高等学校試用教材

解析几何学

孙澤瀛編

高等教育出版社

高等学校試用教材

解析几何学

孙澤瀛編

高等教育出版社

解析几何学

孙澤瀛编

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）
商务印書館上海厂印刷 新华書店發行

統一書号13010·403 开本850×1168 1/32 印張11 3/16 插頁1 字数264,000 印數1—7,000
1958年5月第1版 1958年5月上海第1次印刷 定价(8)￥1.80

序　言

本書是根据教育部編訂的师范学院数学系解析几何試行教学大綱編写的，适合于师范学院数学系一年級解析几何一科的教学，曾在华东师范大学試用过。

編写过程中，除依照大綱所規定的內容配备材料外，并結合目前各地师范学院对这項大綱的反映以及培养学生独立思考与独立工作能力的号召，在教材的深度与广度方面作了适当的增加。据編者的了解，認为教材的內容应該比大綱所規定的多一些，才能使教师有灵活掌握与取舍的机会。因此，在不違背大綱的要求与学習时数的規定下，如何在教材深度与广度方面作适当的照顧，是費了編者一点心思的。考虑的結果，編者作了如下的調整：

(i)加辟一章專講圓。因为圓在初等几何中是一种重要的圖形，就与初等几何的联系来講，添这一章有它的好处。

(ii)根据圓錐曲綫的發生，用立体几何的方法由直圓錐的切口导出圓錐曲綫的类别与定义。

(iii)利用坐标变换下的不变量来簡化一般二次曲綫的判定。

(iv)对于一般二次曲綫的作圖作了較詳尽的討論。

(v)对于空間解析几何学部分，在平面、直綫与球面的討論中尽量利用向量方法处理使向量观念的引入不致失去作用。

(vi)对于重要的空間圖形如球面，另辟一章討論它。

(vii)对于空間坐标变换及其不变量作了較多的叙述。

(viii)对于一般二次曲面的討論，和一般二次曲綫一样，叙說得較詳尽。

(ix)每章習題的配备多注意于培养学生的独立思考与工作能力，套公式的題目不多。

(x)本書有些地方需要到行列式与矩陣的初步知識，因恐讀者沒有学到，特在最后加附录一章，作参考之用。

由于我国各地师范学院学生的程度不齐，教学进度有快慢，所以在必要时教师可根据教学大綱的精神，适当地精簡內容。例如省去第五章的圓与第十四章的球面不講，一般二次曲綫与一般二次曲面的討論酌量簡單一点。此外每一章节里的材料都可以根据实际情况或簡或詳，这純粹由任課教师掌握。如果說教学大綱应具有彈性，那么，結合教学大綱所編的教材更应該有彈性。本教材編写的精神就是为了要使它富于彈性，所以材料宁可多一些供教师的选擇，不讓教材太貧乏，使用者無取舍之余地。

在編写过程中，編者經常和华东师范大学数学系几何教研組的同志們保持联系，征求他們的意見。其中特別要提到的，是本書所有的插圖是由呂海嶼同志整理繪制的，書末的附录是由潘曾挺同志整理执笔的。对于他們編者深为感謝。

在編写时，編者經常参考了下列各書：

(1) H. M. 別斯金：解析几何学教程(王自楷、高鈵蘭譯)

(2) И. И. 勃立瓦諾夫：解析几何学(苏步青譯)

(3) H. B. 叶菲莫夫：解析几何簡明教程(肖長辰譯)

(4) C. П. 芬尼可夫：解析几何(叶述武等譯)

(5)矢野健太郎：解析几何学

(6)坂井英太郎：解析几何学

(7)山崎荣作：立体解析几何学講义

(8) G. Bol: Elemente der Analytischen Geometrie I. Teil.

(9) L. Bierberbach: Einführung in die Analytische

Geometrie.

(10) F. Neiss: Analytische Geometrie.

(11) A. Baur: Analytische Geometrie, Teil I.

(12) V. Snyder and C. H. Sisam: Analytic Geometry of Space.

(13) G. E. Hay: Vector and Tensor Analysis.

(14) L. P. Eisenhart: Coordinate Geometry.

(15) G. Salmon: Conic Sections.

(16) G. Salmon: Analytic Geometry of Three Dimensions.

由于編者的水平，內容不妥当或謬誤之处，定难避免，希望讀者提出批評指正。

孙澤瀛于上海 1956，11

目　录

緒　論

一、解析几何学的發生。解析几何学的創始人是笛卡尔(Descartes, 1596—1650)，他利用代数方法来处理欧氏几何学里的問題，这在数学的發展史上是一件極其重大的事情。因为有了它，才推动了近代数学的發展。現在要問他是怎样想到創立解析几何学的呢？要回答这一問題，我們不能不先叙述一下他所处的时代背景。

他所处的时代，据历史上說来，是文艺复兴的后期。那时正是中世紀教皇、君主、貴族所統治的黑暗时代趋于沒落的时期。广大的劳动人民長期地处于奴役的封建統治下开始有了翻身的覺悟与要求：个人自由主义抬头了，人权学說萌芽了，人与人的关系被注意到了。这时候的学术工作也相应地开始摆脫御用学者的包办，轉入到人民也可以过問了。本来作为少数人消遣，为特权阶級服务的科学經过一般人民的手也开始和自然現象結合、和生产結合，形成了自然科学以后的实証主义与合理主义。因为自由思想的傳播，这时的学术貢献，眞是蓬勃一时，正有如我国春秋战国时代一样。在笛卡尔的前后与同时，有推翻反动的天动学說而創立地动学說的哥伯尼(Copernicus)，有实証物理学的創始人伽利略(Galileo)，有在数学上作过輝煌貢献的費尔瑪(Fermat)和巴斯卡(Pascal)，有在文艺創作上独树一帜的莎士比亞(Shakespeare)，有創立血液循环論的哈費(Harvey)等人。处在这样一个变动的大时代，因为环境的影响，我們不难想像喜爱思索的笛卡尔应該有所表现了。

本来从实际生活需要而發生的欧氏几何学，在中世紀的封建統治下，被当做有閑阶級消磨时間的一种消遣工具也开始有了回复它原来作用的要求。同时，由东方劳动人民根据实际生活的体驗所建立的代数学也早已傳到了西方。再根据笛卡尔的主張，認为数学决不單是为了鍛煉人們的思考力，主要的是为了說明自然现象。因此依据他的理想，把几何学与代数学結合起来才最适宜于說明自然現象。于是解析几何学就产生了。

1619 年 11 月，西洋史上記載的 30 年战争还未完結，在德国参軍的笛卡尔从波西美亞（Bohemia）王費迪南二世（Ferdinand II）加冕为德意志皇帝的所在地福蘭克佛（Frankfurt）回到多腦河边的軍营里。正当初冬的季节，軍队沒有什么活动，营房里一切都很寂靜，沒有人来打扰他的思索，于是他开始想了。

他早先学过邏輯，在数学方面他学过几何学，此外还有一些代数学的知識，他对这三方面的学問都下过工夫。他認为邏輯里的三段論法以及其他方法只不过把已經曉得的事情如何向別人說清，此外并無其他作用。这些方法虽然有些是有用的，但其中也会有一些有害的或無用的成分。如何把这一部分去掉而保留那些有用的部分，他覚得这是很难的工作。此外希臘人傳下来的几何学与后来的代数学都是非常抽象的，对于实际的需要，不但不起什么作用。而且前者只限于圖形的观察，在理解时，使得想像力容易疲劳；后者只处理一些法則与記号，旣感麻煩、又不易体会。因此他苦心地想采取以上三种学問之長处而去掉它們的短处。他認为法律的条文太多了，反而容易給犯罪以借口，法律的条文要少但容易遵守反能减少犯罪的情形。根据他这种想法，用下面四項原則来代替邏輯里龐杂的說理方式，他覚得已够充分了。

（i）只有那些我們确实知道是眞实的事，才算是靠得住的，極力避免偏見与草率，在判斷里不允許稍有可疑的事項。

(ii)在思考过程中必須細致精密不容許含混籠統。

(iii)思考过程必須有完整的順序,由簡單的認識到复杂的認識。

(iv)思考要全面,討論要一般,不容許漏掉一樁事項。

根据这几項原則,他覺得数学里各分科虽然各有不同的对象,但是各分科之間有其一致性存在,只要去掉各科里不必要的假定就可以作統一的研究。本着这項精神,他在几何学与代数学之間进行截長补短的工作,結果就得出現在的解析几何学。

二、解析几何学的作用。在第一款里我們曾提到过,笛卡尔認为数学的主要作用在于說明自然現象。可是自然現象都是变动的,如何利用数学来說明变动的自然現象呢?首先我們必須把以前說明靜止狀态的数学加以新的解釋。例如說一条靜止的直綫,这时要把它看做是由一个变动的点所产生的。这种看法就形成了几何学里軌迹的概念。解析几何学里是把一切作为討論对象的圖形都看做是一点变动后所产生的軌迹,这样才适合于說明变动的自然現象。因此我們可以說解析几何学的第一項作用是如何利用靜的几何学知識来說明动的自然現象。

自然現象的变动是有規律的,而变动的过程在解析几何学是用圖形来表示的,因此解析几何学的第二項作用是如何用圖形的規律性来表达变动現象的規律性、而且要把这項規律用簡單明确的形式写出来。

現象的变动,分量变与質变兩种形态。解析几何学是以圖形来表达量变的过程,而量变是以数的变化来表示的,因此它不能不把作为几何对象的圖形与作为代数对象的数結合起来。所以它的第三項作用是如何把数与圖形統一起来,形成矛盾的統一。

要說明精細而复杂的变动必須利用分析学,分析学处理的对象仍旧是数。因此如果要以圖形来表达精确变动的直观形象,就

不能不以数与圖形統一起来所形成的解析几何学作为基础。从这一点来看，解析几何学的第四項作用是作为学習数学分析的准备，作为数学分析的内容之初步直观表現。

从解析几何学的第三項与第四項作用，我們曉得通过它，先是几何学与代数学結合起来，然后更进一步和分析学也結合起来。像这样地把数学中的三大分科：分析学、代数学、几何学来一个大結合，这正是近代数学發展的趋势。因此，解析几何学可以看做是近代数学的入門，这可以算做是它的第五項作用。

此外，有了解析几何学就为研究几何学加了一种新的方法：代数方法，这对于解决几何問題开辟了一条新的道路，提供了一种較全面的方法，而且有时比用純粹綜合法（就是初等几何里所用的方法）来得簡單省事，这是解析几何学的第六項作用。

从以上六項作用看来，就不难明了我們为什么要学解析几何学，学校里为什么要开解析几何学这門課了。

第一篇　平面解析几何学

第一章　直綫上和平面上的坐标

解析几何学既然是用代数方法来討論几何圖形，那么作为代数学基本对象的数和構成几何圖形的基本元素点之間必須有联系才成，这項联系是通过坐标的建立而形成的。这一章的主要目的就是講如何建立直綫上和平面上的坐标。

§1. 有向直綫和有向綫段

在初等几何学里，直綫一般是沒有規定方向的。但是如果以直綫来表示某种自然現象的形态，有了方向的規定，就比較方便了。例如說一条壁直的道路，这可以看做是直綫的直观表現。在人类的生活体驗中，同一条道路上的行动有往返的区别，这种区别我們用方向来規定。同一条道路上由南往北的行动不同于由北往南的行动，因为方向不同。因此由直观形态提出来的抽象概念直綫，为了更恰当地配合实际生活所遭遇的自然現象，就应該有方向的規定了。一条規定方向的直綫，为了和以前未規定方向的直綫区别起見称为有向直綫。

有向直綫有兩个互相反对的方向，我們可以随意选定其中的一个方向叫做正向，与此相反的方向就是負向。

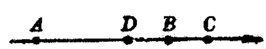

圖 1.

有的时候，我們称規定了正向的直綫为軸。为清楚起見，軸的正向用箭头来指示。如圖 1。

綫段是直綫上兩点間所截的部分，因此由有向直綫的概念自然地就發生有向綫段的概念了。在有向直綫（或軸）上任取二点 A 与 B，那么直綫的方向就規定了綫段 AB 的方向，前者的正向就規定了后者的正向。規定了方向的綫段就称为有向綫段。有向綫段的兩个端点中一个是起点，一个是終点。例如圖 1 中的点 A 是綫段 AB 的起点，点 B 是終点。为了方便起見，以后就用記号 $\overline{AB}$ 表示。从这里我們知道 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BA}$ 不同，因为起点不同了。

預先交代的是以后所指的綫段都是有向綫段，为了簡單起見，把“有向”二字省略了。

在算术里，我們已經知道数可用綫段来表示，办法是这样的[①]：选擇任意的一定長度單位来量这根綫段，这样就得出一个数，这个数的直观表現就是那根綫段，数的正負就相当于綫段的正負，綫段正負的規定是取决于它所在直綫的正負向的，前面已經提到过。

綫段的量与它的長度是不同的，綫段的量是以一个有符号的数来表示的；而綫段的長度是以一个数的絕对值来表示的，显然地長度是量的模数。因此如果綫段 $\overline{AB}$ 的量以記号 AB（去掉横綫）来表示，那么記号 $|AB|$ 就表示了綫段 $\overline{AB}$ 的長度。虽然 $|AB|$ 和 $|BA|$ 表示同一个数（正数），但

$$AB=-BA。$$

当綫段 $\overline{AB}$ 的兩个端点重合，这时称它为零綫段，它相当于数值“0”。因为“零”不分正負，所以零綫段的方向是不分正負的。

例如在圖 1 上，設 A 和 B 的距离等于 3 个單位，C 和 D 的距离等于 2 單位。根据圖上所规定的正向，我們得到

$$AB=3,\qquad CD=-2,$$

或

$$BA=-3,\quad DC=2。$$

① 关于数与綫段对应的严格証明見“几何基础”。

$$|AB|=|BA|=3,\quad |CD|=|DC|=2,$$
$$AA=BB=CC=DD=0。$$

§2. 綫段的加法

数既然可以相加，那么，作为数的直观形象的綫段也应該可以相加了。怎样来定綫段的加法呢？規定是这样的：第一綫段的終点必須合于第二綫段的起点；那么，以第一綫段的起点为起点，第二綫段的終点为終点得出一条第三綫段，这条第三綫段称做是前兩綫段的和。

在这种規定之下，我們推得有向直綫上任何三点 A, B, C 之間有如下的关系：

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}。\tag{2.1}$$

特別当点 C 合于点 A，得到

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}。$$

很明显地，上面的关系，可以扩充到

$$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\cdots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_0A_n}$$

及
$$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\cdots+\overline{A_nA_0}=\overline{A_0A_0}。$$

如果用綫段的量来表示以上的关系，那就可写成

$$A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n=A_0A_n$$

及
$$A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_nA_0=0。$$

綫段加法可以看做是数的加法的一种直观形象，有了綫段（有向綫段）与綫段加法就具备了充分的基础来引进点与数的对应，这就是下面所要講的点坐标。

§3. 直綫上的点坐标

在解析几何学里，一切几何圖形都当做是点所組成的。要想把一切几何圖形和数联系起来，就必須先把几何的基本对象——

点和代数的基本对象——数(这里只限定实数)联系起来。像这样与点联系起来的数就称为点的坐标。

到底怎样来建立这种对应关系呢?讓我們先从最简單的也是最基本的情况着手,那就是規定直綫上的点坐标。

任何一椿事物的規定是不能离开現有基础的,我們現有的基础是怎么?那就是有向綫段的观念。綫段的量是用数来表示的,綫段的兩端是点,这就是給予我們一种啓示如何把点与数連系起来。我們設想一条直綫上的点都是該直綫上同一起点,不同綫段的終点,这样一来,直綫上的点就对应着不同的綫段了,也就是直綫上的点对应着不同的数(不同綫段的量)。

根据这种想法,在一条直綫上擇取任何一点 O 作为上述不同綫段的同一起点,这点特别地称为原点。那么,直綫上任意一点 P 就被 $\overline{OP}$ 的量表示出来了,这个量以 x 来表示。因此点 P 和数 x 就發生了一一对应的关系,詳細地講,就是有了 P 就曉得了 x,反过来,有了 x 就可以决定 P。像这样的数 x 根据本节第一段的說法,就是点 P 的坐标。x 的正負取决于 $\overline{OP}$ 的正負,例如圖 2 里的 P 所对应的数是正的;如果点 P 在原点 O 的另一面,它所对应的数就是負的了。至于点 O (原点)所对应的数很明显地是 0,因为 $OO=0$。

圖 2.

因为綫段的量是靠方向与長度来定的,方向的正負取决于我們事先的規定,長度的决定照通常的办法用單位長度去量那条綫段而得到的。因此我們要决定直綫上某点 P 的坐标,只要采取如下的办法就成了。

从原点起用單位尺度来量 $\overline{OP}$,所得到的数就是 P 的坐标,坐标的正負要看 $\overline{OP}$ 方向的正負而定。

在直綫上选取原点 O 及單位点 E (單位綫段的量 $OE=1$ 所