# 连续介质力学基础

# Fundamentals of Continuum Mechanics

黄筑平

高等教育出版社

# 连续介质力学基础

黄筑平



高等教育出版社

## 内容简介

连续介质力学是近代物理学中的一个重要分支，它是以统一的观点来研究连续介质在外部作用下变形和运动规律的一门学科，是流体力学、弹性力学、粘弹性力学、塑性力学等众多力学课程的重要理论基础，已成为力学专业学生的必修课。

作者自 1986 年以来为北京大学力学系研究生开设了“连续介质力学”课程，本书是在该课程讲稿的基础上经过进一步充实和完善写成的，已被列为“高等学校理科‘九五’教材建设规划”第一批立项编写的教材。全书共分九章，内容包括张量基础、变形几何学和运动学、守恒定律和非平衡态热力学、本构理论、流体、有限变形下的弹性体、粘弹性体和弹塑性体，以及间断条件等。书中强调了基本概念提法的准确性和理论体系的严密性，在给出精确的数学推导的详细过程的同时，还尽可能地阐明数学方程所具有的物理内涵。在介绍连续介质力学的最新研究进展的同时，还尽可能地澄清目前存在的尚有争议的基本而又重大的理论问题。为了加深对书中内容的理解，各章还给出了适量的例题和习题，并在书后附有部分习题的解答或提示。本书可作为力学、应用数学、应用物理、工程科学等专业的研究生教材，也可作为力学和相关专业师生及科技工作者的参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

连续介质力学基础/黄筑平.—北京：高等教育出版社，2003

ISBN 7-04-011544-1

Ⅰ.连… Ⅱ.黄… Ⅲ.连续介质力学 Ⅳ.033

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 096724 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010—64054588 |
| 社　　址 | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | 免费咨询 | 800—810—0598 |
| 邮政编码 | 100009 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn |
| 传　　真 | 010－64014048 | | |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 照　　排 | 高等教育出版社照排中心 | | |
| 印　　刷 | 高等教育出版社印刷厂 | | |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2003 年 2 月第 1 版 |
| 印　　张 | 28.75 | 印　　次 | 2003 年 2 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 480 000 | 定　　价 | 39.10 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

# 序

连续介质力学(又称连续统力学、连续体力学)是近代力学的一个分支,它以统一的观点,高屋建瓴地研究连续介质在外部作用下的变形和运动规律,是诸多力学课程的理论基础。近年来,我一直关注着这一分支学科的进展,1977年我发起、建立了中国力学学会理性力学和力学中的数学方法专业组(后成为专业委员会),尔后通过多次学术活动和倡议翻译有关连续介质力学的专著,大力推动这一领域的研究。这些年来,已有不少连续介质力学的著作在国内问世。最近,我欣喜地注意到,北京大学黄筑平教授的《连续介质力学基础》即将付梓,此书颇有特色,值得学术界注意。

我在二十年前组织了一次全国非线性力学学术会议,会上认识了当时还是年轻学者的黄筑平,他在会上所做的关于理想刚塑性动力学的两个间断定理的报告引起了人们注意。后来我了解到,黄筑平教授几十年来,一直孜孜不倦地从事弹塑性大变形理论的研究,凭着他深厚的数理力学根底,力图澄清这一领域中有争议的一些基本问题,提出了不少独到见解,基于他的学术造诣,他被聘任为上海大学兼职教授,为上海大学上海市应用数学和力学研究所做了不少实事。

连续介质力学是一门相当难于阐释的学科,描述起来既不能过于抽象,脱离物理实际,又不能局限于个例,缺乏系统性和完整性,而黄筑平的这部著作经过多年反复磨砺、修改,较好地避免这两方面的缺陷,达到了较高的学术水平。具体说来,该书有下述特点:

(1) 概念清晰、体系严密。该书特别注意基本概念提法的准确性和理论体系严密性的结合,尽可能阐明了各种物理内涵以及有关的实验证据,强调了理论描述的朴实性和系统性;

(2) 观点鲜明、论述严谨。在连续介质力学专著中常有众说纷纭、莫衷一是之处,作者力图以足够的证据和充分的演绎,澄清各种有歧见的重要理论问题,其中关于非平衡态的热力学和有限变形弹塑性本构理论方面,所发表的见解很有新意;

(3) 取材新颖、立足前沿。由于作者长期从事相关领域的研究,书中充分反映了最新研究成果,包括作者近年的研究心得和著述,这在后四章

中体现得尤为明显。

(4) 深入浅出、明白易懂。连续介质力学方面的著作往往失之于艰涩难懂,本书作者在取材、处理和编排上作了审慎考虑,采用了文献中的通用记法,尽可能以简明而准确的语言阐述深奥的道理,使读者易于接受。

当今社会普遍有浮躁心理,人们往往急功近利。黄筑平教授长期以来安心从事基础理论研究,以十五年之功推出这本著作,这种精神本身就值得称道。我相信,本书的推出,必将有利于我国的力学教学与科研事业的发展。

钱伟长

二〇〇一年十月九日

# 前　言

我们通常所遇到的物质是由大量的微小粒子(如原子、分子)组成的。连续介质力学并不重点考察个别粒子的运动规律,而是研究这些粒子运动的统计平均效应,即物质的宏观力学行为。因此,我们通常所说的宏观物质单元(或物质点)实际上包含了大量的粒子,由此所引进的宏观物理量,如温度、密度、应力等等都是相应的微观量的统计平均。基于这种认识,在连续介质力学中,真实的物质将被抽象为一个连续体。因为在连续体中的宏观物理量一般要随物质点的改变而改变,所以,关于连续介质力学的基本理论是在场论的基础上建立起来的。

连续介质力学的基本方程有三类:

(1) 关于物体变形和运动的几何学描述,它可具有任意要求的精度。

(2) 适用于一切连续介质的物理基本定律,如质量守恒定律、动量守恒定律等等以及热力学定律。由于未考虑量子效应和相对论效应,它仅在一定的尺度范围和较小的运动速度下近似成立。

(3) 描述材料力学性质的宏观本构关系。由于材料力学性质的多样性和复杂性,以及现有实验条件的限制,通常我们所建立的本构关系将不可能达到以上两类方程的精度。

以上三类基本方程,连同相应的初始条件和边界条件,将构成数学物理方程的初、边值问题的完整提法。因此,连续介质力学的任务首先是讨论基本方程的建立,其次是关于初、边值问题的求解,并由此来揭示物体在变形和运动过程中的基本特性。

由于新型材料的不断出现,以及材料强韧化设计的需要,本构关系的研究已成为当前变形体力学中的研究热点之一,力学与材料科学相结合,宏观-细观-微观相结合的研究方法已愈来愈受到人们的重视。这无疑为连续介质力学的发展增添了新的活力。反之,连续介质力学中所建立的具有共性的基本原理,又为具体材料本构关系的构造提供了相应的理论依据。因此,学习连续介质力学不仅对于更深刻地理解力学中各个分支学科(如流体力学、弹性力学、粘弹性力学、…)的内容有帮助,而且对于深入进行材料本构关系的研究也是必不可少的。

自1986年以来,本书作者为北京大学力学系研究生开设了“连续介质力学”必修课,本书是在该课程讲稿的基础上,经过充实和完善写成的。

本书强调了基本概念提法的准确性和理论体系的严密性，并结合连续介质力学的最新研究进展，力图澄清目前存在的尚有争议的基本而又重大的理论问题。

考虑到张量运算是连续介质力学中最基本的数学工具之一，本书第一章对张量理论作了必要的介绍，可作为学习连续介质力学时的参考。特别是§1.5(仿射量)、§1.6(张量分析)和§1.9(张量表示定理)中的有关知识，可以看作是学习以后几章时的必要数学准备。本书第二章和第三章分别对物体变形和运动的几何学描述，以及物体变形和运动所应遵循的基本物理定律进行了系统地讨论。虽然目前在非平衡态热力学的理论中存在一些有争议性的问题，本书还是给出了使理性力学家和物理学家双方都能接受的非平衡态热力学的一种表述形式。本书第四章对构造本构关系时所应遵循的基本原理和物质分类进行了讨论，同时还介绍了作者本人所建议的一种新的物质分类方法。本书第五章是关于简单流体的讨论。第六、第七和第八章分别讨论了在有限变形条件下弹性体、粘弹性体和弹塑性体的本构关系，并给出了某些简单问题的求解实例。应该说，采用诸如流体、弹性体、粘弹性体和弹塑性体等术语是十分粗糙的、不严格的，因为它们之间并没有明确的分界线。然而，为了强调在特定的外部环境作用下物体所表现出来的特有的变形规律，将物体分为流体、弹性体等不仅能简化问题的讨论，而且能对问题的物理本质有更加深入的认识。由于篇幅所限，书中未能秉括关于铁电体、生物体，以及其他一些典型材料的本构关系的讨论。有兴趣的读者可参考相关的文献(例如，Eringen A C, Maugin G A. Electrodynamics of Continua. New York: Springer-Verlag, 1990；冯元桢. 连续介质力学导论(中译本). 重庆大学出版社, 1997)。本书的最后一章是关于间断条件的讨论，其中也介绍了作者提出的理想刚塑性动力学中的两个间断定理。需要说明，为了强调书中的某些概念，我们在相应文字的下方加上了黑点，以便引起读者的重视。书中有些章节或例题是带“*”号的，根据教学的具体情况，这些带“*”号的部分也可以略去不讲。

在本书的写作过程中，得到了许多同行的关心、支持和帮助。这里，我首先要感谢的是中国科学院研究生院的王文标教授。多年来，他与作者就许多共同感兴趣的问题进行过十分有益的讨论。此外，清华大学的郑泉水教授，北京航空航天大学的黄执中教授，美国 Notre Dame 大学的黄乃建教授，中国科学院力学研究所的谈庆明研究员、范椿研究员和梁乃刚研究员，北京大学陈维桓教授、林宗涵教授、殷有泉教授和李植副教授，上海大学的钱伟长教授和戴世强教授以及北方交通大学的高玉臣教授等

等都对本书的出版提出过许多宝贵的意见，在此谨向以上各位教授表示深深的谢意。

鉴于作者水平有限，错漏和不当之处在所难免，恳请读者和专家们批评指正。

黄筑平

2002年3月

# 常用符号表

在绝大多数情况下，本书将以白体字母表示标量，以黑体字母表示向量、仿射量或高阶张量。下面将列出书中最常出现的符号，其中有些符号也可能还会有其他的含义，但可以通过上下文的说明来加以区分。

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{a}$ | | 加速度 |
| $\boldsymbol{A}_{(n)}$ | | $n$ 阶 Rivlin－Ericksen 张量 |
| $\boldsymbol{B}$ | | 左 Cauchy－Green 张量 |
| | $C_{\mathrm{E}}$ | 定容比热 |
| | $C_{\mathrm{T}}$ | 定压比热 |
| | curl | 旋度 |
| $\boldsymbol{c}$ | | 左 Cauchy－Green 张量 $\boldsymbol{B}$ 的逆 |
| $\boldsymbol{C}$ | | 右 Cauchy－Green 张量 |
| | det | 行列式 |
| | diag | 由对角元素表示的仿射量 |
| | div | 散度 |
| | $\mathrm{d}s$ | 线元 |
| | $\mathrm{d}S$ | 面元 |
| | $\mathrm{d}v$ | 体元 |
| $\boldsymbol{D}$ | | 变形率张量 |
| $\boldsymbol{e}$ | | Euler 型应变度量 |
| $\boldsymbol{E}$ | | Lagrange 型应变度量 |
| | $Fr$ | Froude 数 |
| $\boldsymbol{F}$ | | 变形梯度 |
| | $G$ | Gibbs 自由能密度 |
| $\boldsymbol{g}_i$ | | 空间坐标系 $\{x^i\}$ 中的协变基向量 |
| $\boldsymbol{G}_A$ | | 物质坐标系 $\{X^A\}$ 中的协变基向量 |
| | $h$ | 单位时间内单位质量上的分布热源 |
| | $H(t)$ | Heaviside 单位阶梯函数 |
| $\boldsymbol{I}$ | | 单位仿射量 |
| $\overset{(1)}{\boldsymbol{I}}$ | | 四阶单位张量 |
| | $\mathscr{J}$ | 体元变形后与变形前的体积比 |

| | | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{J}$ | | 加速度梯度的反对称部分 |
| | $K$ | 动能 |
| $\boldsymbol{l}_a$ | | 左伸长张量 $\boldsymbol{V}$ 的单位特征向量 |
| $\boldsymbol{L}_a$ | | 右伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 的单位特征向量 |
| $\boldsymbol{L}$ | | 速度梯度 |
| | $Ma$ | Mach 数 |
| $\boldsymbol{N}$ | | 变形后物体边界上的单位外法向量 |
| ${}_0\boldsymbol{N}$ | | 变形前物体边界上的单位外法向量 |
| | $\mathcal{O}_3$ | 正交群 |
| | $p$ | 压强 |
| $\boldsymbol{q}$ | | 热流向量 |
| $\boldsymbol{Q}$ | | 正交张量 |
| | $Re$ | Reynolds 数 |
| $\mathbb{R}$ | | 实数 |
| $\boldsymbol{R}$ | | 转动张量 |
| | sp | 张成 |
| $\boldsymbol{S}$ | | 第一类 Piola - Kirchhoff 应力 |
| | $t$ | 时间 |
| | tr | 迹 |
| $\boldsymbol{T}$ | | 与 Lagrange 应变 $\boldsymbol{E}$ 相共轭的应力 |
| $\boldsymbol{u}$ | | 位移向量 |
| $\boldsymbol{U}$ | | 右伸长张量 |
| $\boldsymbol{v}$ | | 速度 |
| $\boldsymbol{V}$ | | 左伸长张量 |
| $\boldsymbol{W}$ | | 物质旋率 |
| $\boldsymbol{x}$ | | 空间坐标系 $\{x^i\}$ 中点的向径 |
| $\boldsymbol{X}$ | | 物质坐标系 $\{X^A\}$ 中点的向径 |
| | $\delta_j^i$ | Kronecker 符号 |
| | $\varepsilon$ | 内能密度 |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | | 置换张量 |
| | $\eta$ | 熵密度 |
| | $\theta$ | 绝对温度 |
| | $\dot{\Theta}$ | 熵产生率 |
| $\boldsymbol{\nu}$ | | 间断面上的单位法向量 |

| | | |
|---|---|---|
| | $\xi_m$ | 内变量 |
| | $\rho$ | 质量密度 |
| $\boldsymbol{\sigma}$ | | Cauchy 应力 |
| $\boldsymbol{\tau}$ | | Kirchhoff 应力 |
| | $\psi$ | Helmholtz 自由能密度 |
| $\nabla$ | | Hamilton 算子 |
| $\otimes$ | | 张量的并积 |
| $\cdot$ | | 张量的点积 |
| $\times$ | | 张量的叉积 |
| $\wr\wr\ \ \wr\wr$ | | 泛函 |
| $[\![\ \ ]\!]$ | | 间断量 |

# 目　录

# 第一章　张量初步

人们通常总是在某一选取的坐标系中来描述某些物理量的．但这些物理量及其遵循的规律是客观存在的，并不随坐标系的选取而改变．因此，在不同的坐标系中，相应的物理量的分量之间就必然要满足某种不变性关系．张量运算的目的就是研究上述这种不变性关系．

作为连续介质力学的主要数学基础，本章将对三维欧氏空间中有关张量的初步知识作一简要的介绍．对于那些熟悉张量运算的读者来说，可以从下一章开始直接进入连续介质力学的正题，而本章的内容仅起到复习和参考的作用．

## §1.1　有限维欧氏向量空间

### （一）向量空间

向量又称为矢量，实数域$\mathbb{R}$上的向量空间是由满足以下两条性质的向量集合 $\mathscr{V}$ 构成的：

1）向量的加法：集合 $\mathscr{V}$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 都对应于 $\mathscr{V}$ 中的另一个向量 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$，称作 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的和，满足

a）交换律　　$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.

b）结合律　　对于 $\mathscr{V}$ 中的第三个向量 $\boldsymbol{w}$，有

$$\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}.$$

c）$\mathscr{V}$ 中存在惟一的零向量 $\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}$.

d）对于 $\mathscr{V}$ 中的任一向量 $\boldsymbol{v}$，在 $\mathscr{V}$ 中存在惟一的向量 $-\boldsymbol{v}$，使得

$$\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}.$$

2）向量的数乘：对于实数域$\mathbb{R}$中的任意实数 $\alpha$ 和 $\mathscr{V}$ 中的向量 $\boldsymbol{v}$，都对应于 $\mathscr{V}$ 中的另一个向量 $\alpha\boldsymbol{v}$，称作 $\alpha$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的数乘，满足

a）$1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

b）对于两个实数 $\alpha$ 和 $\beta$，有结合律 $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$ 和分配律 $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$.

c）对于 $\mathscr{V}$ 中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，有分配律

$$\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}.$$

以后我们将采用记号 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ 分别表示实数域 $\mathbb{R}$ 中的实数 $\alpha$ 和集合 $\mathscr{V}$ 中的向量 $\boldsymbol{v}$，采用记号 $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $\forall\boldsymbol{v}\in\mathscr{V}$ 分别表示实数域 $\mathbb{R}$ 中的任意实数 $\alpha$ 和集合 $\mathscr{V}$ 中的任意向量 $\boldsymbol{v}$.

对于 $\mathscr{V}$ 中 $p$ 个非零向量 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_p$，如果存在 $p$ 个不全为零的实数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$，使得

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{0},\tag{1.1}$$

则称这组向量 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是线性相关的. 反之，如果不存在不全为零的 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,p)$，使得(1.1)式成立，则称 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,p)$ 是线性无关的.

现考虑 $\mathscr{V}$ 中所有可能的线性无关向量组. 如果组中向量的个数是有限的，即存在 $n$ 个线性无关的向量 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$，使得 $\mathscr{V}$ 中的任意向量 $\boldsymbol{v}$ 都可表示为其线性组合：

$$\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}v^i\boldsymbol{g}_i,\tag{1.2}$$

则称 $\mathscr{V}$ 是一个由基向量 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$ 张成的 $n$ 维(有限维)向量空间，记为 $\mathrm{sp}\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$，其中 $v^i(i=1,2,\cdots,n)$ 称作是向量 $\boldsymbol{v}$ 在基 $\{\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n\}$ 上的分量. 根据 **Einstein 求和约定**，(1.2) 式右端可写为 $v^i\boldsymbol{g}_i$，其中重复的指标 $i$ 称之为哑标，表示此式要对 $i$ 由 1 至 $n$ 求和. 除非作相反的说明，以后我们将采用求和约定.

### (二) 欧氏向量空间(Euclidean Vector Spaces)

如果对于 $n$ 维向量空间 $\mathscr{V}$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，都存在一个实数，称作为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的标量积(或内积，或点积)，记为 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$，满足

1) 交换律 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$,
2) 结合律 $(\alpha\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}),\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$,
3) 分配律 $\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$,
4) 如果对任意的 $\boldsymbol{u}$，都有 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$,
5) 如果 $\boldsymbol{u}\neq0$，则 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}>0$,

这时，我们称满足以上性质的 $n$ 维向量空间为 $n$ 维欧氏向量空间 $\mathscr{V}_n$. 以后我们仅限于对三维欧氏空间 $\mathscr{V}_3$ 的讨论.

现考虑 $\mathscr{V}_3$ 中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，其长度分别为

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$$

和 (1.3)

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}},$$

根据 Schwarz 不等式，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的内积满足

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leqslant |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|, \tag{1.4}$$

如果 $|\boldsymbol{u}|$ 和 $|\boldsymbol{v}|$ 都不为零，便可定义 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角 $\varphi$: $\cos\varphi = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}/|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$. 当 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ 时，则称 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 是相互正交的，可记为 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$.

设 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ 为三维欧氏空间中的线性无关向量组，则可构造三个相互正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$，使其满足

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1, (\text{当 } i = j), \\ 0, (\text{当 } i \neq j). \end{cases} \tag{1.5}$$

例如，可取

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{g}_1/|\boldsymbol{g}_1|, \\ \boldsymbol{e}_2 &= (\boldsymbol{g}_2 - \alpha\boldsymbol{g}_1)/|\boldsymbol{g}_2 - \alpha\boldsymbol{g}_1|, \\ \boldsymbol{e}_3 &= (\boldsymbol{g}_3 - \beta\boldsymbol{g}_2 - \gamma\boldsymbol{g}_1)/|\boldsymbol{g}_3 - \beta\boldsymbol{g}_2 - \gamma\boldsymbol{g}_1|, \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

其中 $\alpha$ 由方程 $\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2 - \alpha\boldsymbol{g}_1) = 0$ 或由 $\alpha = \boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2/|\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_1|$ 来确定，$\beta$ 和 $\gamma$ 由联立方程

$$\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_3 - \beta\boldsymbol{g}_2 - \gamma\boldsymbol{g}_1) = 0,$$

$$(\boldsymbol{g}_2 - \alpha\boldsymbol{g}_1)\cdot(\boldsymbol{g}_3 - \beta\boldsymbol{g}_2) = 0,$$

来确定. 不难看出，由上式求得的 $\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$ 仅仅依赖于 $g_{ij} = \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j\,(i, j = 1, 2, 3)$.

于是，可选取某一原点 $O$，并以满足(1.5)式的向量组 $\{\boldsymbol{e}_i\}\,(i = 1, 2, 3)$ 作为基向量来建立相应的坐标系，这样的坐标系称之为直角坐标系或笛卡儿坐标系(Rectangular Cartesian Coordinates). 三维欧氏空间中的任意向量 $\boldsymbol{u}$ 可以在直角坐标系中写为 $u^i\boldsymbol{e}_i$，即可以由基向量 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 上的三个有序分量 $u^i$ 来加以表示.

### (三) 向量的并积

现在我们从另一角度来理解向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的内积. 当固定 $\boldsymbol{u}$ 而变化 $\boldsymbol{v}$ 时，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 可以看作是向量 $\boldsymbol{v}$ 的标量值函数，它将向量空间 $\mathscr{V}$ 中的任意向量 $\boldsymbol{v}$ 线性变换到实数 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$，满足

$$\boldsymbol{u}\cdot(\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w},$$

$$\forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathscr{V}, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$