李元中　常心怡　等编著

实变函数论

陕西师范大学出版社

shi bian han shu lun

实 变 函 数 论

李元中　常心怡
李富民　吴保卫　编著
吉国兴

陕西师范大学出版社

实变函数论

李元中　常心怡
李富民　吴保卫　编著
吉国兴

*

陕西师范大学出版社出版
（西安市陕西师大120信箱）
陕西省新华书店经销　西安电子科技大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32　印张7.5　字数158千
1989年7月第1版　1989年7月第1次印刷
印数：1—2 500
ISBN 7-5613-0233-9

G·214　定价：1.55元

序　言

作为师范大学数学专业实变函数论课程的教材，本书以讲述勒贝格积分基本理论为中心。作为它的基础，又讲述了勒贝格测度和相应可测函数的主要性质，以及一些必要的集合论和点集论知识。书中略去了某些定理的较难的证明(如富比尼定理和单调函数可微性的证明)，以突出基本理论的思想、意义和线索。这样，它在内容上基本符合高师现行教学大纲，可供高师校内或函授使用。若是删去某些较难的章节(如微分与积分，L^p空间等)，也适用于师范专科学校。为了进一步学习的需要，书末增加了一个附录，讲述抽象测度和抽象积分的初步知识，可根据教学实际情况决定取舍。

在内容编写方面，我们力求采用较新而又简明的体系和讲法，使之紧凑，避免重复，突出重点，易教易学。例如，用简单函数积分的极限去定义可测函数的积分；用卡拉皆屋铎利条件去判断点集是否可测；从 R^n 中开集的一般性质引出直线上开集的特殊结构；对个别定理的证明方法作了改进；对一些定理及理论的意义和相互联系作了简要说明。书中还收进了较多的例题，以帮助读者理解理论、掌握方法。本书所选编的习题，大部分难度适中并与教材内容紧密配合，为了便利函授师生，书末附有习题的提示或解答。我们希望本书的这些特点能给教师和同学带来方便。

本书是在编者们教学实践的基础上，对自己原编写的讲义进行多次修改增删而成，是集体劳动的成果。许多同志曾

阅读或使用过原讲义，提出过宝贵的意见，本书也熔进了他们的智慧。由于我们的水平有限，书中不当之处仍在所难免，希望同志们批评指正。

编　　者

一九八八年五月

于西安

目　录

引　言

到 19 世纪末，经过哥西、黎曼等数学家的努力，微积分的基础已经牢固，应用广泛。在理论方面，人们致力于弄清一些基本关系：例如，连续函数是否处处可微，函数的导数是否都可积，积分以后是否还原于该函数，等等。在探讨的过程中人们发现，局限于数学分析的范围，无法彻底回答这些问题。其原因就在于，数学分析所研究的，基本上是一类性质相当好的函数——连续函数，而象一般函数的导数都没有这样好的性质。另外，物理等学科的发展，也要求把积分运算推广到更广的函数类上去，要求积分运算有更充分的灵活性。

实变函数论就是在这种形势下产生和发展起来的，其基本内容是测度论和积分论，研究对象虽仍为实变函数，但范围较数学分析更广。在方法上。大量采用集合论的方法，这就使得它可以对上述那些理论问题作出进一步的回答。实变函数论既是数学分析的继续和发展，又是泛函分析、概率论等数学分支的理论基础，在数学理论体系中处于承上启下的重要位置。

作为课程的实变函数论，其中心是勒贝格意义下的测度和积分理论，更为抽象意义下的这些理论，本书只在附录中略加介绍。而作为积分论的基础，本课程还包括一些集合论和点集论的必要知识。集论的知识在现代数学中已经广泛应用，对于中学数学教学也有极强的指导意义，所以，讲述它们还有独立的意义。

第一章　集合及其基数

§1.1　集合及其运算

一、集合的概念及其表示

集合论是德国数学家康托(G.Cantor，1845–1918)创立的，他于1883年发表了《一般集合论基础》，在这之后，集合论的思想几乎渗透到了数学的各个分支，得到了越来越广泛的应用，已成为现代数学的基础．

什么是集合呢？用康托的话来说，集合就是“我们察觉到的或在我们思维中的，一些确定的不同的事物的总体，这些事物称之为集合的元素”．这种说法，只是对集合这一概念的朴素的描述，并不是定义．因为“总体”并不比“集合”更好理解．本书只需采用这种描述性的说法，把某些确定的事物的全体称为一个**集合**，这些事物称为这个集合的**元素**．例如，全体自然数成一集合；区间$[a, b]$上的一切连续函数成一集合；某教室里的学生成一集合，等等．

集合简称**集**，通常用大写字母A、B、E、F等表示，而用小写的x、y等表示元素．若x是集A的元素，记为$x\in A$，读作“x **属于** A”；若x不是集A的元素，记为$x\overline{\in} A$，读作“x **不属于** A”．

若集A的每一元素都是集B的元素，则称A是B的**子集**，记为$A\subset B$，读作“A **包含于** B”或“B **包含** A”．若A是B的子集，而B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的**真子集**．

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 A 与 B 所含的元素完全相同，就称 A **等于** B，记为 $A=B$。

为了运算的方便，引进“空集”的概念。把不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。引进空集也是因为有时人们事先对于满足某种性质的元素是否存在并不了解，而需要谈论这种元素之集时的方便。例如，方程 $x^4+5x^2+4=0$ 的全体实根之集是空集。**规定**空集是任意集的子集。

通常表示集合有两种方法：列举元素法和指出特征法。

列举元素法，就是把集合中的元素全部列出。例如，$E=\{-1, 1\}$，$F=\{3,7,6\}$。列举元素法只适用于集合中只有有限个元素，或者集合中的元素可按某种方式排成有规律的序列.例如全体自然数之集可表为 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 等。

指出特征法是这样的。设 $\pi(x)$ 是一个关于 x 的命题，就把满足命题 $\pi(x)$ 的一切 x 之集表示为 $\{x:\pi(x)\}$。例如，$\{x: x^2=1\}$ 就是 $\{-1,1\}$；$\{x:f(x)>a\}$ 就是使 $f(x)>a$ 的一切 x 之集.把集合 E 中满足命题 $\pi(x)$ 的一切 x 之集记为：$E(x:\pi(x))$。例如，$E(x:\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x))$ 就是集合 E 中使 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 的一切 x 之集。$E(x:f(x)>a)$ 就是集合 E 中使 $f(x)>a$ 的一切 x 之集，或者更简单地表示为 $E(f>a)$。

二、集合的运算

交 集 A 与集 B 的一切公共元素之集，称为 A 与 B 的**交**，记为 $A\cap B$。(图 1)即

$$A\cap B=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

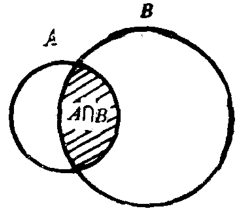

图 1

一列集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的交是指集

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : x \in A_n,\ \text{对一切自然数}\ n\ \text{成立}\}.$$

类似地可以定义任意个集的交：

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha,\ \text{对一切}\ \alpha \in I\ \text{成立}\}.$$

其中 I 为指标集。

例 1 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则

$$A \cap B = \{3,\ 4\}.$$

例 2 设 $A_i = \left\{x : 0 \leqslant x < 1 + \frac{1}{i}\right\}, (i=1,2,3,\cdots,)$ 则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{x : 0 \leqslant x < 1 + \frac{1}{n}\right\} = \left[0,\ 1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\} = [0,1].$$

若两个集合的交集是空集，就称这两个集不交。

并 把集 A 与集 B 的所有元素放在一起组成一集（相同的元素只取一次），称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$。（图 2）即

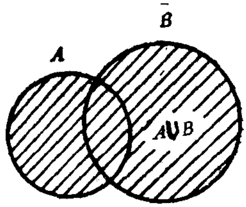

图 2

$$A \cup B = \{x : x \in A\ \text{或}\ x \in B\}.$$

一列集 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的并是指集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : \text{有自然数}\ n,\ \text{使}\ x \in A_n\}.$$

类似地，可以定义任意多个集的并：

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : x \in A_\alpha\ \text{对某}\ \alpha \in I\ \text{成立}\}.$$

例 3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5\}$，则

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

例 4 设 $A_i=\{x: i-1<x\leqslant i\}$，$(i=1,2,3,\cdots)$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\{x: 0<x\leqslant n\}=(0,n].$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i=\{x: 0<x<\infty\}=(0,\infty).$$

不难证明交与并具有下列性质：

定理 1.1.1

(1) 结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(2) 交换律

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cap B=B\cap A.$$

(3) 分配律

$$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha).$$

$$A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha).$$

(4) $A\cup A=A$；$A\cap A=A$.

(5) 若 $A\subset B$，则

$$A\cup B=B;\quad A\cap B=A.$$

(6) 若 $A_\alpha\subset B$，$(\alpha\in I)$，则 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\subset B$.

(7) 若 $A_\alpha\supset B$，$(\alpha\in I)$，则 $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\supset B$.

差、余：对二集 A、B，取属于 A 而不属于 B 的一切元素，作成一集，称为 A 与 B 的差，记为 $A-B$。(图 3)即

$$A-B=\{x:x\in A\text{且 } x\bar{\in} B\}.$$

例 5 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则

$$A-B=\{1,\ 2\}.$$

例 6 设 $A=\{x:f(x)\geqslant\xi\}$，$B=\{x:f(x)>\xi\}$，则

$$A-B=\{x:f(x)=\xi\}.$$

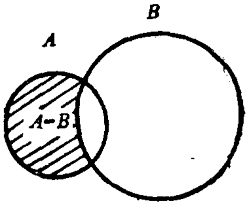

图 3

注意：(1) 作 $A-B$ 时并不要求 $A\supset B$。

(2) $(A\cup B)-B$ 一般并不等于 A，而是 $(A\cup B)-B=A-B$。$(A\cup B)-B=A$ 的充要条件是：$A\cap B=\varnothing$。

(3) $(A-B)\cup B$ 一般并不等于 A，而是 $(A-B)\cup B=A\cup B$。$(A-B)\cup B=A$ 的充要条件是：$B\subset A$。

如果讨论某一问题时，所涉及到的元素，都属于某集 S，就称 S 是基本集。这时所涉及到的集都是 S 的子集，我们把 $S-A$ 称为 A 关于 S 的余集，或简称 A 的余集，记为：A^c。

定理 1.1.2 差及余有下列性质：

(1) $S^c=\varnothing$，$\varnothing^c=S$；

(2) $A\cup A^c=S$，$A\cap A^c=\varnothing$；

(3) $A-B=A\cap B^c$；

(4) $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；

(5) $(A^c)^c=A$；

(6) 若 $A\subset B$ 则 $A^c\supset B^c$。

这些性质都是明显的，我们只证(3)。

任取 $x\in A-B$，于是，$x\in A$ 且 $x\bar{\in} B$，即 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，

从而 $x\in A\cap B^c$；另一方面，任取 $x\in A\cap B^c$，于是 $x\in A$ 且 $x\in B^c$，即 $x\in A$ 且 $x\overline{\in}B$，从而 $x\in A-B$。从以上两方面就得：$A-B=A\cap B^c$。

定理 1.1.3 对偶性定理（De Morgan，1806–1871，德）

并集的余集等于每个集的余集的交集；交集的余集等于每个集的余集的并集。

即 $\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$；$\left(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$。

证 先证第一个等式。

任取 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$，即 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，亦即 $x\overline{\in}A_\alpha(\alpha\in I)$，从而 $x\in A_\alpha^c(\alpha\in I)$，于是 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$。

另一方面，任取 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^c$，即 $x\in A_\alpha^c(\alpha\in I)$，亦即 $x\overline{\in}A_\alpha(\alpha\in I)$，从而 $x\overline{\in}\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，于是 $x\in\left(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha\right)^c$。第一个等式得证。

至于第二个等式，只要在第一个等式中把 A_α 代之以 A_α^c，再在两端取余即得。

对偶性定理以后常要用到，必须熟记。

极限 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一集列，取属于无穷多个 A_n 的所有元素作成一集，称为这个集列的**上极限**，记为：$\overline{\lim\limits_{n}}A_n$ 或 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。取属于集列中从某集开始向后的一切集的所有元素作成一集，称为这个集列的**下极限**，记为 $\underline{\lim\limits_{n}}A_n$ 或 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$。即

$$\overline{\lim_n} A_n = \{x : x \text{ 属于无限个 } A_n\},$$

$$\underline{\lim_n} A_n = \{x : \text{存在 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时}, x \in A_n\}$$

显然，$\underline{\lim_n} A_n \subset \overline{\lim_n} A_n$。

如果对某集列$\{A_n\}$有 $\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n$，就称$\{A_n\}$是**收敛的**。把 $A = \underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n$ 称为集列$\{A_n\}$的**极限**，记为：$\lim_n A_n$ 或 $\lim_{n\to\infty} A_n$。

例 7 设

$$A_n = \begin{cases} A, & \text{当 } n \text{ 为奇数；} \\ B, & \text{当 } n \text{ 为偶数。} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

其中 $A = [0, 2]$，$B = [1, 3]$，

由集列上、下极限的定义即知

$$\overline{\lim_n} A_n = [0, 3], \quad \underline{\lim_n} A_n = [1, 2].$$

这个集列的上、下极限不相等，故这个集列没有极限。

例 8 设 $A_n = \left[0, \ 1 + \frac{1}{n}\right]$，$(n = 1, 2, \cdots)$，由定义便知

$$\underline{\lim_n} A_n = \overline{\lim_n} A_n = \lim A_n = [0, 1].$$

为什么要用这种方式定义集列的极限呢？我们将会看到，它是和集列的特征函数列的极限紧密有关的。

对任意集 $A \subset S$，把 S 上的函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in A; \\ 0, & \text{当 } x \overline{\in} A. \end{cases}$$

称为集 A 的**特征函数**。于是，有以下定理。

定理 1.1.4 对任意集列 $\{A_n\}$ 都有

(1) $\varlimsup\limits_{n}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varlimsup\limits_{n}A_n}(x)$；

(2) $\varliminf\limits_{n}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varliminf\limits_{n}A_n}(x)$；

(3) 集列 $\{A_n\}$ 收敛的充要条件是它的特征函数列 $\{\chi_{A_n}(x)\}$ 在 S 上收敛。并且有

$$\lim_{n}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\lim\limits_{n}A_n}(x).$$

证 (1) 任取 $x_0\in S$，若 $x_0\in\varlimsup\limits_{n}A_n$，则 $\chi_{\varlimsup\limits_{n}A_n}(x_0)=1$，而此时 x_0 属于无穷多个 A_n，故有无穷个 n 使 $\chi_{A_n}(x_0)=1$，从而也有 $\varlimsup\limits_{n}\chi_{A_n}(x_0)=1$。

若 $x_0\bar{\in}\varlimsup\limits_{n}A_n$，于是 x_0 最多只属于某有限个 A_n，从而数列 $\{\chi_{A_n}(x_0)\}$ 中最多只有有限个 1，其余全为零，从而可知 $\varlimsup\limits_{n}\chi_{A_n}(x_0)=\chi_{\varlimsup\limits_{n}A_n}(x_0)=0$。于是(1)得证。

(2) 类似于(1)即可证得。

(3) 若集列 $\{A_n\}$ 收敛，即 $\varlimsup\limits_{n}A_n=\varliminf\limits_{n}A_n=\lim\limits_{n}A_n$。由(1)，(2)便知

$$\varlimsup_{n}\chi_{A_n}(x)=\varliminf_{n}\chi_{A_n}(x)=\lim_{n}\chi_{A_n}(x).$$

且有

$$\lim_{n}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\lim\limits_{n}A_n}(x).$$

若特征函数列在 S 上收敛，即

$\overline{\lim_n}\chi_{A_n}(x)=\underline{\lim_n}\chi_{A_n}(x)=\lim_n\chi_{A_n}(x)$，$(x\in S)$。

由(1)，(2) 便知 $\chi_{\overline{\lim_n}A_n}(x)=\chi_{\underline{\lim_n}A_n}(x)$。由二集的特征函数相等，就知 $\overline{\lim_n}A_n=\underline{\lim_n}A_n$。即$\{A_n\}$收敛。

定理 1.1.5 对任意集列$\{A_n\}$都有

$$\overline{\lim_n}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m;\quad \underline{\lim_n}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.$$

证 先证第一个等式。

任取 $x\in\overline{\lim_n}A_n$，即，属于无穷多个 A_n，从而 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$ $(n=1, 2, \cdots)$，于是，$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$。

另一方面，任取 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$，故 $x\in\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m$，$(n=1, 2,\cdots)$。因 $x\in\bigcup_{m=1}^{\infty}A_m$，故有 n_1使 $x\in A_{n_1}$，又 $x\in\bigcup_{m=n_1+1}^{\infty}A_m$，故有 $n_2>n_1$ 使 $x\in A_{n_2}$，如此下去，可得 A_{n_1}，A_{n_2}，$\cdots$ $(n_1<n_2<\cdots)$，它们都含有 x。于是 $x\in\overline{\lim_n}A_n$。从而第一式得证。

再证第二式。任取 $x\in\underline{\lim_n}A_n$，因而有$N$使 $x\in\bigcap_{m=N}^{\infty}A_m$，故 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$。

另一方面，任取$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m$，因而有 N 使 $x\in\bigcap_{m=N}^{\infty}A_m$，