与想法上。

- 不要急于求成。要知道，这本书非常薄，需要学习的事实非常少，而需要理解的东西却很多！
- 尝试完成练习，越多越好。把它们放进书中是为了帮助你理解。
- 遇到困难时，与你的同学和授课老师讨论。我们之中能够独立完成这次关键性转变的人寥寥无几。
- 我应该强调，这并不是为一本为自学而设计的教科书。它是一本课程参考书，当你想从授课老师之外的来源获得一些补充信息时，它可以供你参考。
- 书中有许多练习，我强烈主张你们去做这些练习。它们是本书不可分割的一部分。不过与教科书不同的是，我并没有提供这些练习的答案。这并不是我的疏忽，而是我深思熟虑后的选择。学习用数学的方式思考并不仅仅是为了获得答案。（尽管一旦你学会了用数学的方式思考，你会比单纯地遵照程序化的方法去做时更容易得到正确答案。）如果你想知道你的结果是否正确（我们都想知道），你应该向一些内行的人求助。判断一份数学推理是否正确是一种需要借助专业的价值判断。常常有学生得到表面上看起来正确的答案，而在仔细推敲后，却发现该答案是错的。当然，一些练习的答案我能放心地给出，但我还是要重申至关重要的这一点：完成从中学数学到大学数学的过渡，这一切都是围绕过程展开的，它关注的是尝试和思考，而不是“获得答案”。
- 如果可以的话，与其他人共同学习。中学时，单独学习很普遍，因为中学时的重点在做。然而，掌握过渡课程内容

需要思考,并且与其他人一起讨论学习比单独学习要好得多。让你的同学分析和点评你在证明中所做出的尝试,能够大大帮助你自己的学习与理解。

- 不要试图囫圇吞枣地学习任何一节,即便它乍一看显得很容易。^①本书中的内容是其他地方都用得到的。书中收入的每一样东西,通常都会给初学者带来问题。(在这一点上,你要相信我。)
- 不要放弃。全世界的学生在去年、前年都做到了。许多年前,我也一样。所以你们也能!
- 哦,对了,还有一件事:不要急于求成。
- 记住,你的目标是理解和培养一种新的思维方式,一种你在各行各业都会觉得有用的思维方式。
- 中学数学是关于做,大学数学则主要是关于思考。
- 最后三个字的建议:慢慢来。

祝你好运。:-)

基思·德夫林
斯坦福大学
2012年7月

^①是的,我知道。仅仅六小段话之前,我也说过这句话。但我是经过深思熟虑的,因为这很重要。

第 1 章

什么是数学？

中学将所有的时间都用在数学内容的教授上，重点讲如何学习和应用不同的套路解决数学问题，却很少（如果还有的话）花时间尝试去向学生传递数学是什么。这有点像用执行一系列传球使球进门来描述足球。两者都精确地描述了不同的关键特征，但它们都忽略了整体是什么及其来龙去脉。

在了解了课程要求后，我能够理解为什么会这样，但我认为这是错的。尤其是在今天，对数学的性质、外延、能力和局限有一个一般性的认识，这对任何公民都是有用的。^①多年来，我遇到过许多人，他们都拥有与数学紧密相关的专业的毕业证书，例如工程、物理、计算机科学甚至数学专业。这些人告诉我，直到完成所有中学和大学教育，他们对现代数学构成的概况都没有很好的了解。直到后来，他们时不时地在生活中瞥见这门学科的真实本质，才开始领会到，数学已渗透进现代生活的方方面面。^②

^① 如果你对此还没有概念，请返回阅读本书的导论。这对理解本章及全书都很关键。

^② 参见上一条脚注。