高等院校
通信与信息专业规划教材

统计信号处理

张树京　张思东 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

116

高等院校通信与信息专业规划教材

统 计 信 号 处 理

张树京　张思东　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书面向高等院校通信与信息专业教学需要，结构严谨，重点突出，系统性强。内容包括：随机过程、统计信号检测、统计信号估值、统计信号滤波、模拟信号最佳解调、数字信号最佳解调。全书强调基本概念和基本方法，为便于教学和自学，各章配有小结和习题，并附有解答提示。

本书可作为通信与信息专业本科教材或教学参考用书，也可供从事相关技术领域研究和开发工作的工程技术人员使用。

图书在版编目（CIP）数据

统计信号处理/张树京，张思东编著．—北京：机械工业出版社，2003.1
高等院校通信与信息专业规划教材
ISBN 7-111-11483-3

Ⅰ．统…　Ⅱ．①张…②张…　Ⅲ．统计信号—信号处理—高等学校—教材　Ⅳ．TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 110752 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划：胡毓坚　马　力　责任编辑：刘　青　版式设计：冉晓华
责任校对：李秋荣　责任印制：路　琳
北京机工印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行
2003 年 3 月第 1 版・第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16・11.5 印张・284 千字
0 001—5 000 册
定价：17.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646

高等院校通信与信息专业规划教材

编委会名单

（按姓氏笔画排序）

出 版 说 明

为了培养21世纪国家和社会急需的通信与信息领域的高级科技人才，为了配合高等院校通信与信息专业的教学改革和教材建设，机械工业出版社会同全国在通信与信息领域具有雄厚师资和技术力量的高等院校，组成阵容强大的编委会，组织长期从事教学的骨干教师编写了这套面向普通高等院校的通信与信息专业系列教材，并且将陆续出版。

这套教材将力求做到：专业基础课教材概念清晰、理论准确、深度合理，并注意与专业课教学的衔接；专业课教材覆盖面广、深度适中，不仅体现相关领域的最新进展，而且注重理论联系实际。

这套教材的选题是开放式的。随着现代通信与信息技术日新月异地发展，我们将不断更新和补充选题，使这套教材及时反映通信与信息领域的新发展和新技术。我们也欢迎在教学第一线有丰富教学经验的教师及通信与信息领域的科技人员积极参与这项工作。

由于通信与信息技术发展迅速，而且涉及领域非常宽，这套教材的选题和编审中如有缺点和不足之处，诚恳希望各位老师和同学提出宝贵意见，以利于今后不断地改进。

机械工业出版社

高等院校通信与信息专业规划教材编委会

前言

从 20 世纪 90 年代开始，信息技术突飞猛进地发展，带动了全球经济的增长。在各种各样的应用信息系统中，信息传输的可靠性和真实性已经成为核心问题。但是在复杂的信息传输环境中，不可避免地会带来信息污染，因此将噪声干扰对信息传输的影响减少到最小程度，或者说以最小的代价风险来保证传输信息的可靠性和真实性，是信息技术中一个十分重要的内容。《统计信号处理》这本教材就是从不同的角度来介绍恢复信号可靠性和真实性的理论和方法，为实际应用奠定必要的基础。

在各类信息传输系统中，所传输的信号往往带有随机性，同时它们会受到系统噪声的影响，其结果是带来更加复杂的概率统计特性。如果用经典的理论和方法来分析处理这类信号，必定会产生很大的计算误差，无法保证恢复信号的可靠性和真实性，甚至达到无法认可的程度。

统计信号处理技术则是运用数理统计的理论和方法，对统计信号进行分析，力求以最小的风险来实现最佳接收，例如检测信号状态、估计信号参量、过滤信号波形，并实现最佳解调等。无疑这些技术对提高信息传输的可靠性和真实性是很有帮助的。

从 20 世纪 60 年代起，已经有不少专家学者相继研究应用概率论和数理统计方法来分析处理统计信号问题。例如著名的信息论专家 Shannon 提出了信道容量公式和信息编码定理，Middleton 和 Lee 研究了最佳接收理论，前苏联学者提出了潜在抗干扰理论，Hancock 则建立了比较完整的统计通信原理。他们的工作为统计信号处理技术奠定了坚实的基础。

与此同时，在雷达等许多相关专业也深入研究统计信号处理问题，相继提出了信号检测和估值理论、最佳滤波理论等，受到了电子信息技术专家的极大重视。随着数字通信的崛起，这些理论和方法很快被通信技术专家所接受，并将它们拓展到最佳解调的领域，形成了统计信号处理学科的完整内容，这方面的代表性著作是 Van Trees 的《检测、估值和调制理论》。

但是，上述这些理论和方法仅仅停留在基本概念和简单算法上面，与实际应用尚有一定距离。随着计算机仿真技术和微电子技术的发展，复杂的理论和算法都可以得到验证和实现，因此统计信号处理技术已经从基础理论迈向实际应用，例如在空间技术中已经产生许多成功的效果。

作者曾在 1986 年出版过《统计信号处理》专著（人民邮电出版社），当时的读者对象主要是电子信息类专业研究生。随着人们对统计信号处理的认识日益普及，以及电子信息类专业本科教学改革的需要，作者认为为该专业本科生提供一本这方面的教材或教学参考书实属急需，也十分迎合新技术的发展。

这本教材是在作者原著的基础上，结合十多年来的教学经验，并针对本科教学大纲的要求，进行了较大修改。例如删去了与本书其他各章内容关系不大的时间序列分析部分，删去了有关在有色高斯信道中信号检测和估值的内容，删去了复合假设检验和联合信号参量估值的部分内容，因为这些内容可以在读者作专题研究时再补充。

经过修改后的章节安排内容如下：

第 1 章随机过程，简要介绍随机变量和随机过程的统计特性及其统计参数，重点讨论平稳随机过程的相关函数和功率频谱，以及宽带和窄带噪声的特点，其中高斯过程的一系列特性更为重要。本章还讨论了随机过程的正交展开方法。

第 2 章统计信号检测，着重介绍信号检测模型和各类判决准则，其中贝叶斯准则和皮尔逊准则尤为重要。本章还讨论在白色高斯信道中的检测性能，其中似然比判别不等式的建立是重点。另外也讨论了多元假设检验、复合假设检验和序列检测方法等内容。

第 3 章统计信号估值，着重介绍信号参量估值模型和贝叶斯估值方法。极大极小估值和最大似然估值，在某些情况下也有应用。检验估值质量的标准是克拉默-罗理论下限，因此本章推导出克拉默-罗不等式，并针对不同的统计参量计算克拉默-罗下限。本章还讨论了在白色高斯信道中的单参量信号估值，其中对信号幅度、相位、频率和时延的估值在不同的应用系统内有不同的处理方法。

第 4 章统计信号滤波，首先介绍信号波形估值的概念，着重讨论了最佳线性滤波问题。维纳滤波器是在频域上实现最佳滤波，而卡尔曼滤波器则是在时域上实现最佳滤波，尽管它们的算法都很复杂，但在此基础上可以研究次最佳滤波器的实现。本章还讨论了白化滤波器和匹配滤波器，它们在特定的情况下也都有应用实例。

第 5 章模拟信号最佳解调，着重介绍已调信号的估值模型，它也是波形估值模型的一种。在此基础上，讨论线性调制信号和角度调制信号的最佳解调器及其误码性能，最后还列表比较几种模拟调制的计算结果，完善了解调理论的内容。

第 6 章数字信号最佳解调，着重讨论相干和非相干两种数字信号解调方式的误码性能。对于二元和 m 元数字信号的相干解调类似于信号检测中的简单假设检验和多元假设检验，因此相干解调模型与信号检测模型基本上一致。非相干解调采用非线性的包络检波器，计算比较复杂，但是实现起来比较简单，因此各有特点。本章重点是 m 元相干解调，目前先进的数字调制方式都偏重于 m 元正交信号或双正交信号集，力求实现 m 元最佳信号。

全书结构严谨，重点突出，在适当地方都配有实例。为了便于复习，各章还配有小结。本书力求深入浅出，除了数学推导以外，尽量多作物理解释，以便加深理解。

因作者水平有限，书中难免有错漏之处，恳请读者批评指正。

作　者

目　录

第1章 随机过程

1.1 随机变量

在科学实验中，有一类结果（或事件）的出现是不确定的，称为随机事件。若用一个变量来表示，这就是随机变量。我们可以用概率作为事件发生可能性大小的度量，即

$$P(x) = P(X = x) \tag{1-1}$$

称为随机变量 X 取值为 x 的概率。那么，函数

$$F(x) = P(X \leqslant x) \tag{1-2}$$

就是 X 取值不超过 x 的概率，称为概率分布函数。另外，还可以用概率密度函数 $p(x)$ 来表示，它的定义是

$$p(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) \tag{1-3}$$

显然概率分布函数与概率密度函数间的关系为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x) \mathrm{d}x \tag{1-4}$$

如同确定性变量一样，随机变量也可以分为连续的和离散的两类。一般来说，对于连续随机变量，使用概率密度函数来表征比较方便，而对于离散随机变量，则使用概率分布函数来表征更为方便。以上是一个随机变量的情况，可用一维概率空间来描述。

当实验中同时出现多个随机变量时，通常可以引入多维概率空间的概念。因此，多个随机变量构成该空间的一个多维随机变量，亦可称做一个随机矢量，而各随机变量就是该矢量的各个分量。

对于 n 维随机变量，联合概率分布函数定义为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n) \tag{1-5}$$

联合概率密度函数可记作 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，定义为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1-6}$$

它们之间的关系又可写成

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \cdots \mathrm{d}x'_n \tag{1-7}$$

通过 $n-m$ 次边际积分，我们又可从 n 维统计特性中确定 m 维统计特性，即 m 维概率分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m)\text{次}} p(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \mathrm{d}x'_1 \mathrm{d}x'_2 \cdots \mathrm{d}x'_n \tag{1-8}$$

相应的 m 维概率密度函数为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-m)\text{次}} p(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \mathrm{d}x'_{m+1} \cdots \mathrm{d}x'_n \tag{1-9}$$

一般总可以通过边际积分由高维统计特性来确定任意低维的统计特性，反之不然。一个例外的情况是高斯(Gaussian)型随机变量，可以用它的二维统计特性来确定任意高维的统计特性。

如果一个随机矢量的各分量具有统计独立性，则它的多维统计特性就大为简化，可以用其一维统计特性来表征，得到

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i) \tag{1-10}$$

和

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i) \tag{1-11}$$

此外，由于多个随机变量的同时存在，所以要研究它们之间的相互制约关系，这就引出了条件概率的概念，它是指在其中某 m 个随机变量取值给定的条件下，其余 $n-m$ 个随机变量的联合概率(当 $n-m=1$ 时)。这里也同样有条件概率分布函数和条件概率密度函数两种描述，即

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m|x_{m+1},\cdots,x_n)=\frac{\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m}p(x_1',x_2',\cdots,x_n')\mathrm{d}x_1'\mathrm{d}x_2'\cdots\mathrm{d}x_n'}{p(x_{m+1},\cdots,x_n)} \tag{1-12}$$

和

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_m|x_{m+1},\cdots,x_n)=\frac{p(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{p(x_{m+1},\cdots,x_n)} \tag{1-13}$$

由以上两式，显然可得

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_m|x_{m+1},\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_m}p(x_1',\cdots,x_m'|x_{m+1}',\cdots,x_n')\mathrm{d}x_1'\cdots\mathrm{d}x_m' \tag{1-14}$$

由式(1-13)可以递推得到如下链规律

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n)=p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_1,x_2)\cdots p(x_n|x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}) \tag{1-15}$$

在实际应用中，为更简明地突出随机变量的某些特征，当给定概率分布函数或概率密度函数后，便由此确定随机变量的一些统计参量，这就是数字特征。以下我们皆以概率密度函数来说明。

对于一维随机变量 $x\sim p(x)$ 的数字特征有：

(1) k 阶原点矩

$$m_k=E\{x^k\}=\int_{-\infty}^{\infty}x^k p(x)\mathrm{d}x \tag{1-16}$$

(2) 数学期望值，或统计平均值

在式(1-16)中，当 $k=1$ 时，有

$$m_1=E\{x\}=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)\mathrm{d}x \tag{1-17}$$

(3) 均方值，或平均功率

在式(1-16)中，当 $k=2$ 时，有

$$m_2 = E\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1-18}$$

(4) k 阶中心矩

$$M_k = E\{[x - E(x)]^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k p(x)\mathrm{d}x \tag{1-19}$$

(5) 方差

在式(1-19)中,当 $k = 2$ 时,有

$$\sigma^2 = M_2 = E\{(x - m_1)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{1-20}$$

另外,还有特征函数也是常用的,它的定义是

$$D(a) = E\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ax}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}ax} p(x)\mathrm{d}x \tag{1-21}$$

在一维随机变量中,以数学期望值 m_1 及方差 σ^2 用得最多。

对于二维随机变量$(x_1, x_2) \sim p(x_1, x_2)$的数字特征主要有:

(1) (i,k) 阶联合原点矩

$$m_{ik} = E\{x_1^i x_2^k\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^i x_2^k p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-22}$$

(2) 相关原点矩

在式(1-22)中,当 $i = 1$、$k = 1$ 时有

$$m_{11} = E\{x_1 x_2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-23}$$

(3) 相关中心矩,或二阶联合中心矩

$$M_{11} = E\{(x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2})\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2}) p(x_1, x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-24}$$

(4) 相关系数

将协方差函数归一化,得到

$$\rho = \frac{E\{[x_1 - E(x_1)][x_2 - E(x_2)]\}}{\sqrt{E\{[x_1 - E(x_1)]^2\}E\{[x_2 - E(x_2)]^2\}}} = \frac{M_{11}}{\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \tag{1-25}$$

其中最重要的是相关中心矩,它与相关原点矩的关系是

$$M_{11} = E\{(x_1 - m_{x1})(x_2 - m_{x2})\} = E\{x_1 x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\} = m_{11} - m_{x1}m_{x2} \tag{1-26}$$

如果

$$E\{x_1 x_2\} = E\{x_1\} \cdot E\{x_2\} \tag{1-27}$$

则称随机变量 x_1 和 x_2 是不相关的。由式(1-23)可知,统计独立的二维随机变量必定不相关,反之不然。在信号处理中,如果满足下面的条件,常称随机变量 x_1 和 x_2 是正交的,即

$$E\{x_1 x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\} = 0 \tag{1-28}$$

1.2 随机过程及其统计特性

图 1-1 画的是在相同的外界条件下,某实验重复进行 n 次,得到 n 个样本函数。注意其特点,首先,这 n 个样本函数 $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \cdots, x^{(n)}(t)$ 的每一个都是时间的随机函数,它们是不

可能预先确定的，只有通过测量得到。另一方面，对于每一个时间截口，各样本函数的取值也是随机的，这就构成了给定时间参数的随机变量 $X(t_1)$，$X(t_2)$，… 我们将这些带时间参量的随机变量的集合，或者各样本函数的集合称为随机过程，并记作 $\{x(t)\}$ 或 $X(t)$。

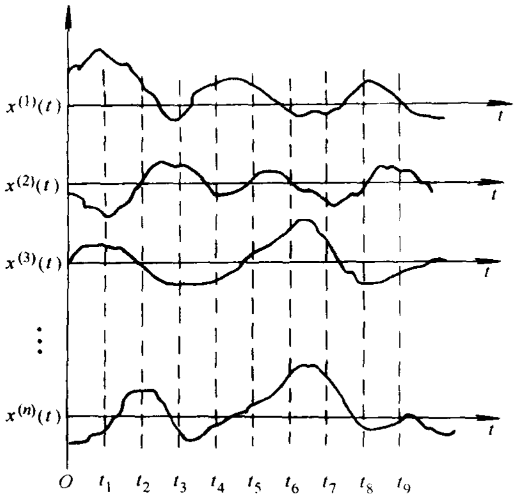


图 1-1 随机过程的样本函数集合

对于随机过程的统计特性的描述，一般总是通过某些时间截口上的随机变量的统计特性来反映的。取一个特定时刻，得到一维统计特性，取两个特定时刻，得到二维统计特性。显然，选取的截口数 n 越大，随机过程的统计特性描述得越充分。理论上，完整的随机过程应该用 $n\to\infty$ 的统计特性来描述，而实际上只能采用足够大的 n 维统计特性近似地描述。此时在概率空间中的 n 维随机矢量就表示一个随机过程，而其分量为同一时间截口上的随机变量。

随机过程也可以用数字特征方便地来描述。一维数字特征中应用最多的是：

（1）数学期望值，或统计平均值

$$E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)\mathrm{d}x = m(t) \tag{1-29}$$

（2）方差

$$E\{[X(t) - E\{X(t)\}]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m(t)]^2 p(x,t)\mathrm{d}x = \sigma^2(t) \tag{1-30}$$

一般地说，$m(t)$ 和 $\sigma^2(t)$ 都是时间的函数。当各时间截口上所有随机变量都保持统计独立时，则称为独立随机过程，它可用一维特性完整地来描述。

二维数字特征中应用最多的是：

（1）自协方差函数

$$C(t_1,t_2) = E\{[X(t_1) - m(t_1)][X(t_2) - m(t_2)]\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)][x_2 - m(t_2)]p(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-31}$$

（2）自相关函数

$$R(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2p(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-32}$$

它们之间的关系是

$$C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - m(t_1)m(t_2) \tag{1-33}$$

如果存在两个随机过程 $\{x(t)\}$ 和 $\{y(t)\}$ 时，它们的关系可用互协方差函数

$$C_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [X(t_1) - m_x(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]p(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-34}$$

或者用互相关函数

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1-35}$$

来表示。

一般地说，$C(t_1,t_2)$、$C_{xy}(t_1,t_2)$、$R(t_1,t_2)$ 和 $R_{xy}(t_1,t_2)$ 都同时与时刻 t_1、t_2 有关。

有一类随机过程，它在 $t = t_n$ 时出现的随机变量仅仅与前一时刻 $t = t_{n-1}$ 时的随机变量有关，而与所有其他时刻的随机变量无关，用条件概率密度函数来表示为

$$p(x_n;t_n|x_1,x_2,\cdots,x_{n-1};t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}) = p(x_n;t_n|x_{n-1};t_{n-1}) \tag{1-36}$$

从而 n 维联合概率密度可以写成

$$\begin{aligned} p(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) &= p(x_1;t_1)p(x_2;t_2|x_1;t_1)\cdots p(x_n;t_n|x_{n-1};t_{n-1}) \\ &= p(x_1;t_1)\prod_{i=2}^{n} p(x_i;t_i|x_{i-1};t_{i-1}) \end{aligned} \tag{1-37}$$

我们称这类随机过程为马尔柯夫过程，它的统计特性完全可以由其二维特性所决定。

另外，在本章 1.5 节将讨论的高斯随机过程也是一类特殊的随机过程，对于它的描述，也只需有二维统计特性就足够了。可见，二维统计特性（包括二维数字特征）在随机过程中占有重要地位。

1.3 平稳随机过程

1.3.1 随机过程的平稳性及遍历性

一个随机过程 $X(t)$，如果在时间域上作一时延 τ，而其统计特性不变，则称之为具有平稳性。这是严格意义上的平稳，亦称狭义平稳。以概率密度函数来表示，其平稳性可描述为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = p(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau) \tag{1-38}$$

由式(1-38)，可得到平稳随机过程的如下性质：

(1) 一维概率密度函数与 t 无关，即

$$p(x;t) = p(x;t+\tau) = p(x) \tag{1-39}$$

将它代入式(1-29)，使数学期望值为一常量

$$m(t) = m(t+\tau) = m \tag{1-40}$$

或代入式(1-30)，方差亦为常量

$$\sigma^2(t) = \sigma^2(t+\tau) = \sigma^2 \tag{1-41}$$

(2) 二维概率密度仅与取值时刻的间隔 τ 有关，而与具体时间截口 t_1 和 t_2 无关，即

$$p(x_1,x_2;t_1,t_2) = p(x_1,x_2;t_1-t_2,0) = p(x_1,x_2,\tau) \tag{1-42}$$

将式(1-42)分别代入式(1-31)和式(1-32)中，可以得到平稳随机过程的自协方差函数

$$C(t_1,t_2) = C(t_1-t_2,0) = C(\tau) \tag{1-43}$$

和自相关函数

$$R(t_1,t_2) = R(t_1-t_2,0) = R(\tau) \tag{1-44}$$

它们都仅是时间间隔 τ 的函数。

(3) n 维概率密度函数决定于 $(n-1)$ 个时间间隔。

式(1-38)所要求的狭义平稳条件一般不易满足，而在实际领域内所遇到的随机过程，多数情况下，我们关心的只是它们的一维特性和二维特性，因而引出了广义平稳的概念。

如果随机过程 $X(t)$ 的数学期望为常量，且自相关函数仅与 (t_1-t_2) 有关，即满足式(1-40)

及式(1-44),则称之为广义平稳随机过程。

显然,根据一维特性和二维特性就可以判定随机过程的广义平稳性了。对高斯过程和马尔柯夫过程,1.2节已指出它们的n维特性仅决定于二维特性,因而对它们来说,狭义平稳和广义平稳的条件是一致的。

多数平稳过程有一个重要性质,即遍历性,又称各态历经性。它指在满足比较宽的条件下,平稳随机过程的所有统计特性可以在一个样本函数上确定。这个性质给实际工作带来了很大方便,因为要同时取得大量样本函数是非常困难的。

对广义平稳随机过程来说,它的遍历性表现在:

(1) 数学期望值的遍历性

如果
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)[R(\tau)-m^2]\mathrm{d}\tau=0 \tag{1-45}$$

则
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)\mathrm{d}t=\overline{x(t)}=E\{X(t)\}=m \tag{1-46}$$

也就是说,在满足条件式(1-45)时,随机过程的统计平均值就等于时间平均值。

(2) 自相关函数的遍历性

对一给定的τ,如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)[B(\tau_1)-R^2(\tau)]\mathrm{d}\tau_1=0 \tag{1-47}$$

式中
$$B(\tau_1)=E\{X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)\} \tag{1-48}$$

则
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{T}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t=\overline{x(t)x(t+\tau)}=E\{X(t)X(t+\tau)\}=R(\tau) \tag{1-49}$$

这就是说,在满足式(1-47)时,随机过程的统计自相关函数等于时间自相关函数。

由于式(1-45)和(1-47)的条件限制是比较宽的,因此实际遇到的多数平稳随机过程都能满足。在统计信号处理中,一般都认为平稳随机过程是具有遍历性的。

1.3.2 相关函数与功率频谱密度

在广义平稳随机过程中,仅利用它的一维和二维特性即可描述其全部统计特性,因而相关函数就具有特别重要的意义。

根据平稳随机过程中自相关函数的定义

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2;\tau)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{1-50}$$

可以得到它的几点性质:

(1) 对偶性

如果$\{x(t)\}$是实随机过程,则

$$R(\tau)=R(-\tau) \tag{1-51}$$

如果$\{x(t)\}$是复随机过程,则

$$R(-\tau)=R^*(\tau) \tag{1-52}$$

即$R(\tau)$的共轭。

(2) 中心最大性

$$R(0) \geqslant |R(\tau)| \tag{1-53}$$

说明当 $\tau = 0$ 时，自相关函数取得最大值。

(3) 远间隔不相关性（或称收敛性）

因为
$$\lim_{|\tau| \to \infty} R(\tau) = R(\infty) = m^2 \tag{1-54}$$

由此，当 $|\tau| \to \infty$ 时，得到

$$C(\infty) = R(\infty) - m^2 = 0 \tag{1-55}$$

这正是不相关的定义。同时还可以得到数学期望值与方差的另外两个表达式

$$m = \sqrt{R(\infty)} \tag{1-56}$$

$$\sigma^2 = C(0) = R(0) - R(\infty) \tag{1-57}$$

(4) 归一化的表征 —— 自相关系数

$$\rho(\tau) = \frac{C(\tau)}{\sigma^2} = \frac{R(\tau) - m^2}{\sigma^2} = \frac{R(\tau) - R(\infty)}{R(0) - R(\infty)} \tag{1-58}$$

当 $\tau = 0$ 时，$\rho(0) = 1$，自相关系数最大。

当 $\tau = \infty$ 时，$\rho(\infty) = 0$，足够远间隔的两随机变量不相关。

当 $m = 0$ 时，$\rho(\tau) = R(\tau)/R(0)$，故 $\rho(\tau)$ 又称为归一化的自相关函数。

相关函数在统计信号处理中有许多应用，比如利用相关函数可以从背景噪声中提取信号等。

在某些情况下，为讨论方便起见，常把统计信号的时间函数变换为频谱函数。对确知信号而言，其时间函数与频谱密度之间可构成一对傅里叶(Fourier)变换；对于平稳随机过程，其自相关函数与功率频谱密度之间也可构成一对傅里叶变换，即

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\tau \tag{1-59}$$

和
$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau} \mathrm{d}\omega \tag{1-60}$$

这一关系成立的条件是，只要随机过程是平稳的（即使是广义平稳的），且满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty \tag{1-61}$$

关于随机过程的功率频谱密度的定义，我们引入了统计平均值的概念，即

$$S(\omega) = \lim_{T \to \infty} S_T(\omega) = \lim_{T \to \infty} E\{S_T^{(k)}(\omega)\} \tag{1-62}$$

式中，$S_T^{(k)}(\omega)$ 为第 k 个样本函数的功率频谱密度

$$S_T^{(k)}(\omega) = \frac{1}{T} |F_T^{(k)}(\omega)|^2 = \frac{1}{T} F_T^{(k)}(\omega) F_T^{(k)*}(\omega) \tag{1-63}$$

其中
$$F_T^{(k)}(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} x^{(k)}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \mathrm{d}t \tag{1-64}$$

根据式(1-59)与式(1-60)，可以得到功率频谱密度函数的性质及其与自相关函数的关系：

(1) 非负性

对所有 ω，

$$S(\omega) \geqslant 0 \tag{1-65}$$

(2) 对偶性

对实随机过程，

$$S(-\omega)=S(\omega) \tag{1-66}$$

(3) 当 $\omega=0$,式(1-59) 变为

$$S(0)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-67}$$

它说明 $S(0)$ 为自相关函数在全时域内的覆盖面积。假定该面积用高度为 $R(0)$ 的矩形面积来等效,则矩形宽(正半域) 称做相关时间 τ_0,即

$$\tau_0=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\mathrm{d}\tau/R(0)=\frac{S(0)}{2R(0)} \tag{1-68}$$

(4) 当 $\tau=0$,式(1-60) 变为

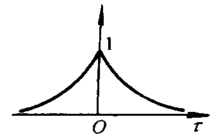
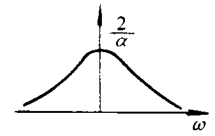
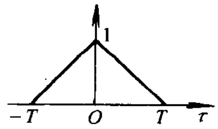
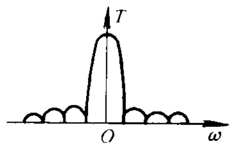
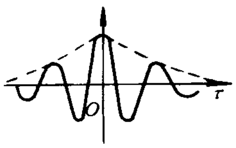
$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{1-69}$$

它说明 $R(0)$ 等于在全频域内的频率分量所提供的功率之和,亦即整个随机过程的平均功率。假定这一覆盖面积用高度为 $S(0)$ 的矩形面积来等效,则矩形宽(半频域) 称做等效频带宽度 $\Delta\omega_{eq}$,即

$$\Delta\omega_{eq}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{d}\omega/S(0)=\frac{\pi R(0)}{S(0)} \tag{1-70}$$

由式(1-68) 和(1-70) 可见,相关时间 τ_0 和等效频带宽度 $\Delta\omega_{eq}$ 的乘积是个常数。这意味着,自相关函数在时域内分布越宽,则功率频谱密度在频域内分布就越窄,反之亦然。这一结论可以从表 1-1 中得到体现。

表 1-1　常用的随机过程的自相关函数及其功率频谱密度

随机过程	自相关函数 $R(\tau)$		功率频谱密度 $S(\omega)$	
电报信号	$e^{-\alpha\lvert\tau\rvert}$		$\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$	
二进码序列	$\begin{cases}1-\dfrac{\lvert\tau\rvert}{T}, & \lvert\tau\rvert\leqslant T\\ 0, & \lvert\tau\rvert>T\end{cases}$		$\dfrac{4\sin^2\left(\dfrac{\omega T}{2}\right)}{T\omega^2}$	
窄带过程	$\rho(\tau)\cos[\omega_0\tau-\varphi(\tau)]$		$S(\omega+\omega_0)+S(\omega-\omega_0)$