

弹性系统的振动

A. П. 菲利波夫 著

建筑工程出版社

彈性系統的振動

俞 忽 等譯

建築工程出版社出版

• 1959 •

內容提要 本书研究了与弹性系统的线性振动有关的问题和在实用方面计算这种振动的最方便的方法。考虑振动时的衰减问题，在本书里也很重视。

本书大部分叙述杆件和杆件系统（梁、转轴、平面和空间桁架、桁架等等）的自由和强迫振动；此外，也谈到圆板的振动和矩形板的振动，这些矩形板的中間有的下面是不用肋加固的，有的下面是有肋的，有的只是一个方向用肋的，也有两个方向都用肋的。本书还研究了圆柱薄壳的自由振动的解法（薄壳的两端可能是简支的，或是固定的），以及梁和放在弹性（文克尔假定）地基上面的圆板同矩形板的非弹性冲击。

本书可供工程师、研究生和科学工作者参考之用。

本书由武汉水利学院建筑力学教研组俞忽（译序言、第二、七、十二、十五章）、彭立生（译第三、四、八、九章）、史述昭（译第十一、十四章）、张立中（译第五、六章）、孙保立（译第一十章）、常连芳（译第十三章）等翻译，最后由俞忽教授总校。

原本說明

书 名 КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ
編 著 者 А. П. Филиппов
出 版 者 Издательство Академии наук Украинской ССР
出版地点 及 年 份 Киев—1956

弹性系统的振动

俞 忽 等译

*

1959年7月第1版 1959年7月第1次印刷 3,065册

787×1092 1/16 • 450千字 • 印张20 7/8 • 定价(10) 2.90元

北京西四印刷厂印刷 • 新华书店发行 • 书号: 1047

建筑工程出版社出版(北京市西郊百万庄)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第052号)

目 录

序 言	7
第 一 章 一个自由度的綫性系統的振动	10
第 一 节 最简单的振动情况	10
第 二 节 扭轉振动	12
第 三 节 有衰减时的自由振动	13
第 四 节 一个自由度系統的强迫振动	16
第 五 节 振摆	18
第 六 节 具有衰减的强迫振动	20
第 七 节 具有弹性悬挂物时的强迫振动	23
第 八 节 示波器	24
第 九 节 振动的基本形式	24
第 十 节 光譜函数	27
第 二 章 用算子运算法求方程的积分	29
第 十 一 节 变象的基本特点	29
第 十 二 节 关于微分算子方程的变象	32
第 十 三 节 微分方程的积分	34
第 十 四 节 反演公式	38
第 十 五 节 偏微分方程	39
第 三 章 几个自由度系統的振动	41
第 十 六 节 自由度的数量	41
第 十 七 节 第二类拉格郎日的运动方程	42
第 十 八 节 特征方程的解答	44
第 十 九 节 根据影响系数成立无重梁的频率方程	46
无重梁作用有集中質量的橫向振动	47
第 二 十 节 橫向振动的微分方程	47
第 二 十 一 节 等截面的无重梁作用有集中質量的橫向振动	48
第 二 十 二 节 梁的刚度沿阶級規律变化	50
第 二 十 三 节 作用三个集中質量的无重簡支梁	51
第 二 十 四 节 具有 n 个相等的质量 m 且分布距离相等的梁	53
第 二 十 五 节 强迫振动	55
第 四 章 考虑自重的等截面梁的橫向振动	56
第 二 十 六 节 无荷载梁的自由振动	56
第 二 十 七 节 梁上有集中質量的自由振动	61
第 二 十 八 节 杆件支承在弹性支座上的振动	64
第 二 十 九 节 特殊情况的应用	65
第 三 十 节 梁端点連接着固体的振动	71

第三十一节	在 $n-1$ 个等距离分布的集中质量作用下有重梁的振动	72
第三十二节	等截面的連續梁	74
第三十三节	仅作用有分布荷载的 n 跨連續梁	75
第三十四节	每跨有不同截面的連續梁的基本頻率計算	78
第三十五节	在連續弹性地基上的梁	80
第五章	近似法求振动頻率	82
第三十六节	主要方法	82
第三十七节	奥斯特洛格拉得斯基-哈密尔頓原理	82
第三十八节	能量法(雷列法)	83
第三十九节	雷列-李滋法	86
第四十节	伽遼尔金法	87
第四十一节	例	88
第六章	各种因素对横向振动頻率的影响	94
	截面的回轉惯量和切力的影响	94
第四十二节	微分方程	94
第四十三节	自由振动	95
第四十四节	一般情形的支承条件	96
第四十五节	有集中荷载时梁的振动	97
	計及衰减时梁的振动	102
第四十六节	引起能量消失的原因	102
第四十七节	衰减时計算能量消耗的基本假定	103
第四十八节	求各种材料衰减递减量的方法和数据杆件横向振动方程的直接积分法	105
	杆件横向振动方程的直接积分法	108
第四十九节	計及衰减的横向振动方程	108
第五十节	有集中质量时的强迫振动	109
第五十一节	对于任意变化规律的扰力在計及衰减时的横向振动	116
第五十二节	有集中荷载的杆件的强迫振动	120
第五十三节	計算衰减时的自由振动	121
第五十四节	在周期力作用下梁的强迫振动	123
第五十五节	有集中质量的悬臂杆	125
第五十六节	在 $\xi=\xi_1$ 点弹性固定的悬臂杆	127
第五十七节	計及衰减时渦輪叶片的横向强迫振动	129
第五十八节	計及和伸长有关的衰减时杆的自由振动	137
第五十九节	固定对振动頻率的影响	138
第七章	弯曲兼扭轉的振动	140
第六十节	弯曲中心	140
第六十一节	杆件的弯曲兼扭轉振动的微分方程	140
第六十二节	弯曲兼扭轉的自由振动	142
第六十三节	考虑流体动力时弯曲兼扭轉的振动	145
第六十四节	临界速度的求法	151
第八章	經过共振时綫性系統的强迫振动	153

第六十五节	問題的实质	153
第六十六节	一个自由度系统的共振过程	153
第六十七节	几个自由度系统经过共振的过程	160
第六十八节	杆件经过共振并考虑衰减的横向振动	161
第六十九节	利用福列涅尔积分表求变位	164
第九章	平面刚架的振动	168
	精確的方法	168
第七十节	成立频率方程的一般方法	168
第七十一节	矩形刚架的振动	170
第七十二节	多层刚架的振动	174
	計算平面剛架的振动频率的近似法	175
第七十三节	用雷列法計算矩形剛架的基本频率	175
第七十四节	用雷列法計算多层剛架的基本频率	180
第七十五节	平面刚架中的横梁刚度对振动频率的影响	187
第七十六节	具有绝对刚度横梁的刚架的高音振动频率的計算	189
第七十七节	具有几个自由度系统的平面刚架的高音振动频率的計算	192
第七十八节	切力和切面回轉慣量对剛架振动频率的影响	195
	具有绝对剛性的縱向梁的空間剛振动	198
第七十九节	概論	198
第八十节	频率方程的成立	198
	有彈性的縱向橫梁时剛架骨架的振动	206
第八十一节	成立橫梁的分布質量频率方程	206
第八十二节	集中質量的频率方程	207
第十章	腹系结构的振动	209
第八十三节	平行弦杆的組合柱	209
第八十四节	桁架的运动微分方程	212
第八十五节	按照能量法計算基本频率	214
第十一章	板的振动	221
	无荷載板的自由振动	221
第八十六节	振动板的微分方程	221
第八十七节	沿周边簡支的板	224
第八十八节	两边簡支的板	226
第八十九节	沿周边固定的板	227
第九十节	有自由边的板	228
	圓板的振动	229
第九十一节	微分方程	230
第九十二节	圓板的自由振动	230
第九十三节	在均布拉力或压力作用下的圓板	232
第九十四节	橢圓板的振动	233
	有荷載矩形板的自由振动	234
第九十五节	方法的說明	234

第九十六节	承受集中荷载的矩形板	238
第九十七节	几种荷载情形下频率方程的组成	238
第九十八节	沿四边简支的有集中荷载的矩形板	239
第九十九节	有四个对称且荷载相等的方形板	241
	用单向肋加固,且作用集中荷载时矩形板的振动	242
第一〇〇节	方法的说明	242
第一〇一节	用一根肋加固同时支承在两点的板	244
第一〇二节	用两根肋加固的方形板	245
第一〇三节	用两根肋加固的在中間荷载的矩形板	246
第一〇四节	沿周边简支且用同刚度等距离肋加固的矩形板	248
第一〇五节	强迫振动	251
	用近似法求用肋加固板的自由频率	252
第一〇六节	用交叉肋加固的板	252
第一〇七节	用单向肋加固的板	256
第一〇八节	特殊情形	258
第十二章	圆柱薄壳的振动	264
第一〇九节	一般的说明	264
第一一〇节	振动薄壳的微分方程和积分方法	264
第一一一节	三角级数的应用	267
第十三章	杆件的纵向振动和扭转振动	274
第一一二节	计及衰减时纵向振动的微分方程	274
第一一三节	杆端有重物而不计衰减时的自由振动	276
第一一四节	在等距离上有相等质量的柱的纵向振动	277
第一一五节	计及衰减时有荷载柱的自由振动	281
	计及衰减时轴的扭转强迫振动	284
第一一六节	扭转振动的微分方程	284
第一一七节	有圆盘的轴的扭转振动	285
第一一八节	特殊情况	289
第十四章	弹性地基上板的振动	291
第一一九节	问题的实质	291
第一二〇节	振动的微分方程	292
第一二一节	求弹性地基的位移	293
第一二二节	复数部分积分的研究	298
第一二三节	特殊情况的应用	302
第十五章	冲击和弹性物体的振动	306
第一二四节	问题的现状	306
第一二五节	梁遭受横向冲击时发生有衰减的振动	307
第一二六节	放在弹性地基上面的矩形薄板遭受冲击的情形	310
第一二七节	放在弹性地基上面的圆形薄板遭受冲击的情形	315
参考文献		320

序 言

最近因机器的能力和速度不断提高,出现了許多新型的机器。机器和建筑物的各部分上面的周期和冲击荷载的动力影响也不断加剧。

苏联共产党第十九次党代表大会的決議就注意到了渦輪机和水力机方面的强大的发展,提高机器的质量和减低它們的重量等問題。

机器的制造和建筑物的建造,有許多实际的和重要的問題不先用振動理論計算一下,是不能解决的。

现在,已經充分完滿地制定了綫性系統的振動的計算方法,这样,复杂的弹性結構部分遭受周期的和冲击的荷载作用时,也就可能进行計算了,以及在一系列的情况下,对于非綫性振動理論的方法也可以这样說。

苏联在綫性振動的这一方面,А. Н. 克雷洛夫(Крылов)院士的研究是非常出色的。他写的两本书“几个数学物理微分方程在技术問題方面的应用”[46]和“船舶的振動”[47]大大地促进了苏联在这一方面的巨大成就。

Б. Г. 伽辽尔金(Галеркин)院士提出了一个卓越的方法,即伽辽尔金法,把这一方面的发展又推进了一步。

Ю. А. 希滿斯基(Шиманский)院士[131], И. М. 拉宾諾維奇(Рабинович)教授[89]、[90]和其他学者的重要研究,都是和突然到来的荷载作用有关的問題。

杆件系統的計算方法在苏联学者的著作里面得到广泛的发展,尤其是起始参变数法,位移法,力法。在这里我們只須把 С. В. 謝雷山(Серенсен)[94], Н. И. 別祖荷夫(Безухов)[5], А. Ф. 斯密尔諾夫(Смирнов)[96], В. Г. 朱諾夫斯基(Чудновский)[128], Я. Л. 努杰尔曼(Нудельман)[79], С. А. 別倫斯坦(Бернштейн)[10], [11], 的著作提一提就成了。В. З. 符拉索夫(Власов)研究的是薄壁杆件的振動[19]。

在大块式和构架式基础振動的研究这一方面的成就也很大。在振動傳播的研究这一方面情形也是一样。Е. Л. 尼古拉依(Николай)和 А. И. 魯律叶(Лурье)[76], Д. Д. 巴尔坎(Баркан)[4], О. Я. 舍赫切尔(Шехтер)[130]和其他学者的著作就討論了这些問題。

普通振動理論的“綫性”問題是用綫性微分方程做我們研究振動过程的根据,除了“綫性”問題之外,在最近 12 至 20 年內,非綫性振動的研究也广泛地发展起来,主要是在苏联卓越的科学院院士 Л. И. 滿杰耳什塔姆(Мандельштам), Н. Д. 巴巴列克斯(Папалекси), Н. М. 克雷洛夫和 Н. Н. 巴哥柳保夫(Боголюбов), А. А. 昂德羅諾夫(Андронов)做的研究工作,以及科学院院士 А. М. 略普諾夫(Ляпунов)同他的学生做的研究工作,事实上創立了非綫性力学,而且得到許多很重要的

成果。

在参变数和半和諧振动的研究这一方面也迈进了一大步,在这种振动中,系統的参变数是改变的。譬如杆件和平板在周期的纵向力的作用之下,研究动力稳定的丧失問題就有这种情形。应该說明这个問題首先是在苏联由Н.М.別略也夫(Беляев)教授提出的,从那时起,由于Н.М.克雷洛夫,Н.Н.波戈柳波夫,А.М.拉夫烈切夫(Лаврентьев),А.Ю.伊什林斯基(Ишлинский),И.И.高尔金布拉特(Гольденблат)和其他学者[6]的著作,得到广泛地发展。

在这一个短序里面要把我們的学者,在振动理論的研究方面作出的巨量貢獻都一一的列举出来是很难的。

本书所叙述的主要是和弹性系統的綫性振动有關的問題,和在实用上最方便的計算方法。

因为这一部門的内容是很广泛的,要把它們放在一本适当厚度的书里面是不可能的。有一部分参考文献資料可从著作[32], [68], 和[87]里面查得。編写这本书时作者是拿他本人在振动、冲击、有衰减的振动,框架結構的計算等等問題的研究材料做基础的。这些材料从1932年起都曾在各刊物上面发表过[109~127]。振动理論的其他問題也作了簡略的叙述。

第一至十和十三章叙述了杆件和杆件系統的自由和强迫振动的計算方法。第十一、十二和十四章叙述了矩形平板,圓平板和圓柱薄壳的自由和强迫振动的計算方法。第十五章叙述了受冲击时梁和放在弹性地基上面的矩形平板同圓平板的計算方法。这本书各章的内容大致如下。

在第一章里面我們簡略叙述了一下沒有衰减的和有衰减的一个自由度系統的振动。

在第二章里面我們叙述的是算子运算的基本方法,这是后面时常要用的。由于А.Н.克雷洛夫[49], Н.М.克雷洛夫[51], Н.Н.巴哥柳保夫[52], А.И.魯律叶[63], А.М.厄弗罗斯(Эфрос)同 А.М.达尼列夫斯基(Данилевский) [134]的著作,这个方法在苏联已經广泛的被采用了。

在第三章里叙述了几个自由度系統振动的几种問題。叙述了上面有集中质量的无重量梁的横向振动計算方法:梁的横截面可能是不变的,也可能是依照階級規律改变的。也叙述了用有限差数法解上面有好几个同样质量的梁的振动問題,如果梁的刚度不变,同时各质量之間的距离都相等的話。

在第四章里仔細地叙述了梁的振动,并考虑到梁的自重及当梁的上面具有与杆相联系的集中质量。里面还有各种可以減輕計算工作的頻率方程和曲綫图。

在第五章里簡略的叙述了用近似法求自由振动的頻率。这里有能量法,雷列——李滋(Rayleigh-Ritz)法和伽辽尔金法。此外还有几个有实际意义的例题,說明这些方法的应用。

对于振动的頻率和振幅有影响的各種因素的研究都放在第六章里。在这章里我們闡明了下面几种因数的影响:切力影响,回轉慣量,支承情形的影响。

由于內衰减对于振幅的发展是有重要的意义,因此我們也在这章里把它的影响

很詳細的闡明了一下，同时把計算的方法也推演了出来。內衰减的計算方法，大約有好几种。

在第七章里我們把弯曲兼扭轉的振动和鼓翼（флаттер）现象的要点簡略的叙述了一下。

在第八章里詳細地研究了一个和几个自由度的綫性系統須經過共振阶段的强迫振动問題。問題的解答最后就变成函数表的制定。求振幅的第一个最大值的曲綫图也放在这一章的里面。

在第九章里面，詳細地研究了平面和空間框架的自由和强迫振动的精确的和近似的計算方法。精确的方法最近在 B. Г. 朱諾夫斯基的著作中曾得到进一步的发展，但由于比較复杂，所以我們叙述的主是要近似計算法。利用拉格郎日（Лагранж）方程我們就可能把几个在前面的頻率求得。在这一章里面也研究了切力和回轉慣量以及橫杆的刚度对于框架振动的影響。在空間骨架的計算方面也提了一些見解。

在第十章里研究了有腹杆的結構。計算基本頻率時我們用的是能量法和假想荷載法。

在第十一章里叙述了弹性薄板振动頻率的求法。用肋条加固的矩形薄板計算方法，也进一步的得到发展。

在第十二章里研究了圓柱薄壳的振动，薄壳的两端是簡支的，或是固定的，而且闡述了支承情形的影响。

在第十三章里研究了杆件的縱向振动和扭轉振动，杆件上面可能有集中質量，也可能考虑衰减作用。在某些情形下我們采用了有限差数方程。

第十四章叙述了放在弹性地基上的薄板的振动，这是一个比較复杂的問題，在这种地基上面，假設反力和位移是不和普通那样依照有綫比例的規律改变，而依照弹性理論方程改变。

在第十五章里面，仔細的研究了杆件和薄板遭受冲击的现象，假定冲击是沒有弹性的，就是說墜落的物体在杆件或薄板的半个周期中間是不和杆件或薄板分开的。在接触的地点的局部形变倒沒有被考虑。这个問題是比較复杂的，到现在为止实际上还没有很方便的解法[42]。

因为篇幅的限制，所有关于非綫性振动，半和諧振动以及縱向力对于橫向振动的頻率的影响的基本方法等問題本书未放进。这些問題在文献[2]，[14—17]，[24—26]，[52]，[53]，[64]，[66]，[96]，[101]，[102]，[105]里面已經有詳細的闡明。

第一章 一个自由度的綫性系統的振动

第一节 最簡單的振动情况

一个自由度的保守的綫性系統的固有振动，是最簡單的振动情况。

我們取悬挂在弹簧上的荷载(图 1)，或联结在梁上的荷载(图 2)为例。弹簧及梁的本身重量与其荷载的重量比較，均可以忽略不計。使該荷载具有某种初速度和初偏度。如此，荷载将处在与变位的大小有关的恢复力的作用之下。

在該恢复力的作用之下，这个系統将进行振动。这种振动称为固有振动或自由振动。

例如，对于具有集中荷载 P 的无重量的梁(图 2)來說，恢复力等于：

$$R = -cy(l_1)$$

式中 $y(l_1)$ ——离开平衡位置的偏度

$$y(l_1) = y_0 + y_1;$$

这里 y_0 ——在 P 力作用之下的静力偏度；

y_1 ——离开静力平衡位置的偏度。

可见，恢复力与变形之間具有綫性的关系。

系数 c 是为了得到等于单位的位移所必須加在梁上的力，該力由梁的弯曲軸綫方程所决定。

例如，对于一个簡支梁在 $x=l_1$ 点的位移与力 P 之間的关系如下式：

$$y = \frac{Pl_1^2(l-l_1)^2}{3lEJ},$$

由此，
$$c = \frac{3lEJ}{l_1^2(l-l_1)^2}。$$

应用达郎貝尔(Даламбер)原理得到下列的振动方程：

$$P - \frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2} - c(y_0 + y_1) = 0. \quad (1.1)$$

因为

$$cy_0 = P,$$

所以

$$\frac{P}{g} y_1'' + cy_1 = 0 \textcircled{1}。$$

方程的一般解为：

① 原書爲 $\frac{P}{g} y_1 + cy_1 = 0$ ——譯者。

$$y_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.2)$$

式中

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{P}}. \quad (1.3)$$

今后将 y_1 简写成 y , 方程(1.2)可以写成下式:

$$y = A_1 \sin(\omega t + \alpha), \quad (1.4)$$

式中 A_1 ——振幅;

α ——初相角。

方程(1.2)是有正弦曲线性质(图3)的谐和振动的方程, 具有周期:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (1.5)$$

式中 ω ——固有振动或自由振动的圆频率。

ν 与 τ 成倒数的关系, 以下列等式表示:

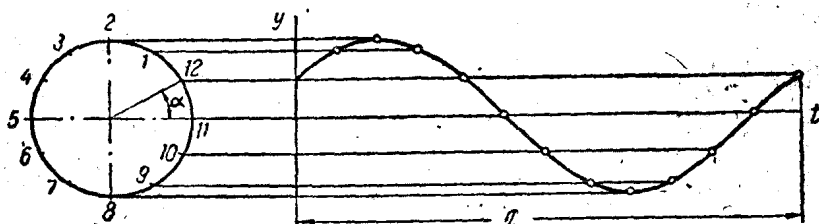


图3 谐和振动

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi},$$

式中 ν ——频率: 即单位时间(例如1秒)内振动的次数。如果 τ 是以秒来度量, 则 ν 是以赫芝来度量。常数 A 和 B (或 A_1 和 α) 决定于初始条件。例如, 当开始的时刻质量离开平衡位置的偏度为 y_0 , 并给它初速度 y'_0 , 则振幅 A_1 和相角 α 决定于下列式子:

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{y'^2_0}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega y_0}{y'_0}.$$

因为 $\frac{1}{c}$ 是单位力作用下的挠度, 所以 $\frac{1}{c}P = f_{st}$,

式中 $f_{st} = y_0$ ——由于 P 而得到的静力挠度。

基于这些, 在1分钟内振动的次数等于:

$$n = \frac{60}{2\pi} \omega = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}, \quad (1.6)$$

或

$$n \approx \frac{300}{\sqrt{f_{st}}}. \quad (1.6')$$

在公式(1.6')中 f_{st} 以公分表示, 这个公式在可以简化为一个自由度系统的计算情况下是常常被利用的。

例如, 放在弹性地基上的具有面积 F 和质量 M 的整体基础(图4), 在确定它的竖

向振动频率时，就可以看成是具有一个自由度的系统。

振动频率决定于公式：

$$\omega = \sqrt{\frac{C_z F}{M}} \quad (1.7)$$

式中 C_z ——土壤的弹性压缩系数，以公斤/公分³计。

类似的方法可以用公式(1.6')确定加上荷载P的柱子(图5)竖向(或纵向)振动的次数，当计算时柱子本身重量可以忽略不计。



图4 弹性地基上的基础



图5 有荷载的柱子

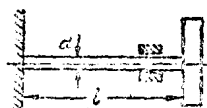


图6 装置在轴上的圆盘

在这种情况下

$$f_{st} = \frac{Ph}{EF} \text{ 公分}, \quad (1.8)$$

式中 E ——柱子的材料弹性模数，以公斤/公分²计；

F ——柱子的横截面积，以公分²计；

h ——柱子的高度，以公分计。

第二节 扭 转 振 动

考虑牢固装置在轴上的圆盘(图6)的扭转振动，作为另外一个例子。

假设长度为 l ，直径为 d 的轴的一端被固定，在另一端牢固地装置上一个质量为 M 的圆盘。如果令圆盘对其原始位置旋转某一个角度，则圆盘在轴的弹性所引起的恢复力矩的作用下将要做扭转振动。

当圆盘偏度为 φ 角时恢复力矩为：

$$M = -k\varphi \quad (1.9)$$

式中 k ——表示轴的刚性系数(系数 k 等于当轴扭转成为一个单位弧度的时候，轴的扭转力矩的数量)。其倒数 c 称为柔性。

扭转角

$$\varphi = \frac{Ml}{GI_p}, \quad (1.10)$$

式中 I_p ——轴截面的极惯性矩， $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ；

G ——剪切模数。

圆盘运动的微分方程为：

$$I\varphi'' + k\varphi = 0, \quad (1.11)$$

式中 I ——圆盘质量的极惯矩。

当圆盘的厚度为 $h(r)$ 时:

$$I = \frac{2\pi\gamma}{g} \int_0^{\frac{d}{2}} hr^2 dr. \quad (1.12)$$

方程(1.11)的解为:

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.13)$$

$$\varphi = M \sin(\omega t + \alpha). \quad (1.14)$$

或

$$\omega = \sqrt{\frac{GI_p}{I}}. \quad (1.15)$$

圆频率

$$\text{振动周期 } \tau = \frac{2\pi}{\omega}.$$

在变截面的情况下必须换算它的长度成为等截面轴的长度。其中对于直径为 d_2 长度为 l_2 的轴的一段, 换算为直径为 d_1 (图7) 的长度为:

$$l_{np} = l_1 \frac{d_2^4}{d_1^4}. \quad (1.16)$$

对于连续的圆锥段(图8), 极惯矩的平均值为:

$$I_{p, cp} = \frac{3I_{zp}}{\left(1 + \frac{c}{100}\right) \frac{d_2}{d_1} \left(1 + \frac{d_2}{d_1} + \frac{d_2^2}{d_1^2}\right)}, \quad (1.17)$$

式中 c ——考虑 $\frac{l}{d_2}$ 和 $\frac{d_2}{d_1}$ 的比值影响的修正系数。已知

$I_{p, cp}$, 就可以将圆锥段化为换算长度 l_1 。

数值 $\frac{I_{p, cp}}{I_{zp}}$ 决定于比值 $\frac{d_2}{d_1}$, 对于 $c=0$ 时可以由表1[61]中查出来。

对于 $c=0$ 时, 数值 $\frac{I_{p, cp}}{I_{zp}}$ 决定于比值 $\frac{d_2}{d_1}$

表 1

$\frac{d_2}{d_1}$	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.7	2.0
$\frac{I_{p, cp}}{I_{zp}}$	1.00	0.824	0.687	0.578	0.491	0.421	0.316	0.214

系数 c 的数值列入文献[95]中, 在该文献中也列入了各种情况下的 c 值。

第三节 有衰减时的自由振动

前面的叙述, 系假定当系统振动的时候, 在它的上面仅有恢复力的作用。

当然这仅适合于没有任何阻力(消散力)的理想情况下, 当具有这样的阻力的时候,

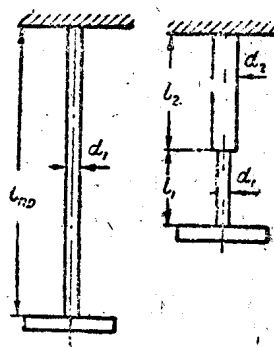


图 7 直轴的换算长度

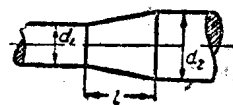


图 8 轴的圆锥部分

則产生能量的损失和振动的逐渐消失。例如，在弹性物体振动的时候，这样的力将是决定于介质(空气)阻力的外部衰减力，和决定于材料粘滞性的衰减力(内部衰减)。在后面这种情况下我們拿衰减力与速度的一次方成正比例，作为第一个近似的假定。虽然这一假定一般地不能完全与实际情况相符合。但是暂时仍然采用这个假定，关于振动的衰减問題，在以后我們还要讲得詳細一点。

对于一个自由度系統的振动，微分方程(1.1)得到下式：

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha \frac{dy}{dt} + cy = 0, \quad (1.18)$$

或

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2h \frac{dy}{dt} + k^2 y = 0. \quad (1.19)$$

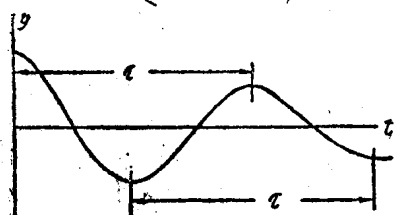


图 9 衰减振动图形

式中 M ——荷載质量；

α ——衰减特性系数；

$$2h = \frac{\alpha}{M}$$

$$k^2 = \frac{c}{M}$$

(1.20)

方程式的积分可以按一般的規則进行，或利用这个代替公式： $y = e^{-ht} u(t)$ 。

代入后得到：

$$u'' + (k^2 - h^2)u = 0.$$

这时必須区别下列几种情况：

a) 当 $k^2 - h^2 > 0$ 时。

在这种情况下

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (1.21)$$

式中

$$\omega^2 = k^2 - h^2,$$

$$y = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (1.22)$$

或

$$y = A_1 e^{-ht} \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (1.23)$$

A_1 和 ε 利用下列初始条件决定：

$$y(0) = y_0;$$

$$y'(0) = y'_0;$$

其数值为：

$$A_1 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(y'_0 + hy_0)^2}{\omega^2}}; \quad \text{ctg } \varepsilon = \frac{y'_0 + hy_0}{y_0 \omega}; \quad (1.24)$$

振动周期

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}. \quad (1.25)$$

由式(1.23)可见，振幅是随時間而减小的(图 9)。

周期为 τ 的第 i 个振幅 y_i 与第 $i+1$ 个振幅 y_{i+1} 的比值为：

$$\delta = \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = e^{h\tau}. \quad (1.26)$$

这个比值的自然对数

$$\ln \delta = h\tau \quad (1.27)$$

称为衰减的对数递减量，利用它由实验的方法可以求得衰减系数，这时一般地利用下式：

$$h\tau = \frac{1}{k} \ln \frac{y_i}{y_{i+k}} \quad (1.28)$$

由式(1.25)可见，当阻力较小的时候，具有衰减的振动周期与没有衰减的振动周期的区别将是很小的，不过振幅却要很快的减小下去，在这个周期中间减小的比值是 $e^{h\tau}$ (1.26)。如此，对于很小的 h

$$\tau \approx \frac{2\pi}{k} \left(1 + \frac{h^2}{2k^2} \right) = T_0 \left(1 + \frac{h^2}{2k^2} \right), \quad (1.29)$$

式中 T_0 ——无衰减的固有振动周期；

$\frac{h}{k} = 1.07$ 时，得到：

$$\tau = 1.0025 T_0.$$

对于这种情况，振幅减小的比值为：

$$\eta = e^{h\tau} = e^{1.0025 \times 2\pi \times 1.07} = 1.41;$$

6) 当 $k^2 - h^2 < 0$ ($\omega_1^2 = h^2 - k^2$) 时。

方程的解与前面所述的有同样的形式，而只是将三角函数换成双曲函数。

$$y = e^{-ht} (A \operatorname{ch} \omega_1 t + B \operatorname{sh} \omega_1 t) \quad (1.30)$$

运动将不带有振动的特征，一种不是周期的运动(或更正确地说是有限度的运动)并随着 t 的增加 y 将很快的减小，因为对于大的 $\omega_1 t$

$$\operatorname{ch} \omega_1 t \approx \operatorname{sh} \omega_1 t = \frac{1}{2} e^{\omega_1 t}.$$

对于当 $h^2 - k^2 = 0$ 的情况下，就得到衰减系数的临界值。这个时候是处在由振动过渡到有限度的运动。

在方程式(1.19)是采取了衰减与变形速度成正比例的。

这样在力和变形图上，就出现了一个椭圆形的磁滞环(图10)。

这是不难令人相信的，如果由下式消掉 $\frac{dy}{dt}$ 的话。

$$P = cy + 2h \frac{dy}{dt}. \quad (1.31)$$

事实上，对于谐和振动，

$$y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi). \quad (1.32)$$

可见，以 $\sin(\omega t + \varphi)$ 代替 $\cos(\omega t + \varphi)$ ，将式(1.32)代入式(1.31)以后得到：

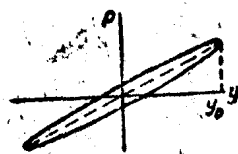


图 10 磁滞环

$$P = cy \pm 2h\omega \sqrt{1 - \frac{y^2}{A^2}}, \quad (1.33)$$

这里上部曲线用正号，下部曲线用负号。磁滞环的面积：

$$\Delta W = 2h\omega\pi A^2. \quad (1.34)$$

计算在一个周期内能量损失的数值：

$$W_i - W_{i+1} = \frac{c}{2}(y_i^2 - y_{i+1}^2). \quad (1.35)$$

假定

$$y_{i+1} = y_i - \Delta y,$$

得到

$$\frac{W_i - W_{i+1}}{2W_i} = \frac{\Delta y}{y_i}.$$

因为

$$\delta = -\ln \frac{y_i - \Delta y}{y_i} \approx \frac{\Delta y}{y_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta y}{y_i} \right)^2 + \dots \approx \frac{\Delta y}{y_i}, \quad (1.36)$$

所以由式(1.35)与(1.36)比较得到下列比值：

$$\delta = \frac{\Delta W}{2W}. \quad (1.37)$$

由式(1.34)得出结论是：因内部阻力能量的损失与振动频率及振幅的平方成正比。然而经验证明：对于大多数的材料当比较大的频率幅度时，能量的损失并不决定于振动频率。

因而很多的作者推荐拿系数 $\mu = \frac{h}{\omega}$ 代替 h ，即

$$\Delta W = 2\mu\pi A_i^2. \quad (1.38)$$

在技术文献中常常考虑以数量：

$$\psi = 2\delta, \quad (1.39)$$

来代替 δ 。

除此而外，还有一系列的假定，其中也有假设衰减的力是决定于变形的大小的，这些假定留在下面(第六章)来讲。

第四节 一个自由度系统的强迫振动

为了研究强迫振动，还必须考虑到外力 $f(t)$ 。那么，运动的微分方程(1.1)应当写成下式：

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + cy = f(t), \quad (1.40)$$

或

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{M} f(t), \quad (1.41)$$

式中

$$\omega^2 = \frac{c}{M}. \quad (1.42)$$