

高等工科院校电子、信息类教材

电磁场理论基础

Fundamentals of Electromagnetics Theory

陈重 崔正勤 编著

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

0441.4
44

电磁场理论基础

陈 重 崔正勤 编著

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论基础/陈重,崔正勤编著. —北京:北京理工大学出版社,2003.2

ISBN 7-5640-0098-8

I. 电… II. ①陈…②崔… III. 电磁场—理论 IV. O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第095972号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68912824(发行部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京房山先锋印刷厂

装 订 / 天津市武清区高村印装厂

开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16

印 张 / 22.75

字 数 / 552千字

版 次 / 2003年2月第1版 2003年2月第1次印刷

印 数 / 1~4000册

责任校对 / 郑兴玉

定 价 / 29.00元

责任印制 / 刘京凤

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

电磁场理论是现代电子技术的基础课程，其应用涵盖了工业、农业、军事、医学和环境保护等各个领域，即使在饮食、家电等生活方面也得到广泛应用。没有电磁波的发射、传输和接收，就不会有电视、通信、雷达、遥感、测控和电子对抗等等。电磁场理论也是许多交叉学科的孕育点，学习电磁场理论对培养学生严谨的科学作风、抽象思维能力及科学的创新精神起到非常重要的作用。深厚的电磁场理论基础是欲在电子技术领域有所作为者不可或缺的功底。

电磁场理论的讲述无非是“从一般到特殊”和“从特殊到一般”两种途径，对不同读者两者各有其优点。根据作者二十余年讲授本课程的体会，在课程系统的总体安排上，按“从特殊到一般”的循序渐进方式，有利于初学者对本课程的理解；而讲授具体问题时，采用“从一般到特殊”的方法，则可以节省学时且理论上较为严谨。

本教材共分十章，第一章矢量分析作为学习电磁场理论的必要数学工具，强调了用各种坐标系描述物理关系的一致性及三种主要坐标系的相互关系和场论基础。第二、三、四、六章为静电场、恒定电场、恒定磁场和电磁感应，涵盖了普通物理中电磁学的全部内容，统一了普通物理中电磁学和电磁场两种描述方法。第五章静态场的边值问题侧重于分离变量法和镜像法，以有限差分法为例说明数值法在解决复杂边值问题时的重要性。第七章时变电磁场总结了宏观电磁理论，引出麦克斯韦方程组，讨论能流密度概念，为电磁波的论述奠定基础。第八章较详细地论述了平面电磁波的传播性质及其在边界面上的反射、折射，并对其在损耗媒质中的传播作了简要介绍。第九章导行电磁波讨论了导行波的基本原理和处理导行波的基本方法。第十章辐射讨论电磁能量的辐射原理，简单介绍了基本辐射天线。

本教材是作者在讲授“矢量分析与场论基础”、“电磁学”及“电磁波与边值问题”的讲义基础上合编而成的，以电磁学的基本物理概念为起点，建立电磁场理论的严格数学模型，并达到应有的深度。由浅入深、深浅结合的讲述使读者便于自学，免去学习电磁场理论还要经常查询普通物理内容的麻烦。本教材可以在只有中学物理和数学分析知识的基础上讲授，可以省去讲授电磁学的重复，并可节省许多授课时间，以适应当前课时普遍减少的实际需要。本教材的讲义经过了电子专业 1997~1999 级三届本科生使用，及合编后 2000 级的使用，取得良好效果，受到学生普遍欢迎，故而完成此书以供今后教学使用。

北京理工大学楼仁海教授主审本教材并提出了许多宝贵意见。北京理工大学卢荣章教授和王学田研究员以及电磁场与微波技术教研室的老师们对编写工作给予了极大支持，在此一并表示感谢。

根据学生的物理基础，本教材适用于课内讲授 64~96 学时。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点甚至错误，诚挚欢迎读者和同行专家指评指正。

作 者
2002 年 8 月

目 录

第一章 矢量分析	(1)
1.1 矢性函数及基本运算	(1)
1.2 正交曲线坐标系	(6)
1.3 梯度、散度和旋度.....	(15)
1.4 几种重要的矢量场.....	(27)
1.5* δ 函数、格林定理和亥姆霍兹定理	(34)
习题一	(40)
第二章 静电场	(43)
2.1 电荷与电荷密度.....	(43)
2.2 库仑定律.....	(45)
2.3 电场和电场强度.....	(46)
2.4 电力线与电通量.....	(50)
2.5 高斯定律.....	(52)
2.6 静电场的环路定理.....	(58)
2.7 电位和电位差.....	(59)
2.8 电位的泊松方程和拉普拉斯方程.....	(65)
2.9 电偶极子.....	(66)
2.10 电介质中的静电场	(69)
2.11 静电场中的导体	(77)
2.12 电场能量与静电力	(85)
2.13 电容	(92)
习题二	(99)
第三章 恒定电场和电流	(103)
3.1 电流与电流密度	(103)
3.2 恒定电流场的基本定律	(106)
3.3 电源和电动势	(109)
3.4 欧姆定律和焦耳定律	(110)
3.5 恒定电流场的边界条件	(116)
3.6 恒定电流场与静电场的类比	(117)
习题三.....	(120)
第四章 恒定磁场	(122)
4.1 磁力和磁感应强度	(122)
4.2 带电粒子在恒定磁场中的运动	(125)
4.3 安培磁力定律和毕奥-沙伐定律	(130)

4.4	恒定磁场的基本定律	(134)
4.5	矢量磁位和标量磁位	(139)
4.6	磁偶极子	(144)
4.7	磁介质的磁化	(146)
4.8	磁介质中恒定磁场的基本定律	(149)
4.9	铁磁介质	(151)
4.10	磁介质分界面上的边界条件.....	(154)
	习题四.....	(158)
第五章	静态场的边值问题.....	(162)
5.1	惟一性定理和解的叠加原理	(162)
5.2	拉普拉斯方程的分离变量法	(164)
5.3	镜像法	(178)
5.4	复变函数法	(187)
5.5	有限差分法	(195)
	习题五.....	(197)
第六章	电磁感应.....	(201)
6.1	法拉第电磁感应定律	(201)
6.2	法拉第电磁感应定律的推广	(206)
6.3	电感	(208)
6.4	磁场的能量	(215)
	习题六.....	(217)
第七章	时变电磁场.....	(220)
7.1	位移电流和推广的安培回路定律	(220)
7.2	麦克斯韦方程组	(222)
7.3	正弦电磁场	(224)
7.4	媒质的色散与损耗	(228)
7.5	电磁场的能量关系——坡印廷定理	(232)
7.6	电磁场的波动方程	(237)
7.7	标量位和矢量位	(238)
7.8	时变电磁场的边界条件	(240)
	习题七.....	(243)
第八章	平面电磁波.....	(247)
8.1	亥姆霍兹方程的一般解	(247)
8.2	理想介质中的均匀平面电磁波	(251)
8.3	电磁波的极化	(255)
8.4	导电媒质中的均匀平面电磁波	(258)
8.5	相速度和群速度	(265)
8.6	理想媒质界面上电磁波的反射和折射	(267)

8.7	全折射和全反射	(273)
8.8	有耗媒质界面的反射和折射	(276)
8.9	多层媒质的反射和折射	(278)
	习题八	(281)
第九章	导行电磁波	(286)
9.1	导行波的电磁场	(286)
9.2	矩形波导管中的电磁波	(288)
9.3	TE ₁₀ 模电磁波	(294)
9.4	波导中的能量传输与损耗	(297)
9.5	圆形波导管中的电磁波	(300)
9.6	传输线上的 TEM 波	(306)
9.7	谐振腔	(309)
	习题九	(314)
第十章	电磁波辐射	(317)
10.1	滞后位	(317)
10.2	赫兹偶极子辐射	(319)
10.3	磁偶极子天线的辐射	(323)
10.4	线天线	(325)
10.5	天线的方向性系数和增益	(327)
10.6	天线阵	(329)
	习题十	(331)
附录	常用的矢量计算公式	(333)
	习题答案	(334)
	符号表	(351)
	参考文献	(354)

第一章 矢量分析

矢量分析是电磁场理论的重要数学基础,本章在给出矢性函数概念、基本运算法则及正交曲线坐标系的基础上,引入标量场、矢量场的概念和反映场分布空间变化规律的几种重要运算——梯度、散度和旋度运算,讨论有势场、管形场、调和场等几种常用矢量场的基本性质,最后简单介绍电磁理论中经常用到的几个函数和数学定理。

1.1 矢性函数及基本运算

一、矢性函数的概念

可以用一个数的大小表示的量,称为数量或标量。不仅有大小而且有方向的量称为矢量。若矢量的大小(也称做模)和方向都保持不变,我们称这类矢量为常矢量,简称常矢;如果矢量的模或方向是变化的,则称之为变矢量,简称变矢。例如质点 M 沿曲线 l 作变速运动时,如图 1-1 所示,它的速度矢量 v 的模值和方向将随着时间变化, v 是一个变矢。

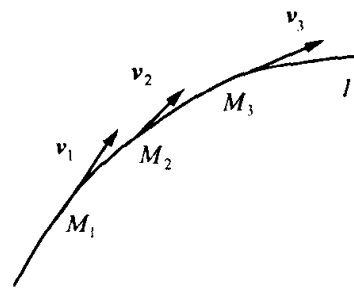


图 1-1 变矢

为了描述变矢,引入矢性函数的概念,一元矢性函数的定义如下:

定义:设有数性变量 t 和变矢 F ,如果对于 t 在某个区域 (t_1, t_2) 内的每一个数值, F 都有一个确定的矢量和它对应,则称 F 为数性变量 t 的矢性函数,记作

$$F = F(t) \quad (1-1)$$

区域 (t_1, t_2) 称为函数 $F(t)$ 的定义域。

矢性函数 $F(t)$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的 3 个坐标(即 $F(t)$ 在 3 个坐标轴上的投影)都是 t 的数性函数,用 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 表示,于是,矢性函数 $F(t)$ 可以写成

$$F(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t) \quad (1-2)$$

其中, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 为直角坐标系的 3 个坐标单位矢量,模值均是 1,方向分别与 3 个坐标轴的正方向相同,它们也可以写成

$$a_x, a_y, a_z \quad \text{或} \quad \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$$

为了用图形直观地表示一个变矢的变化状态,将矢性函数 $F(t)$ 所对应矢量的起点取在坐标系的原点,当 t 变化时,矢量 $F(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l ,如图 1-2 所示。这条曲线叫做矢性函数 $F(t)$ 的矢端曲线,一般规定沿 t 增加的方向为曲线的正方向,矢端曲线亦叫作矢性函数 $F(t)$ 的图形,同时称式(1-2)为此曲线的矢量方程。

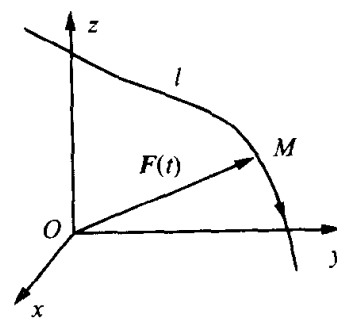


图 1-2 矢端曲线

当把 $F(t)$ 的起点取在坐标系原点时, $F(t)$ 实际上就是其终点 M 的矢径,矢径通常记作 $r(t)$ 或 $r(M)$,它的 3 个分量就是其终点 M 的 3 个坐标 x, y, z ,记作

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (1-3)$$

式(1-3)称为矢端曲线 l (以 t 为参数) 的参数方程, 所对应的矢量方程一般写成

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z} \quad (1-4)$$

容易看出, 曲线 l 的参数方程(1-3)和矢量方程(1-4)之间有着明显的一一对应关系, 只要知道其中的一个, 就可以立即写出另一个。例如, 图 1-3 所示的圆柱螺旋线的参数方程为

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = b \varphi$$

则其矢量方程为

$$\mathbf{r}(\varphi) = a \cos \varphi \hat{x} + a \sin \varphi \hat{y} + b \varphi \hat{z}$$

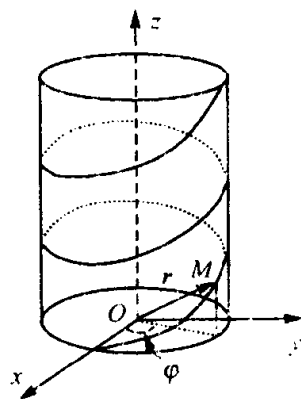


图 1-3

二、矢性函数的极限与连续

定义: 设 $F(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义(但在 t_0 点可以没有定义), F_0 为一常矢。若对任意给定的正数 ϵ , 都存在一个正数 δ , 使得 t 满足 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 有

$$|F(t) - F_0| < \epsilon \quad (1-5)$$

成立, 则称, 当 $t \rightarrow t_0$ 时, 矢性函数 $F(t)$ 有极限 F_0 , 记作

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F_0 \quad (1-6)$$

这个定义与数性函数的极限定义完全类似, 因此, 矢性函数也有类似于数性函数的一些极限运算法则, 如

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [f(t)F(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \quad (1-7a)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) \pm E(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} E(t) \quad (1-7b)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) \cdot E(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} E(t) \quad (1-7c)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [F(t) \times E(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} E(t) \quad (1-7d)$$

其中 $f(t)$ 为数性函数, $F(t), E(t)$ 为矢性函数, 且当 $t \rightarrow t_0$ 时, $f(t), F(t), E(t)$ 均有极限存在。

根据上面的公式, 设 $F(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t)$

$$\text{则有} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{x}F_x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{y}F_y(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \hat{z}F_z(t)$$

因为直角坐标系的 3 个坐标单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 都是常矢, 故上式可写成

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = \hat{x} \lim_{t \rightarrow t_0} F_x(t) + \hat{y} \lim_{t \rightarrow t_0} F_y(t) + \hat{z} \lim_{t \rightarrow t_0} F_z(t) \quad (1-8)$$

可见, 在直角坐标系内, 求矢性函数的极限, 可归结为求其 3 个分量的数性函数的极限。

定义: 若矢性函数 $F(t)$ 在 t_0 点的某个邻域内有定义, 而且有

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0) \quad (1-9)$$

则称 $F(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续。若 $F(t)$ 在 (t_1, t_2) 区间的每一点上都连续, 则称 $F(t)$ 在此区间连续。不难看出, 矢性函数在某点或某区间内连续的充要条件是它的每个分量在此区间都连续。

三、矢性函数的导数与微分

定义: 设矢性函数 $F(t)$ 在 (t_1, t_2) 上连续, 且 t 和 $t + \Delta t$ 都在此区间内, 如果极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta F(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad (1-10)$$

存在, 则称 $F(t)$ 在 t 处是可导的。这个极限值称为 $F(t)$ 在 t 处的导数, 简称导矢, 记作 dF/dt 或 $F'(t)$, 即

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad (1-11)$$

若 $F(t)$ 以直角坐标系表达式给出, 则有

$$F(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t)$$

代入式(1-11), 得

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow t_0} \left[\frac{F_x(t + \Delta t) - F_x(t)}{\Delta t} \hat{x} + \frac{F_y(t + \Delta t) - F_y(t)}{\Delta t} \hat{y} + \frac{F_z(t + \Delta t) - F_z(t)}{\Delta t} \hat{z} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow t_0} \left[\frac{\Delta F_x(t)}{\Delta t} \right] \hat{x} + \lim_{\Delta t \rightarrow t_0} \left[\frac{\Delta F_y(t)}{\Delta t} \right] \hat{y} + \lim_{\Delta t \rightarrow t_0} \left[\frac{\Delta F_z(t)}{\Delta t} \right] \hat{z} \end{aligned}$$

上式的每一分量均符合数性函数的导数定义, 可写成

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{dF_x(t)}{dt} \hat{x} + \frac{dF_y(t)}{dt} \hat{y} + \frac{dF_z(t)}{dt} \hat{z} \quad (1-12)$$

可见, 对矢性函数求导数, 在直角坐标系下可以归结为求其 3 个分量的数性函数导数的矢量和, 结果仍为矢量。例如图 1-3 所示的圆柱螺旋线的矢量方程为

$$r(\varphi) = \hat{x}a \cos \varphi + \hat{y}a \sin \varphi + \hat{z}b\varphi$$

则其导矢为

$$r'(\varphi) = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi} = -\hat{x}a \sin \varphi + \hat{y}a \cos \varphi + \hat{z}b$$

设矢性函数 $F = F(t)$, $E = E(t)$ 及数性函数 $f = f(t)$ 在 t 的某个范围内可导, 则下列公式在该范围内成立

- (1) $\frac{d}{dt} C = 0$ (C 为常矢)
- (2) $\frac{d}{dt} (F \pm E) = \frac{dF}{dt} \pm \frac{dE}{dt}$
- (3) $\frac{d}{dt} (cF) = c \frac{dF}{dt}$ (c 为常数)
- (4) $\frac{d}{dt} (fF) = F \frac{df}{dt} + f \frac{dF}{dt}$
- (5) $\frac{d}{dt} (F \cdot E) = F \cdot \frac{dE}{dt} + \frac{dF}{dt} \cdot E$
- (6) $\frac{d}{dt} (F \times E) = F \times \frac{dE}{dt} + \frac{dF}{dt} \times E$
- (7) 若 $F = F(u)$, 而 $u = u(t)$, 则有 $\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{du} \frac{du}{dt}$

导矢的几何意义如下: 设 $F(t)$ 为一起点固定的变矢, M 和 N 是矢端曲线 l 上的两点, 如图 1-4 所示, 则 $\overrightarrow{MN} = \Delta F = F(t + \Delta t) - F(t)$ 为割线 MN 上的一个矢量, 用 Δt 除上式所得

的矢量

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} \quad (1-13)$$

仍位于割线 MN 上。当 $\Delta t > 0$ 时, 该矢量的方向与 $\Delta \mathbf{F}$ 一致, 指向 l 的正方向(即 t 值增大的方向); 当 $\Delta t < 0$ 时, 其方向与 $\Delta \mathbf{F}$ 相反, 但因此时 $\Delta \mathbf{F}$ 指向 l 的负方向, 从而式(1-13)所表示的矢量仍是指向 l 的正方向。当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, 由于割线 MN 绕点 M 转动, 且以点 M 处的切线为其极限位置。此时, 在割线上的矢量 $\Delta \mathbf{F}/\Delta t$ 的极限位置自然也在此切线上。此时式(1-13)就变成了导矢的定义式(1-11)。由此可知, 导矢 $d\mathbf{F}/dt$ 在几何意义上表示 $\mathbf{F}(t)$ 的矢端曲线 l 上 M 点处的切线上的一个矢量, 其方向指向 t 增大的一方。

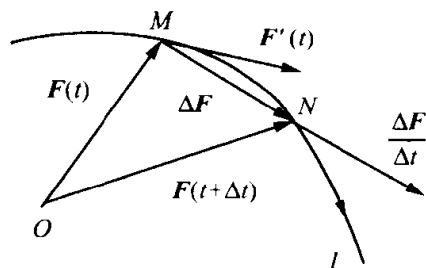


图 1-4 矢量的导数

定义: 设有矢性函数 $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$, 把

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}'(t)dt \quad (1-14)$$

称为矢性函数 $\mathbf{F}(t)$ 在 t 处的微分。

由于微分 $d\mathbf{F}$ 是导矢 $\mathbf{F}'(t)$ 与增量 dt 的乘积, 所以它是一个矢量。它和导矢一样, 在点 M 处与曲线 l 相切, 但其指向: 当 $dt > 0$ 时, 与 $\mathbf{F}'(t)$ 的方向一致; 而当 $dt < 0$ 时, 则与 $\mathbf{F}'(t)$ 的方向相反, 如图 1-5 所示。 $d\mathbf{F}$ 的直角坐标表示式可由下式求得

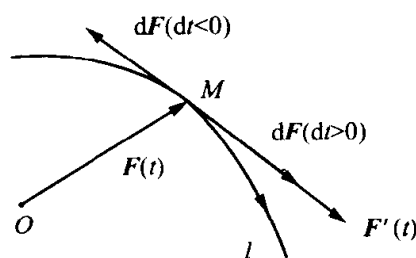


图 1-5 矢量的微分

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \mathbf{F}'(t)dt = F'_x(t)dt\hat{x} + F'_y(t)dt\hat{y} + F'_z(t)dt\hat{z} \\ &= dF_x\hat{x} + dF_y\hat{y} + dF_z\hat{z} \end{aligned}$$

模值为

$$|d\mathbf{F}| = \sqrt{(dF_x)^2 + (dF_y)^2 + (dF_z)^2}$$

特别指出, 矢径函数 $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$ 的微分为

$$d\mathbf{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

其模值为

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

另一方面, 由数学分析的曲线微分知识可知, 对于曲线 l 的弧长微分 dl 有

$$dl = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

比较上面两式, 有

$$|d\mathbf{r}| = |dl|$$

和

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} = \frac{|d\mathbf{r}|}{|dl|}\hat{e}_1 = \hat{e}_1 \quad (1-15)$$

其中 \hat{e}_1 是曲线 l 上指向正方向的单位矢量。式(1-15)说明, 矢径函数对其矢端曲线弧长的导数为曲线上的单位矢量。

四、矢性函数的积分

矢性函数的积分与数性函数的积分类似, 也分为不定积分和定积分两种。

定义: 若 $\mathbf{A}'(t) = \mathbf{F}(t)$, 则称 $\mathbf{A}'(t)$ 为 $\mathbf{F}(t)$ 的一个原函数, $\mathbf{F}(t)$ 的原函数的集合叫做 $\mathbf{F}(t)$ 的不定积分, 记作

$$\int \mathbf{F}(t) dt \quad (1-16)$$

和数性函数一样,若已知 $\mathbf{A}'(t)$ 是 $\mathbf{F}(t)$ 的一个原函数,则有

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{A}(t) + \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} \text{ 为任意常矢}) \quad (1-17)$$

由于矢性函数的不定积分和数性函数的不定积分在定义上完全类似,由此,数性函数不定积分的基本性质和运算法则对矢性函数仍然成立,如

$$(1) \quad \int c\mathbf{F}(t) dt = c \int \mathbf{F}(t) dt \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(2) \quad \int \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{C} \cdot \int \mathbf{F}(t) dt \quad (\mathbf{C} \text{ 为常矢})$$

$$(3) \quad \int \mathbf{C} \times \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{C} \times \int \mathbf{F}(t) dt \quad (\mathbf{C} \text{ 为常矢})$$

$$(4) \quad \int [\mathbf{F}(t) \pm \mathbf{E}(t)] dt = \int \mathbf{F}(t) dt \pm \int \mathbf{E}(t) dt$$

$$(5) \quad \text{若 } \mathbf{F}(t) = \hat{x}F_x(t) + \hat{y}F_y(t) + \hat{z}F_z(t) \quad \text{则有}$$

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \hat{x} \int F_x(t) dt + \hat{y} \int F_y(t) dt + \hat{z} \int F_z(t) dt$$

定义:设矢性函数 $\mathbf{F}(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上连续,则 $\mathbf{F}(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 上的定积分是指下面形式的极限

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{F}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i) \Delta t_i \quad (1-18)$$

其中 $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$, ξ_i 为区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 内的一点,

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \lambda = \max \Delta t_i [i = 1, 2, \dots, n]$$

可以看出,矢性函数定积分的定义也和数性函数完全类似。由此,也相应地具有数性函数定积分的基本性质和运算法则。例如

若 $\mathbf{A}(t)$ 是连续函数 $\mathbf{F}(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的一个原函数,则

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{A}(T_2) - \mathbf{A}(T_1) \quad (1-19)$$

此外,将矢性函数不定积分性质各式中的不定积分符号改为定积分符号,就可以用于定积分运算。

在本节中,仅讨论了一元矢性函数(即单自变量函数)的概念和运算方法。对于多元矢性函数的情况,读者可根据上述方法自行推证,其结果与多元数性函数是完全对应的。例如,在直角坐标系内,若 x, y, z 是 3 个相互独立的坐标变量,对于三元矢性函数 $\mathbf{F} = F(x, y, z)$,有偏导

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{F}(x, y, z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x + \Delta x, y, z) - F_x(x, y, z)}{\Delta x} \hat{x} + \\ &\quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_y(x + \Delta x, y, z) - F_y(x, y, z)}{\Delta x} \hat{y} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_z(x + \Delta x, y, z) - F_z(x, y, z)}{\Delta x} \hat{z} \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \hat{z} \end{aligned}$$

全微分

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = \left[\frac{\partial F}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z} \right] dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z} \right] dy + \left[\frac{\partial F}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial x} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z} \right] dz$$

1.2 正交曲线坐标系

一、正交曲线坐标系的概念

在直角坐标系中,空间任意一点 M 可以用一组有序坐标数 (x, y, z) 惟一确定,并记作

$$M(x, y, z)$$

如果将点 M 的位置用另外 3 个有序数 u_1, u_2, u_3 表示,记作

$$M(u_1, u_2, u_3)$$

若这 3 个有序数与 M 点在直角坐标系中的坐标 x, y, z 有单值函数关系

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{cases} \quad (1-20)$$

反过来, x, y, z 与 u_1, u_2, u_3 也是单值函数关系

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (1-21)$$

则称 u_1, u_2, u_3 为广义坐标系下 M 点的曲线坐标。

容易看出,当 c_1, c_2, c_3 为任意常数时,下面 3 个方程

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_2(x, y, z) = c_2 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases} \quad (1-22)$$

表示 3 族等值曲面,称为广义坐标曲面。由于 $u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)$ 均为单值函数,所以对空间的每一点,每族等值面中都只能各有一个等值面经过。可见,空间任意一点都对应 3 个等值曲面,该点是 3 个曲面的交点。

两坐标曲面相交所成的曲线称为坐标曲线。如曲面 $u_2 = c_2$ 和 $u_3 = c_3$ 相交的交线方程为

$$\begin{cases} u_2(x, y, z) = c_2 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}$$

在此交线上, u_2 和 u_3 值固定不变,而 u_1 的值是沿曲线单值变化的,因此,称它为 u_1 坐标曲线,或简称 u_1 线。同理有

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_3(x, y, z) = c_3 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} u_1(x, y, z) = c_1 \\ u_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

分别为 u_2 坐标曲线和 u_3 坐标曲线,如图 1-6 所示。

若过任意点 M 的 3 条坐标曲线都相互正交(即 3 条坐标曲线在该点的切线两两相互垂直),此时,相应的各坐标曲面也相互正交(即各坐标曲面在相交点处的法线相互垂直)。在选定原点后,就组成了一个广义的正交曲线坐标系。当给定式(1-20)和(1-21)的具体关系后,坐标面的形式被确定,广义坐标系变成一种具体的坐标系。其中,直角坐标系是 3 个坐标曲面都是平面的最简单情况。其他具体的坐标系,如圆柱坐标系、球面坐标系等,一般按其某一个坐标面的形状命名。

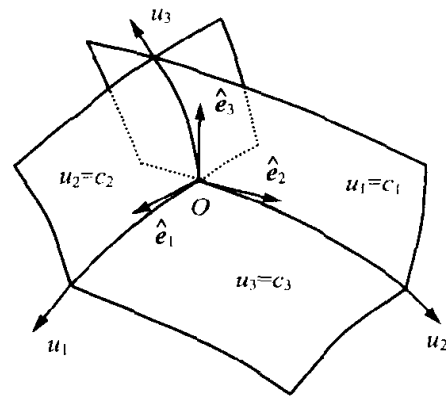


图 1-6 广义坐标系

二、单位矢量

为了在广义正交曲线坐标系中表示矢量,定义 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 为点 M 处的切线单位矢量,也称为 M 点处的坐标单位矢量。这 3 个单位矢量的模值均为 1,在 M 点分别与 u_1, u_2, u_3 线相切,正方向指向 u_1, u_2, u_3 增加的方向。由坐标线正交的定义可知,这 3 个单位坐标矢量是相互垂直的,有

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = 0 \quad (1-23)$$

和
$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3, \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1, \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \quad (1-24)$$

一般说来,坐标单位矢量 $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ 的方向随 M 点的位置而变化,因此,它们是 M 点坐标 u_1, u_2, u_3 的函数。但在直角坐标系中,3 个坐标单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 却是模值和方向都不变的常矢。

坐标单位矢量也可以由点的矢径函数定义。设空间任意点 $M(u_1, u_2, u_3)$ 的矢径函数为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$$

在过 M 点的 u_1 坐标线上, u_2, u_3 都是常数,而 u_1 是变量,所以 u_1 坐标线是 $\mathbf{r}(u_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3)$ 的 1 条矢端曲线。若取偏导数 $\partial \mathbf{r} / \partial u_1$,由前面所讨论的矢量导数几何意义可知,这表示 1 个与 M 点 u_1 坐标线相切的矢量,且指向 u_1 增加的方向。将 $\partial \mathbf{r} / \partial u_1$ 除以它的模 $|\partial \mathbf{r} / \partial u_1|$,得到一个单位矢量,这恰恰是前面所定义的 \hat{e}_1 ,即

$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial u_1}{|\partial \mathbf{r} / \partial u_1|} \quad (1-25)$$

记
$$h_1 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_1| \quad (1-26)$$

则有
$$\hat{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial u_1}{h_1} \quad (\text{或记 } \partial \mathbf{r} / \partial u_1 = h_1 \hat{e}_1) \quad (1-27)$$

同理 \hat{e}_2, \hat{e}_3 ,分别是与 u_2, u_3 线相切的坐标单位矢量,有

$$h_2 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_2|, h_3 = |\partial \mathbf{r} / \partial u_3| \quad (1-28)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial u_2}{h_2}, \hat{e}_3 = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial u_3}{h_3} \quad (1-29)$$

h_1, h_2, h_3 称为拉梅(Lame')系数或度量因子,一般情况下,它们是 M 点坐标 (u_1, u_2, u_3) 的函数。上面的 6 个式子也可以统一记作

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|, \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r} / \partial u_i}{h_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-30)$$

在直角坐标系中, 矢径函数记作

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (1-31)$$

在正交曲线坐标系中, 此矢径函数的 x, y, z 均是曲线坐标 u_1, u_2, u_3 的函数, 即

$$\begin{cases} x = x(u_1, u_2, u_3) \\ y = y(u_1, u_2, u_3) \\ z = z(u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (1-32)$$

将式(1-31)和(1-32)代入式(1-30), 并注意在 u_i 坐标线上, u_i 是变量而另外两个坐标量是常数, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 是常矢, 则有

$$\begin{aligned} h_i &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial u_i} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \hat{\mathbf{z}} \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1-33)$$

上式表明, 拉梅系数可以通过矢径函数计算。

我们知道, 空间曲线的弧微分有如下公式

$$dl = \pm \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \quad (1-34)$$

如果讨论 u_i 坐标线上的弧微分, 因另外两个坐标保持不变, 则有

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_i} du_i, dy = \frac{\partial y}{\partial u_i} du_i, dz = \frac{\partial z}{\partial u_i} du_i$$

代入式(1-34), 可得到 u_i 坐标线上的弧微分 dl_i 为

$$\begin{aligned} dl_i &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} du_i \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} du_i \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} du_i \right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2} du_i \end{aligned} \quad (1-35)$$

与式(1-33)比较, 有

$$dl_i = h_i du_i \quad (1-36)$$

上式表明了拉梅系数的几何意义: 拉梅系数 h_i 是 M 点处曲线坐标 u_i 的微分 du_i 与该坐标线 u_i 上弧微分 dl_i 的比例系数。

三、线元、面元和体元

在数性函数的微积分中, 经常用到线元 dl 、面元 dS 和体元 $d\tau$ 这几个微分量, 下面介绍正交曲线坐标系下上述微分量的定义。

1. 矢量线元

设 $M(u_1, u_2, u_3)$ 和 $M'(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$ 是正交曲线系空间的邻近两点, 从 M 点向 M' 点作一小矢量 $d\mathbf{l}$, 如图 1-7 所示。当 du_1, du_2, du_3 为无穷小量时,

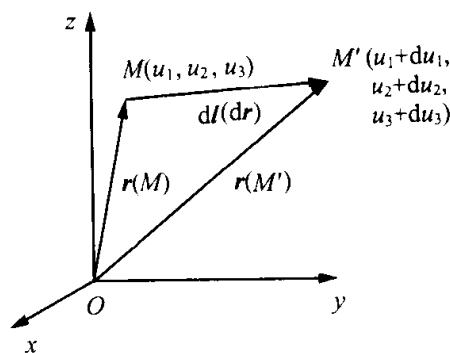


图 1-7 矢量线元

$d\mathbf{l}$ 称为 M 点处的矢量线元。因 M 点和 M' 点的矢径为 $\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$ 和 $\mathbf{r}(u_1 + du_1, u_2 + du_2, u_3 + du_3)$, 所以 $d\mathbf{l}$ 就是矢径函数 \mathbf{r} 的全微分增量 $d\mathbf{r}$, 按全微分计算法则, 有

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \quad (1-37)$$

将 $\partial \mathbf{r} / \partial u_i = h_i \hat{\mathbf{e}}_i$ 代入式(1-37), 得

$$d\mathbf{l} = h_1 du_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + h_2 du_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + h_3 du_3 \hat{\mathbf{e}}_3 = dl_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dl_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dl_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1-38)$$

$d\mathbf{l}$ 的模值为

$$dl = |d\mathbf{l}| = \sqrt{(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2} \quad (1-39)$$

其中 $dl_i = h_i du_i = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot d\mathbf{l}$ 是矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在 M 点 u_i 坐标线上的投影。

2. 矢量面元

设 $\hat{\mathbf{n}}$ 是有向曲面 S 上点 M 处的法向单位矢量, dS 是该点处的一小面积元, 如图 1-8 所示, 则

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1-40)$$

称为 M 点的矢量面元。

面元的法矢 $\hat{\mathbf{n}}$ 可以由其方向余弦和坐标单位矢量表示为

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\alpha \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\beta \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos\gamma \hat{\mathbf{e}}_3$$

其中 α, β, γ 是 $\hat{\mathbf{n}}$ 与 $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ 正方向的夹角。式(1-40)可以写成

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \cos\alpha dS \hat{\mathbf{e}}_1 + \cos\beta dS \hat{\mathbf{e}}_2 + \cos\gamma dS \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= dS_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dS_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dS_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1-41)$$

dS_i 是矢量面元 $d\mathbf{S}$ 在以 $\hat{\mathbf{e}}_i$ 为法线的坐标面上的投影, 我们可以将 dS_i 取成该坐标面上的两对坐标线元所成的矩形面元, 即

$$\begin{cases} dS_1 = dl_2 dl_3 = h_2 du_2 h_3 du_3 \\ dS_2 = dl_3 dl_1 = h_3 du_3 h_1 du_1 \\ dS_3 = dl_1 dl_2 = h_1 du_1 h_2 du_2 \end{cases}$$

代入式(1-41), 有

$$d\mathbf{S} = (h_2 h_3 du_2 du_3) \hat{\mathbf{e}}_1 + (h_1 h_3 du_1 du_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (h_1 h_2 du_1 du_2) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1-42)$$

3. 体元

在正交曲线坐标系中, 以 M 点处 3 条坐标线上的线元 dl_1, dl_2, dl_3 为棱作一个六面体, 称为 M 点处的体积元 $d\tau$, 如图 1-9 所示。 $d\tau$ 的体积为

$$d\tau = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 du_1 h_2 du_2 h_3 du_3 \quad (1-43)$$

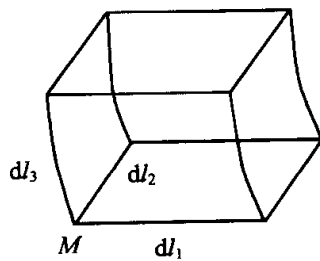


图 1-9 体元

四、3 种常用坐标系

直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系是 3 种最基本和最常用的正交坐标系, 下面结合广义正交曲线坐标系的概念, 对上述 3 种坐标系作简单的介绍。

1. 直角坐标系

直角坐标系是一种最基本的正交曲线坐标系, 并经常被作为其他坐标系的基础或参照。直

角坐标系的 3 个坐标面都是平面, 3 条坐标线都是直线, 空间任意点的 3 个坐标单位矢量的方向也都保持恒定。直角坐标系与广义正交曲线系的参量关系归纳如下:

- (1) $u_1 = x, u_2 = y, u_3 = z$
- (2) $\hat{e}_1 = \hat{x}, \hat{e}_2 = \hat{y}, \hat{e}_3 = \hat{z}$
- (3) $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$
- (4) $dl_1 = dx, dl_2 = dy, dl_3 = dz$
- (5) $dS_1 = dydz, dS_2 = dx dz, dS_3 = dx dy$
- (6) $d\tau = dx dy dz$

2. 圆柱坐标系

圆柱坐标系中, 空间点 M 由 3 个有序数 (ρ, φ, z) 决定, 它们与广义坐标的对应关系为

$$u_1 = \rho, u_2 = \varphi, u_3 = z \quad (1-44)$$

如图 1-10 所示, ρ 是 M 点到 Oz 轴的距离, φ 是过 M 点且以 Oz 轴为界的半平面与 xOz 正半平面的夹角; z 是点 M 到 xOy 平面的距离, 与直角坐标系中的 z 坐标相同。坐标量 ρ, φ, z 的定义域分别为

$$\begin{cases} 0 \leq \rho < +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{cases} \quad (1-45)$$

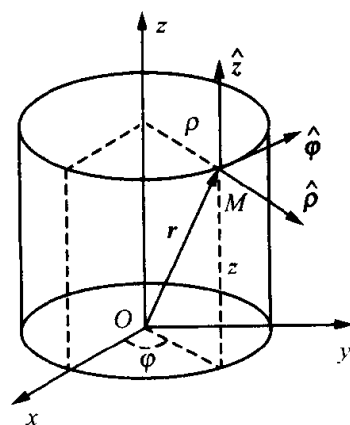


图 1-10 圆柱坐标系

过点 $M(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ 的 3 个圆柱坐标曲面分别为

$\rho = \rho_0$ ——以 Oz 为轴, ρ_0 为半径的圆柱面;

$\varphi = \varphi_0$ ——过 M 点且以 Oz 为界的半平面;

$z = z_0$ ——过 M 点且平行于 xOy 的平面。

3 条坐标曲线分别为

ρ 线: 方程是 $\begin{cases} \varphi = \varphi_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ 垂直 Oz 轴且过 M 点的径向射线;

φ 线: 方程是 $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ z = z_0 \end{cases}$ 过 M 点且半径为 ρ_0 的圆;

z 线: 方程是 $\begin{cases} \rho = \rho_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases}$ 过 M 点且与 Oz 轴平行的直线。

若空间一点同时用直角坐标和圆柱坐标表示, 即

$$M(x, y, z) = M(\rho, \varphi, z)$$

则两种坐标的变换关系为

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z \quad (1-46a)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctan \frac{y}{x}, z = z \quad (1-46b)$$

点 M 的矢径 r 为

$$\begin{aligned} r &= \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z \\ &= \hat{x}\rho \cos \varphi + \hat{y}\rho \sin \varphi + \hat{z}z \end{aligned} \quad (1-47)$$