初中数理化辅导丛书

北 京 出 版 社

因式分解

因　式　分　解

严以诚　孟广烈

北　京　出　版　社

因 式 分 解

严以诚 孟广烈

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京崇文门外东兴隆街51号）

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 三 厂 印 刷

*

787×1092毫米 32开本 4印张 78,000字

1982年8月第1版 1982年8月第1次印刷

印数 1—110,000

书号：7071·810 定价：0.32元

目　录

一、从因数分解谈起

多项式的因式分解，是代数学的基本课题．熟练地掌握它，对学好数学有重要作用．

多项式又叫整式．在研究整式的因式分解时，自然要联想到整数的因数分解．这不仅由于整式的因式分解与整数的因数分解有许多相似之处，而且它们在理论上也几乎是平行的．整式与整数是相互沟通的．它们从形式上能够互相转化．例如整数 1982，可以把它写成

$$1\times10^3+9\times10^2+8\times10+2$$

令 $x=10$，就得到整式

$$x^3+9x^2+8x+2$$

反过来，在上式中把 x 用 10 代入，就得到整数 1982．可见，整数的各位数字同与之相对应的整式中的各系数处于非常相似的地位．

整式的因式分解是整数的因数分解的推广与发展．因此，为了更好地掌握因式分解的概念与方法，下面先简要介绍一下有关因数分解的知识．

我们知道，两个整数的和、差、积仍是整数，但是用一个不等于零的整数去除另一个整数，所得的商就不一定仍是整数了．于是在整数除法中就出现能除尽和不能除尽两种情形．

一般地说，若 a,b 是任意两个整数，其中 $b\neq0$，如果存在一个整数 q，使得

$$a=bq \tag{1}$$

成立，就说 b 整除 a （或说 a 被 b 整除），记作 $b|a$，这时把 b 叫做 a 的一个**因数**，a 叫做 b 的**倍数**。

例如 $2|6$，2 就是 6 的一个因数．而 6 的所有因数是

$$\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$$

通常我们总是着重考虑正因数，因为只要知道了正因数，负因数也就随之而得了．

如果(1)里的整数 q 不存在，我们就说 b 不能整除 a，记作 $b\nmid a$，例如 $-4\nmid6$．这样就出现了带余数的除法，并且存在着大家熟悉的下述关系：

$$\text{被除数}=\text{除数}\times\text{不完全商}+\text{余数}$$

用符号确切地表示，就是：

$$a=bq+r,\quad 0\leqslant r<|b| \tag{2}$$

例如：$a=-15$，$b=4$，则 $q=-4$，$r=1$．

特别地，当 $r=0$ 时，$b|a$，即 a 被 b 整除．

根据上面关于因数的定义可知，任何一个大于 1 的整数，总能被 1 和它本身整除，也就是至少含有两个正因数．由于 1 的正因数只有它本身，因此在整数中，1 占有非常特殊的地位．我们对这些数加以分类，就有如下定义：

一个大于 1 的整数，如果它的正因数只有 1 及它本身，这个整数叫做**质数**(或**素数**)．一个大于 1 的整数，如果它的正因数除 1 和它本身以外，还有其它正因数，这个整数叫做**合数**．

1既不是质数，也不是合数．

对于一个合数，它除了含有1和它本身这样当然的因数外，还必然含有其它因数，且任何一个合数都可以用质数的积表示，这些质数叫做**质因数**．把一个合数表示成若干质数的积叫做**合数的质因数分解**．

例如，$360=2\times2\times2\times3\times3\times5=2^3\times3^2\times5$①

$$\begin{array}{r|l}
2 & 360 \\ \hline
2 & 180 \\ \hline
2 & 90 \\ \hline
3 & 45 \\ \hline
3 & 15 \\ \hline
 & 5
\end{array}$$

一般地说，把一个合数N分解质因数时，如果不考虑质因数的次序，并且相同的质因数都用幂的形式表示，那么N能唯一地表示成如下的标准分解式：

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_n^{\alpha_n}$$

其中p_1，p_2，p_3，$\cdots p_n$是不同的质数，α_1，α_2，$\alpha_3\cdots\alpha_n$是自然数．

前面规定1既不是质数，也不是合数，正是为了保证分解质因数的唯一性．

习　题　一

1．在下面各组数中的方格里，填上整除或不能整除的符号：

① 能被3，5，11等数整除的数的特征：

（1）一个数的个位数字是5或0，这个数能被5整除；

（2）一个数的各位数字之和能被3或9整除的，这个数能被3或9整除；

（3）一个数的奇数位数字之和同偶数位数字之和相减所得的差能被11整除，这个数能被11整除．

$3\square 111$，$17\square 51$，$-2\square 13$，$9\square 0$，$28\square 14$。

2．写出60的所有因数。

3．设 a，b，q，r 都是整数，并顺次表示被除数、除数、商及余数．试根据下列条件求出 q 及 r，并用 $a=bq+r$ $(0\leqslant r<|b|)$ 的形式把它们之间的关系表示出来．

(1) $a=455$，$b=13$；

(2) $a=-81$，$b=15$；

(3) $a=14$，$b=-3$．

4．求下列各数的标准分解式：

1260，4116420，34408。

5．设 a，b，c 是整数，证明：

(1) 若 $a|b$，$b|c$，则 $a|c$；

(2) 若 $a|b$，则 $a|bc$；

(3) 若 $a|b$，$a|c$，则 $a|(b\pm c)$。

二、有关因式分解的一些概念

（一）数　域

$$1-2=?$$

这个题目如果拿给一位中学生去做，他会不加思索地答出："等于-1"．而如果把这个题目拿给一位小学生去做，他可能会说："你出错题了，这个题不能解！"

对于同一个题目，为什么一个说"能解"，而另一个说"不能解"呢？如果我们从解题者是中学生还是小学生去求答案，那还没有找到问题的根本．问题的实质是，这位中学生是在全体整数的范围内解题，而那位小学生是在正整数范围内解题，数的范围不同，回答也就不一样了．类似这样的情况在讨论因式分解的问题的时候也会遇到，因此，我们首先讨论一下数的范围问题，介绍数域这个概念．

什么是数域？以有理数作为例子：全体有理数组成一个集合Q，在这个集合中，任意取两个数，它们的和、差、积、商（除数不等于零）仍然是有理数，也就是仍在数集Q之中，这时就说数集Q对于加、减、乘、除四种运算是封闭的．具有这种运算性质的有理数集Q就是一个数域．

不仅有理数集Q是一个数域，而且所有的具有这种运算性质的数集都叫做数域．例如，一切实数的集合R和一切复

数的集合C虽各有其自身的特点，但从运算角度看，它们和有理数集一样，也都是数域.

但是整数集不是数域，因为任意两个整数的商（除数不等于零）不一定仍是整数，它对除法运算不封闭；再如全体奇数组成的集合也不是数域，例如奇数3与1的和不再是奇数，它对于加法不封闭.

一般地说，如果一个数集P至少包含两个不同的数，且P关于加法、减法、乘法和除法（除数不等于零）封闭，则称P为**数域**.

除了有理数集、实数集和复数集是数域外，还有许许多多数集是数域. 以后，我们主要在有理数域上讨论问题. 对于涉及到实数域和复数域的问题，只是简略提一下. 如果读者没有学过实数或复数，可以把有关部分暂时略去不看.

（二）一元多项式

设有形如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

的代数式，其中n是非负整数，而$a_0,a_1,a_2\cdots a_n$都是某一数域P中的数，则(1)称做数域P上关于一个文字x的**多项式**，或**一元多项式**.

在多项式(1)中，a_0x^n，$a_1x^{n-1}\cdots a_n$叫做多项式的项；$a_0,a_1,a_2\cdots a_n$分别叫做各项的**系数**；若$a_0\neq0$，则a_0x^n叫做多项式的最高次项，非负整数n称为多项式的次数，这个多项式就叫做n次多项式，而其它各项顺次叫$n-1$次项、$n-2$次项$\cdots$，a_n叫**常数项**或**零次项**.

有些多项式可能是很长的．为了书写简便，经常用符号 $f(\quad)$ 表示多项式，例如多项式(1)，可用符号 $f(x)$ 表示，即

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

括号中写上 x，表示这是一个关于 x 的多项式．正象用字母表示数一样，不同的多项式用不同的符号表示，如 $g(x)$，$p(x)$，$f(t)$，$\varphi(y)$ 等等．

一个不等于零的常数，如 5，$-\frac{2}{3}$，$a(a\neq 0)$ 叫做**零次多项式**．而各项系数全为零的多项式

$$0x^n+0x^{n-1}+\cdots+0x+0$$

叫做**零多项式**，通常记作 0，它是唯一不规定次数的多项式．

根据多项式的定义可以知道：

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3+4x-1$$

$$g(x)=(\sqrt{2}+i)x+\pi$$

$$p(x)=\sqrt{5}$$

$$q(x)=0$$

都是关于 x 的多项式．而

$$\sqrt{x}-1,\quad x^2-x^{\frac{1}{3}}+2x^{-1}$$

都不是 x 的多项式，因为 x 的指数不全是非负整数．

我们知道，两个多项式可以相加、相减、相乘，例如

$$(2x^2-1)+(x^3-2x^2+x+2)=x^3+x+1$$

$$(x^2-2)(x^2+2)=x^4-4,$$

显见，某数域上的两个多项式经过加、减、乘的运算后，仍是这个数域上的多项式．然而两个多项式相除就不一定仍是多项式了．正象两个整数的和、差、积仍是整数，而两个整数的商就不一定再是整数了．例如：

$$f(x)=6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$$

$$g(x)=3x^2+x-6$$

若$f(x)$除以$g(x)$，可以用和多位数除法类似的方法，即

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2-3x+4\cdots\cdots\cdots\cdots q(x) \\
g(x)\cdots 3x^2+x-6 \Big) & 6x^4-7x^3-3x^2+24x-20\cdots f(x) \\
 & \underline{6x^4+2x^3-12x^2} \\
 & -9x^3+9x^2+24x \\
 & \underline{-9x^3-3x^2+18x} \\
 & 12x^2+6x-20 \\
 & \underline{12x^2+4x-24} \\
 & 2x+4\cdots r(x)
\end{array}$$

其中$2x^2-3x+4$叫做商式，一般用$q(x)$表示；$2x+4$叫做余式，一般用$r(x)$表示，$r(x)$的次数必须低于$g(x)$的次数．上述方法叫长除法或带余除法．

为了简便，我们把多项式的系数分离出来，并用如下形式表示：

$$\begin{array}{l|l}
6-7-3+24-20 & 3+1-6 \\
\cline{2-2}
\underline{6+2-12} & 2-3+4\cdots q(x)=2x^2-3x+4 \\
-9+9+24 & \\
\underline{-9-3+18} & \\
12+6-20 & \\
\underline{12+4-24} & \\
2+4\cdots\cdots r(x)=2x+4 &
\end{array}$$

象这种只写出各项的系数来进行计算的方法叫做**分离系数法**．

根据关系式

$$被除式=除式\times商式+余式$$

于是有

$$6x^4-7x^3-3x^2+24x-20$$
$$=(3x^2+x-6)(2x^2-3x+4)+2x+4$$

即

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)\quad(次数\ r(x)<次数\ g(x))$$

当 $r(x)=0$ 时，我们说 $g(x)$ 整除 $f(x)$，或说 $f(x)$ 被 $g(x)$ 整除．

一般地说，给出某一数域上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，其中 $g(x)\neq0$．如果存在多项式 $q(x)$，能使恒等式

$$f(x)=g(x)q(x)$$

成立，就说 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记作 $g(x)|f(x)$，而 $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个**因式**．$f(x)$ 叫做 $g(x)$ 的**倍式**．如果这样的 $g(x)$ 不存在，就说 $g(x)$ 不整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$．

以上我们讨论了一元多项式．在本书中也要遇到多元多项式，如 $x^3+x^2y+2xy^2z^2$ 等．多元多项式的理论与一元多项式的理论有许多相似之处，这里就不赘述了．

（三）因式分解的意义

前面已经讲过，把一个合数化为几个质数的积的形式叫做合数的质因数分解．对于任意一个合数，分解的结果是唯一的．对于多项式也有类似的情形，例如我们知道：

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2 \tag{1}$$

反过来，就有

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a) \tag{2}$$

乍看，这两个式子好象没有什么区别，只不过是等号两边交换了位置．实际上，它们表示着两种不同的变形．(1) 表示多项式 $x-a$ 与 $x+a$ 的积是 x^2-a^2，这是乘法运算；而(2)表示一个多项式 x^2-a^2 可以化为两个多项式 $x-a$ 与 $x+a$ 的积的形式，这就是我们要讨论的“因式分解”．这是两种相反的变形，即

$$(x+a)(x-a)\underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}}x^2-a^2$$

一般来说，把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做**多项式的因式分解**．

根据这种说法，我们可以知道：因式分解是对多项式来说的，而且因式分解的结果必须是整式的积的形式．若结果不是积的形式，不能叫因式分解．

现在我们把 x^2-a^2 做如下变形：

$$x^2-a^2=2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2\right)$$

试问，这种变形符合不符合因式分解的要求呢？

若按上面关于因式分解的说法，应说它是符合要求的．因为 2 和$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2$都是整式，且等号右边是积的形式．然而按照这种分法还可以写出许多来：

$$x^2-a^2=3\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}a^2\right)$$

$$=\frac{1}{5}(5x^2-5a^2)$$

$$=\pi\left(\frac{1}{\pi}x^2-\frac{1}{\pi}a^2\right)$$

$$=\cdots\cdots$$

但是，这种分解方法意义不大．因为，我们感兴趣的并不是要把多项式写成这样整式的积，正象在因数分解中我们感兴趣的，不是把一个合数写成1和它本身的积那样．因此在因式分解的意义中，实际是把这种情形排除掉的．

一般地说，如果 $f(x)$ 是给定数域上的多项式，并且 k 是这个数域中的任一非零常数，则

$$f(x)=k\left[\frac{1}{k}f(x)\right]$$

其中每一个非零常数 k 以及每一个与给定多项式 $f(x)$ 只差一个非零常数的多项式叫做 $f(x)$ 的**当然因式**．象2和$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a^2\right)$，$\frac{1}{5}$和$(5x^2-5a^2)$等，都是多项式 x^2-a^2 的当然因式；而 $x-a$ 和 $x+a$ 则是多项式 x^2-a^2 的非当然因式．

如果一个次数大于零的多项式在给定数域上只有当然因式，就说这个多项式在此数域上是**既约的**；否则，它就是**可约的**．代数中的既约因式(或叫质因式)与算术中的质因数相当．作为零次多项式的常数，其地位和数1在整数里的地位一样，既不说它们是可约的，也不说他们是既约的．

现在我们可以给因式分解一个比较确切的定义了：把一个多项式化成几个既约多项式的积的形式，叫做**多项式的因式分解**．

根据这个定义，各因式都必须是既约多项式，也就是分

得的因式如果还能够分解时，就要继续分解下去，直到每一个因式都不能再分解为止.

这里需要注意的是，一个多项式是否是既约的，和在什么数域上有关. 例如，

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2)$$

在有理数域上，x^2+2 和 x^2-2 都是既约的，它们都不能再分解了. 而在实数域上，又可进一步分解：

$$x^4-4=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

若在复数域上，还能再分解为：

$$x^4-4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

由此可见，因式分解里的所谓“不能再分解”其实不是绝对的，而是相对于多项式所在的数域而言的. 只有明确数域，“不能再分解”才有确切的含义.

现在我们问：

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

在实数域上是否已分解到不能再分了呢？

也许有人说，还可如下法去做：

$$\begin{aligned}x^2-a^2&=(x+a)[(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2]\\&=(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x}-\sqrt{a})\end{aligned}$$

假定在$\sqrt{x}$，$\sqrt{a}$都有意义的情况下，上面的回答对吗？如果认为是对的，那我们还可以继续往下写：

$$\begin{aligned}x^2-a^2&=(x+a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a})\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

试问，如此下去，无尽无休，何时是了？显然作为因式分解的题目，这样做是不妥当的. 这是因为，因式分解是要求把

多项式分解成几个多项式的积(单项式看做多项式的特例)，而$\sqrt{x}+\sqrt{a}$、$\sqrt{x}-\sqrt{a}$以及$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}$、$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}$等等，它们都不是多项式．事实上，一次多项式$x-a$已经是既约多项式，它不可能分解成两个次数再低的多项式了．因为次数低于1的多项式只有零次多项式(即非零常数)，而两个零次多项式的积仍是零次多项式，是不会等于一次多项式$x-a$的．因此，任何数域上的一次多项式总是既约的．在做因式分解的题目时，遇到因式是一次多项式时，就不要再企图对它进行分解了．

多项式的因式分解和整数的因数分解一样，结果也是唯一的．就是说，任何次数$\geqslant 1$的多项式，都可以分解为有限个既约多项式的乘积；并且这种分解式除去因式的次序及常数因式外是唯一的．

在分解式中，如果有相同的因式，则用幂的形式表示，那么$f(x)$可以唯一地表示成如下标准形式：

$$f(x)=cp_1^{\alpha_1}(x)p_2^{\alpha_2}(x)\cdots p_n^{\alpha_n}(x)$$

其中c是非零常数，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$是自然数．$p_1(x),p_2(x)\cdots p_n(x)$都是既约多项式．

这个结论通常称为**分解唯一性定理**．它仅仅说明因式分解的可能性和分解结果的唯一性，没有给出实际分解因式的任何具体方法．究竟怎样分解因式，我们将在以后各节中介绍．

习　题　二

1．指出下列各数集是不是数域：