微分几何講义

A. B. 波戈列洛夫著

高等教育出版社

微分几何講义

A. B. 波戈列洛夫著

梅向明　章学誠　孙振祖譯

高等教育出版社

本书系根据苏联国立哈尔科夫大学出版的波戈列洛夫（A. B. Погорелов）著“微分几何講义”(Лекции по дифференциальной геометрии) 1956 年增訂版譯出。

本书內容包括三維欧氏空間中的曲綫論和曲面論，可作为高等学校教学参考书。

微分几何講义

A. B. 波 戈 列 洛 夫 著

梅向明、章学誠、孙振祖譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第054号）

中央民族印刷厂印装　新华书店发行

統一书号 13010·627、开本 850×1168 1/32 印張 5 4/16

字數 120,000 印数 0001—7,500 定价（6）¥0.85

1959 年 8 月第 1 版 1959 年 8 月第 1 次印刷

第二版序言

現在这一版是不同于第一版（1955 年），几乎在本书的所有章节都有改变。这些改变具有不同的特点。在第一种情形，改善了証明。另一种情形，改变了叙述次序。第三种情形，增加了插图和說明的例子。

对应于物理数学系的大綱，本教程的基本問題在书中叙述得很詳細。大綱范圍以外的教材，照例，是叙述性的給出。

作者

序 言

微分几何这数学分枝是以无穷小分析方法研究几何的图形，首先是研究曲綫和曲面，同时也研究曲綫族和曲面族。微分几何的特点，首先是研究曲綫和曲面“小范圍”上的性質，即曲綫和曲面上无論多么小的一块的性質。

微分几何的发生和发展是和分析紧密相連的，在相当大的程度上，分析的問题是从几何問題給出。很多的几何概念发生在相应的分析概念之前。例如，切綫的概念发生在微分概念之前，面积和体积的概念发生在积分概念之前。

微分几何发生于十八世紀的前半期，它与 L. 欧拉和 D. 蒙日的名字相連。曲面論的第一篇著作是蒙日写的(«分析在几何上的应用» 1795 年)。

在 1827 年高斯发表了著作«关于曲面的一般研究»，奠定了近代形式曲面論的基础。从那时候起，微分几何不再仅仅是在分析上的应用，而且在数学中也占了独立的地位。

H. N. 罗巴契夫斯基发現了非欧几何在整个几何发展中起了巨大的作用，它包括微分几何在内。这样，到 1854 年，B. 黎曼的演講«論作为几何基础的假設»，奠定了黎曼几何的基础。应用它到高維流形上与 n 維欧氏空間几何上所处的关系，正如同任意曲面内部的几何与平面上的欧氏几何的关系一样。

F. 克萊因在他的«爱尔兰根綱領»(1872 年)提出了群論观点，这观点应用到几何上由 E. 嘉当所发展，他建立了射影联絡空間和仿射联絡空間的理論。

Φ. 米丁格和 K. M. 彼得松建立俄国微分几何的学派，主要研

究在曲面的扭曲問題上。有很多的俄罗斯和苏联的几何学家継續在研究这項工作。

現在这本书是以作者在哈尔科夫大学物理数学系的微分几何讲义为基础。作者力求对微分几何基础加以严格的叙述，及其研究方法的典型化，尽可能不妨害通常已建立的系統。很多的微分几何教材容納在习題与問題中，解决这些問題是培养学生专攻几何学的必备条件。

目　录

第一部分　曲綫論

第一章　曲綫的概念

第二章　和密接概念有关的曲綫的概念

第三章　和曲率撓率的概念有关的曲綫論問題

第二部分　曲面論

第四章　曲面的概念

第五章　曲面上与密接概念有关的基本概念

第六章　曲面的第一二次形式及其有关的曲面論問題

第七章　曲面的第二二次形式及其有关的曲面論問題

第八章　曲面論的基本方程

第九章 曲面的內蘊几何

第一部分　曲綫論

第一章　曲綫的概念

曲綫，是微分几何討論的基本对象之一。我們在这一章里要弄清楚曲綫的概念，不过只要求到下面所述的那样程度。

§1. 初等曲綫. 簡单曲綫. 一般曲綫

为了定义曲綫的概念，我們需要知道一些关于从任意的点集到空間中的映射的知識。

假設 M 是空間的任意点集。如果对于集合 M 里的每一个点 X，有空間的某一个点 $f(X)$ 和它对应，則我們說給定了集合 M 到空間中的一个映射 f。空間的点 $f(X)$ 就称为点 X 的象，由集合 M 里所有的点的象組成的点集 $f(M)$ 就称为集合 M 的象。

集合 M 的映射 f 称为一一的，如果不同的点有不同的象。設 f 是一个一一映射。这时，自然地确定 $f(M)$ 的一个映射 f^{-1}，那就是計点 $f(X)$ 同点 X 对应的映射。映射 f^{-1} 称为 f 的逆。

集合 M 的映射 f 称为連續的，如果无論对于 M 的怎样的一个点 X，和怎样一个数 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得对于 M 中同 X 的距离小于 δ 的任意一点 Y 来說，点 $f(Y)$ 与 $f(X)$ 間的距离小于 ε。

假設 f 是 M 的一个一一的連續映射。如果集合 $f(M)$ 的映射 f^{-1} 也是連續的，則 f 称为拓扑映射。如果 f 是拓扑映射，則集合 M 和它的象 $f(M)$ 称为同胚的或拓扑等价。

現在定义初等曲綫。

空間里的点集 γ，如果它是一个开的直綫段到空間的拓扑映

射下的象，则称之为初等曲綫。

假設 $a<t<b$ 是一綫段，它在映射 f 下的象 γ 是一初等曲綫。并設 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 是与綫段上的点 t 对应的点的坐标。等式組

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$$

称为曲綫 γ 的参数形式的方程。

空間里的点集 G，假如对于这个集合中的每一个点 X，可以指定一个数 $\varepsilon>0$，使得空間中所有同 X 的距离小于 ε 的点也都属于 G，则称 G 为开集。显然，由任意多个开集組成的集合还是开集。

包含点 X 的任意一个开集，都称为这个点在空間中的一个邻域。

設 M 是空間中的点集，假如不存在两个开集 G' 和 G''，把集合 M 分成两部分——M' 和 M''，其中的一部分只属于 G'，而另一部分只属于 G''，则称 M 为連通的。

現在定义簡单曲綫。

空間里的点集 γ，如果是連通的，并且对于其中的每一个点 X，有这样的一个邻域，γ 在这邻域里的一部分是初等曲綫，则称之为簡单曲綫。

簡单曲綫的"整体"結构由下面的定理来說明。

在拓扑映射下，开綫段或圓周在空間中的象是簡单曲綫。

反之，任意一条簡单曲綫，都是拓扑映射下，开綫段或圓周在空間里的象。这个定理也可簡单地叙述成为：簡单曲綫或与开綫段同胚，或与圓周同胚。

我們不来証明这个定理，只是要指出，在它里面所表明的与开綫段或圓周同胚的簡单曲綫的这个性質，完全刻划了簡单曲綫的特性。因此，簡单曲綫也可以用这个性質来定义。

与圓周同胚的簡单曲綫，称为閉曲綫。

假設X是簡单曲綫γ上的一点，包含点X的空間中的邻域同γ的公共部分称为曲綫γ上点X的邻域。由定义，簡单曲綫上的每个点，都有一个是初等曲綫的邻域。在以后，每当提及曲綫上点的邻域时，指的就是这样的初等邻域(图 1)。

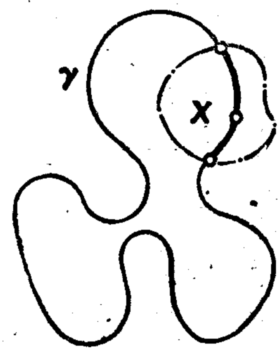

图 1

假設簡单曲綫γ是开綫段或圓周g在拓扑映射f下的象。假設X是g上的任意一点，ω是它的任意一个邻域，此时ω在映射f下的象是曲綫γ上点$f(X)$的邻域。反之，点$f(X)$的任意一个邻域都可以用这种方法得到。

集合M到空間中的映射f，假如对于这个集合中的每一个点，有一个邻域，在此邻域中映射f是拓扑的，則我們称映射f是局部拓扑的。

空間里的点集γ称为一般曲綫，假如这个集合是簡单曲綫在局部拓扑映射下的象。

我們說，簡单曲綫γ_1的映射f_1和簡单曲綫γ_2的映射f_2，定义同一条一般曲綫γ，假如在曲綫γ_1和γ_2的点之間可以建立一个拓扑对应，使得这些曲綫的对应点在曲綫γ上的象重合。

为了說明这个定义的第二部分，我們引进一个例子。在图 2 里画出了一条一般曲綫。这条曲綫可以用两种不同的方法表成圓周在局部拓扑映射下的象，从上述定义的观点来看，它們給出不同的曲綫。直观地，它們又表示成同一条曲綫。

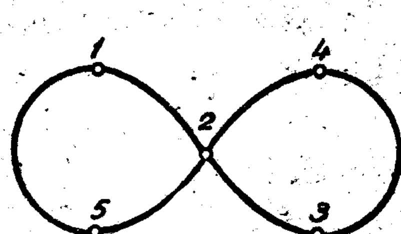

图 2

假設点沿着圓周运动。它的象沿着曲綫运动。这时，象点旣

可按照位置 1, 2, 3, 4, 2, 5 的次序沿曲綫进行，也可以按照 1, 2, 4, 3, 2, 5 的次序沿曲綫进行。对应于这两种进行方式的映射定义了不同的一般曲綫，虽然如此，它們作为点集来看，却是相同的。

假設一般曲綫 γ 是簡单曲綫 $\overline{\gamma}$ 通过局部拓扑映射 f 到空間中的象，則曲綫 $\overline{\gamma}$ 上点 X 的任意一个邻域在映射 f 下的象，称为曲綫 γ 上的点 $f(X)$ 的邻域。因为在点 X 的充分小的邻域里，映射 f 是拓扑的，所以 γ 上的点 $f(X)$ 有一个是初等曲綫的邻域。

这样，任意曲綫的"小范圍"的研究总可化成初等曲綫来研究。

§2. 正则曲綫. 曲綫的解析表示

如果曲綫 γ 的每一个点都有这样一个邻域，允許有正則的参数表示。也就是說，可以用参数方程

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)$$

来給定，其中的 f_1, f_2, f_3 是正則(k 次連續可微的)函数，則称曲綫 γ 是正則的(k 次可微的)。当 $k=1$ 时，曲綫称为光滑的。

如果在曲綫上的每个点的充分小的邻域内，允許用解析的参数(函数 f_1, f_2, f_3 是解析的)来表示，則曲綫就称为解析的。

今后，我們将只限于研究正則曲綫。

正如在前一节里所說明的，在每一个点的邻域里，曲綫可以用参数形式的方程

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

来給定，其中 $x(t), y(t), z(t)$ 是定义在某个区間 $a<t<b$ 上的函数。

自然就提出这样的問題：在什么时候等式組

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\quad (a<t<b)$$

定义正則曲綫，也就是說，在什么时候这些等式可以看作是某一条

曲綫的方程？在許多情形下，下面的定理給出这問題的答案。

定理 假設 $x(t)$，$y(t)$和 $z(t)$是滿足条件

$$x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)>0 \quad (a<t<b)$$

的正則函数，則等式組

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \quad (a<t<b)$$

是某一曲綫γ的方程。这条曲綫是綫段 $a<t<b$ 在局部拓扑映射下的象，綫段上的每一个点 t 和空間中坐标为 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 的点相对应。

显然，在証明中只要肯定映射是局部的一一的。現在来証明这个断言。

假如不是这样，那就是存在一个点 t_0，在它的任意小的邻域里，总可以找到这样的 t_1 和 t_2 $(t_1\neq t_2)$，使得

$$x(t_1)-x(t_2)=0, \quad y(t_1)-y(t_2)=0, \quad z(t_1)-(t_2)=0.$$

按中值定理，从它就可以推出

$$x'(\theta_1)=0, \quad y'(\theta_2)=0, \quad z'(\theta_3)=0,$$

其中的 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 是介于 t_1 和 t_2 之間。因为 t_1 和 t_2 可以充分接近于 t_0，所以由函数 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$的連續性，有

$$x'(t_0)=0, \quad y'(t_0)=0, \quad z'(t_0)=0,$$

因此

$$x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)=0.$$

得到矛盾，定理証毕。

某些曲綫，可适当选擇坐标軸 x, y, z，使得它有参数表示式

$$x=t, \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t) \quad (a<t<b)$$

或同样地

$$y=\varphi(x), \quad z=\psi(x) \quad (a<x<b).$$

可以发現，在許多情形下这种参数表示用起来特别方便，与此相連系，可以提出这样的問題：怎样的曲綫在“小范圍”內可以有这

样的参数表示？下面的定理給出这个問題的答案：

定理 假設 γ 是正則曲綫，

$$x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t)\quad (a<t<b)$$

是它在对应于 $t=t_0$ 的点 (x_0, y_0, z_0) 的邻域里的正則参数表示。并設在这个点 $f_1'(t)\neq 0$。这时在曲綫 γ 上点 t_0 的充分小的邻域里，可以用方程

$$y=\varphi(x),\quad z=\psi(x)$$

来給定，其中 φ 和 ψ 是 x 的正則函数。

事实上，按照隐函数的存在定理，知道对于充分接近于 x_0 的所有 x，存在一个正則函数 $\chi(x)$，它滿足方程

$$x=f_1(\chi(x)),$$

并当 $x=x_0$ 时它等于 t_0。在 $x=x_0$ 点，求这个恒等式的导数，有 $1=f_1'(t_0)\chi'(x_0)$。因此，$\chi'(x_0)\neq 0$。这样，在 x_0 的邻域里函数 $\chi(x)$ 是单調的，从而，当 δ 充分小时，綫段 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 到 t 軸上由等式 $t=\chi(x)$ 給出的映射，是拓扑的。

由此推出，曲綫 γ 上的邻域 $\chi(x_0-\delta)<t<\chi(x_0+\delta)$ 可以由方程

$$y=f_2(\chi(x)),\quad z=f_3(\chi(x)),\quad (x_0-\delta<x<x_0+\delta)$$

給定。

定理証毕。

現在来考慮曲綫的隐式給定法。并且为了簡单起見，先限于考慮平面曲綫。

假如曲綫上所有的点都属于某一平面，則称它为平面曲綫。可以認为这个平面就是 xy 平面。

我們說，方程

$$\varphi(x,y)=0$$

給定平面曲綫，这只是表示曲綫上点的坐标要滿足給定的方程。

在这时，平面上可能存在一些点，滿足这个方程而不属于曲綫，而平面上所有滿足方程 $\varphi(x,y)=0$ 的点集合按前一节給出的定义，可能不是曲綫。

对于用隐式方程給定的曲綫，下列定理十分重要：

定理 假定 $\varphi(x,y)$ 是变量 x,y 的正則函数。M是 xy 平面上滿足方程

$$\varphi(x,y)=0$$

的点集；(x_0,y_0)是这集合中的一点，在这一点 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$。則点$(x_0,y_0)$有一个鄰域，使集合$M$中所有属于这个鄰域的点組成一条正則初等曲綫。

証明．为确定起見，假設在点(x_0,y_0) $\varphi_y\neq 0$。由隐函数的定理，存在正数 δ 和 ε，和定义在区間 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 上的正則函数 $\psi(x)$，使得所有的点 $(x,\psi(x))$，$x_0-\delta<x<x_0+\delta$，滿足方程 $\varphi(x,y)=0$，并且这些点就是矩形 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，$y_0-\varepsilon<y<$ $<y_0+\varepsilon$ 中所有滿足方程 $\varphi(x,y)=0$ 的点。由方程

$$y=\psi(x) \quad (x_0-\delta<x<x_0+\delta)$$

确定的曲綫就是定理中所說的初等曲綫。

定理証毕。

关于空間曲綫的对应定理可以叙述如下。

假設 $\varphi(x,y,z)$ 和 $\psi(x,y,z)$ 是变数 x,y,z 的正則函数。并設M是空間中滿足方程

$$\varphi(x,y,z)=0,\ \ \psi(x,y,z)=0$$

的点的集合，(x_0,y_0,z_0) 是这个集合中的一点，在这个点上矩陣

$$\begin{pmatrix}\varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\\ \psi_x & \psi_y & \psi_z\end{pmatrix}$$

的秩等于 2。則点 (x_0,y_0,z_0) 有一个鄰域，使得M中所有属于这个鄰域的点，組成一条正則的初等曲綫。

这个定理的証明同样基于应用于隐函数的定理，并且与关于平面曲綫的对应定理的証明沒有原则的区别。

§3. 正則平面曲綫的奇点

假設γ是正則平面曲綫，P是它上面的一点，假如在这个点的邻域里曲綫有k次可微的参数表示

$$x=x(t),\quad y=y(t),$$

并且在点P处滿足条件$x'^2+y'^2\neq 0$，則称点P关于給定的正則性次数k是正常点。倘若沒有这样的参数表示，則P称为奇点。

例. 曲綫

$$x=t^3,\quad y=t^7\quad(-1<t<+1)$$

上的点$t=0$，关于二次可微参数表示是正常的，因为曲綫可以用等价的方程

$$x=\tau,\quad y=\mp|\tau|^{\frac{7}{3}}\quad(-1<\tau<+1)$$

来給定。但是，正如我們在以后将看到的，点$t=0$关于解析参数表示是奇点。

在这一节里，我們較詳細地来研究有关平面解析曲綫对于解析参数表示的奇点的問題。

引理 假設γ是一条解析曲綫，O是它上面的一点。这时可以适当的选取坐标軸，使得在点O的邻域里，曲綫具有形如

$$x=a_1t^{n_1},$$

$$y=b_1t^{m_1}+b_2t^{m_2}+\cdots\cdots,\quad n_1\leqslant m_1$$

的参数表示。

証明 取点O作为坐标原点。假設

$$x=\alpha_1s^{n_1}+\alpha_2s^{n_2}+\cdots\cdots$$

$$y=\beta_1s^{m_1}+\beta_2s^{m_2}+\cdots\cdots$$

是曲綫的任意一个解析参数表示。不失去普遍性，可以認为点O