数学通报丛书

概率和数理统計

中国数学会数学通报編委会編

科学技术出版社

概率和数理統計
中国数学会数学通报編委会編

*

科学技术出版社出版
(北京市西直門外郝家灣)
北京市書刊出版業營業許可証出字第091號
北京市印刷一厂印刷
新华書店科技發行所發行　　各地新华書店經售

*

开本:850×1168 $^1/_{32}$ 印張: 3$\frac{1}{16}$ 字数: 80,000
1960年 4月第 1 版　　1960年 4月第 1 次印刷
印数: 10090

总号: 1465 統一書号: 13051·301
定价: (8) 3 角 9 分

出版者的話

数学通报自創刊以来，發表了不少对讀者进修数学、扩大数学知識領域有帮助的文章，特別是發表了不少有关中等学校数学教学的文章，受到了讀者的欢迎，并經常收到讀者来信要求将这些文章分类編成單行本出版。数学通报編委会为了滿足讀者这一需要，特将該刊自創刊号起至1959年中的文章，选其質量較好的并按性質分成数学知識介紹和中等学校教学两部分分类出書。前一部分已选編成"綫性代数、多項式"、"实数、極限、近似計算"、"几何作圖、非欧几何、邏輯初步"、"概率和数理統計"、"关于电子数字計算机的一些問題"、"初等数学史"、"趣味的数学問題"和"中等数学習題解答集"；后一部分已选編成"中学数学教学的一般問題"、"初中数学教材和教法分析"和"高中数学教材和教法分析"。

这十一本書的內容，有适合初等数学的，或适合在初等数学基础上进一步提高的，因此，具有相当高中数学水平的讀者、中等学校数学教师、大、中学生及数学爱好者均可閱讀。

"概率和数理統計"是这套丛書中的一本。

目　次

概　　率[1]

关　肇　直

§Ⅰ. 决定性現象与随机現象

自从微积分学發現以来，人們得到描述及探討自然現象的一种有力工具．由于变量的引入，在数学中不再限制于考慮定的量、固定的圖象，而可以进而考慮变的量、圖象的变換．世界本来是在永恒的变化中的，从而我們只有从世界的变化中去認識它，才能对它获得深刻的了解．由于客观世界是在不断变化、不断运动、不断革新、不断發展，从而表現一些客观事物的量也应当是在不断变化的，因此我們要考慮变量．客观世界中各个对象或各个現象是互相密切联系着、互相依賴着、互相制約着的，表現它們的量的特征的变量也是相互依賴、相互制約着的．这种变量之間的互相依賴关系叫做函数依賴性，或叫做函数关系．表达物理規律的量的側面，往往表現成找到相关的物理量之間的函数关系．但有时容易表达的，不是一个变量对另一个变量的函数依賴关系，而是一个变量相对于另一个变量的变化率——这种变化率在数学上叫做微商．例如运动質点的位置对时間的变化率就是速度，而速度对时間的变化率乃是加速度，等等．牛頓运动定律之一乃是說运动量对时間的变化率与所加的力成正比，并且方向一致．我們往往要知道运动点的位置对时間的依賴关系——即运动軌道，而由牛頓运动定律表达

[1] 本文是作者根据向一些在数学上具有中等学校水平的同志們所作通俗介紹写成的；为了尽可能从直观上加以說明，有时不去追求严謹，因此，希望讀者不要把这里的講法当作正式的定义看．此外請讀者注意本書22頁的文章：“概率論中一些最簡單的問題”．

出来的只是速度对时間的变化率（即加速度，也即是位置对时間的二阶微商）与力之間的关系，从而在所列的方程中出現的不是表达位置的那些变量，而是这些变量的（一阶与二阶）微商——这种方程叫做微分方程．如果还知道在某一确定时刻运动質点的位置，那么由那組微分方程就可以解出表达位置对时間依賴关系的那个函数来．象这类現象，从現象在某一时刻（叫做"初始的"）的状态就可以断定在以后的任意时刻的状态，我們称做决定性現象．牛頓力学的一个最成功的例子乃是根据万有引力的規律推导出行星环繞太阳运行的軌道来．由于这样的推算，事先預測出在什么时間、什么地点可以观測到当时还是未知的行星，而这个預測就为天文观測所証实——这就是海王星發現的历史的概述．当时曾有一个时期，一些人們对于微分方程爱好到了迷信、崇拜的程度，以为一切自然現象都可以利用微分方程来描述了．这当然与当时机械唯物論的哲学观点的流行是分不开的．

但实际上問題并不那么簡單．在有些現象中，由于因素众多，这样的微分方程将要包括很多已知和未知的变量，其列出往往不可能，或即使能列出，其解也非常难于求出．例如在研究气体性質时，由于气体是由数目众多的分子构成，这些分子以很快的速度运动着，在运动的过程中相互碰撞而改变其方向．如果按照上述那种想法研究这类現象，将要对每个分子列出它的微分方程．但分子数量是極大的，在1气压的压强与攝氏表0°的温度之下，一立方厘米的气体中所含分子的数目是 2.683×10^{19}．包含这样大量的未知量的这样大量的微分方程的解实际上无法去求．而且，我們也无須求这样的解．由于分子是那样的小，每个个别分子的运动情况不是我們要了解的．我們所注意的主要是由大量分子运动所呈現出来的总体現象——温度、压强等．这类現象叫做大量現象——即在这現象中有大量的个体，而我們目的不是去了解每个个别个体的状态，而是去了解由这些大量个体所合成的总体所呈现出来的状态．

这时，由于个体数量非常大，它們在任意时刻可以处在种种不同的状态中（例如在上述气体分子的运动中，在任意时刻，可能有按种种不同方向，具有种种不同速度的分子），我們可以把在每一时刻每个个别个体所处的状态看作是“偶然的”，“随机的”（即“不确定的”），因此我們称这种現象作随机現象。但这类所謂偶然現象并非指“无規律”的；我們的任务正是从这种表面上的偶然性找到必然性的規律来，也就是从这种处于种种不同状态的大量个体所表現出来的随机性找出这些个体所湊成的总体所呈現的規律性来．这种大量現象的規律性的量的側面正是概率論所研究的对象．

大量現象还有另一种表現形式．这时个体可能是为数很少的，例如只有單一个，但現象本身重复的次数很大，我們把这种現象叫做实驗，这时每次个别实驗的結果是随机的，但大量实驗却能呈現出一定的規律性来．为簡單起見，我們常拿擲骰子作例．一个骰子是用骨质作的正立方(六面)体，六个面上各刻上1、2、3、4、5、6个点．我們設这个骰子是作得很均匀，从而把它向下一擲，落到桌面时，呈現在目前的那面可能是1，或2，或3，或4，或5，或6．由于因素众多，每次一擲究竟能得出几点，是可以看作“随机的”，但在大量的擲时，例如擲上百次、千次，…，就可以看出擲得每特定点(例如3点)的次数在总擲数中所占的比（叫做擲得这点的頻率）漸趋稳定（即差不多是一定的——在这情形下，接近于1/6)．这样就表达出来大量現象中的規律性(即擲得3点的頻率是1/6)．

§Ⅱ．概率的概念

在考察大量現象时，每个个体在一特定时刻的状态是有种种可能的，或者說，每次实驗的結果是有种种可能的．例如气体分子运动中每个分子在一特定时刻的位置、运动方向和速度可能取种种值，或在擲骰子时，每一擲得出的点数可以是种种值．但状态既有种种可能，每一状态的可能性大小是怎样的呢？

拿掷骰子为例，掷得1，或2或其他点的可能性是一样大的，因为如果骰子作得很匀称，每一面并沒有什么特殊性使得与其他面有何不同，从而落下来得任何点的可能性都是一样的．但如同时掷两个骰子，掷得3点与掷得4点的可能性就不一样大．这是因为掷两个骰子有很多可能性，其中掷得3点，有两种方式，即第一个骰子得1，第2个得2点，或第一个得2点，第2个得1点．但掷得4点，共有三种方式：即1与3，2与2，3与1，从而掷得4点的可能性要比掷得3点的可能性大．在概率論出現之前，人們虽对可能性大小的概念略有認識，但很粗糙，当时不会想到一件事發生的可能性大小会精确到可以用数来表示！但随机現象之所以能成为我們能精确研究的对象，也正在于我們能对这种現象的每种状态發生的可能性大小用数字精确地表达出来．于是它也就成为数学科学研究的对象了．

以掷两个骰子为例，掷时每个骰子可以呈現6种可能点，两个骰子相配合，可以得出6×6＝36个可能情形．但掷得3点的共有两种可能，而掷得4点共有三种可能，从而掷得3点的是在总的36个情形中占2种，而既然那36种可能情形中并沒有一个比另一些有什么“优先权”，它們發生的可能性都一般大，从而掷得3点的可能性可以用36分之2，即1/18来表达，而掷得4点的可能性則用36分之3，即1/12来表达．

如果掷的不是骰子，而是掷一个球，在球上預先划好一个区域A(例如一个圓)，問掷下去时球貼桌面的那点在所划定的区域A中的可能性如何量測？由于球上点有无穷多，掷得的各种点的可能情形有无穷多，上述用于骰子問題的方法在此不能适用了．但可以想象，区域A的面积愈小，貼桌面的点落在A中的可能性就愈小，从而我們可以設想用A的面积，或更恰当些，用A的面积与球的整个面积的比值来量測这一可能性的大小．

一般来說，研究大量現象时，我們要“作实驗”，或“有种种态”，这些实驗的結果有很多，它們組成一个集体，表示作

l. 各个可能結果叫做“事件”. 对于每一事件(用 A、B 等字母表示)，我們賦予它一个实数来表示它發生可能性的大小，叫做这事件發生的概率，用 $P(A)$ 表示. 这些事件彼此有一定的关系. 例如擲两个骰子时，擲得两点相等是一事件 A，擲得 2 点是一事件 B，因擲得 2 点乃是两个骰子各呈 1 点，所以当 B 發生，A 必然發生. 这时，我們表示成 $B\subset A$. 我們当然应当說 A 發生的可能性比 B 大(或起碼一样大)，因为当 B 發生，A 也必然發生. 因此应当使 $P(B)\leqslant P(A)$. 有一种事件叫做不可能事件(表示成 Φ)，如擲两骰子擲得 13 点，它的發生可能性我們自然应規定为 0: $P(\Phi)=0$. 又有一事件，一定發生，叫做必然事件(用 l 表示)，例如“擲两个骰子擲出从 2 到 12 的任意一点”这一事件，它的可能性是最大的，我們用 1 表示：$P(l)=1$. 对于一般事件 A，它的發生可能性不会小于 ϕ,不会大于 l，从而总有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，两事件 A 与 B，如果 A 与 B 不可能同时發生(例如擲两个骰子时不能同时得 3 点又得 4 点)，叫做互斥的. 对于两任意事件 C 与 D，可作一“合幷事件”(用 $C\cup D$ 表示)，即“或 C 發生或 D 發生”(例如擲 1 个骰子得点不超过 2 的事件乃是擲得 1 与擲得 2 这两事件的合幷事件). 如果 A,B 是互斥的，那么可以理解

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

(这对于可能情形有穷多的場合是可以証明的.)一般些，对于任意两事件 C、D,有

$$P(C\cup D)\leqslant P(C)+P(D).$$

(1)还可以推广一些，如諸事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 都互相排斥，那么它們之中至少有一个發生这一“合幷事件”$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots\equiv A$ 的概率 $P(A)$ 与諸 $P(A_1)$，$P(A_2)$，…的关系可以写成

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

以上这些乃是作为事件發生可能性大小的量度的“概率”这一概念所应具有的一些必要屬性. 平常我們把这些性質取作概率概

念的公理系統，或作为概率概念的定义．这些实在乃是从分析概率这一概念而必須賦予它的一些最根本的屬性．有了这一基本概念的数学陈述之后，就可以建立一套数学理論及演算方法，成为研究大量現象的有力工具．

§Ⅲ．概率論在研究自然現象与工程技术問題中的应用

大量現象是所在皆是的．前面常拿擲骰子为例，这有两个原因．其一是历史原因——概率論的最早的結果是由于研究賭博現象而产生的，那时，在欧洲一些封建貴族在寄生的享受生活中，在賭博游戏中提出一些問題，这些問題受到当时一些大数学家的注意，并加以解决．他們之中有些人已預見到这类問題的重要性，即它的意义不停留在賭博游戏的范圍內，而会有更有意义的应用．实际上，如果不是后来人們發現这种問題也产生在很多实际問題中，它也就不会受到广泛的研究而終于形成数学的重要分支了．另一个原因乃是它最簡單，便于用来說明問題．以擲一个骰子为例，它只有六个可能情形，每个可能情形發生的可能性又是相等的，从而非常簡單．但虽簡單，它却是“麻雀虽小，五臟俱全”，用多个骰子一并擲，就可以組合成很复杂的現象，从量的方面来看无异于很多其他現象．有人从概率論教程的初等書中看到引用大量的例都是講擲骰子，就怀疑概率論是否脫离实际，那是沒有了解为什么使用这种例的緣故．概率論的用处则是非常广泛的，因为随机現象是非常多的．考虑微观世界时，由于現象中的个体数量很大，而每个个体又非常小，因此我們常是要找到大量个体的性質合在一起所呈現出来的整体性質．于是根据概率論观点的方法，也即是統計方法，就成为現代物理学的重要工具．另一方面，現代工业中大量生产也是这种大量現象，从而統計方法也是大工业中重要方法．这里不打算，也不可能把概率論的应用逐一介紹．下面只举几个例，說明概率論在各个方面的应用．

首先談一下产品檢查．在大工业生产中，檢查产品是否合乎規格是很不簡單的．首先，产品数量很大，把产品逐一檢查簡直不可能．其次，有的檢查要消耗或損坏产品（如电灯泡的耐用、布的拉力等等），更不能把大量的产品拿去檢查．我們必須用統計的方法，取出比較少量的产品来檢查，通过这一部分的檢查推斷全部产品的情况❶．

概率論有一个新分支，叫做"公众事业中的数学方法"，或称"輻輳論"、"排队論"．各种公众事业可以看成是一些服务單位的安排調配，例如百貨公司的收款处、卖食品的櫃台、理髮店的理髮师、火車站或剧院的售票窗口、公共宿舍的厕所、都市計划中电力供应的变电装置、电話綫等等．服务單位数目有限，不可能满足一切需要．无限地增加服务單位就要提高成本．这些問題虽然性質很差异，但在量的方面具有共同点，即要求出服务單位数目与服务的品質之間的相互依賴关系．为了量測服务的品質，随具体情况不同而采用不同的指标，例如可以取"顧客"受到拒絕的百分比（如在一次列車买不到票的人的百分数），或等候直到受到服务的平均时間等．如果定出服务品質的要求，問題就变成求达到这样要求所需的服务單位最少应有多少．电話問題是这方面的标准問題，研究这一問題的人很多．

現在再举一个例❷．設要建立一座發电站，供应大量的需要（車床、机器、發动机等）．每一需要者需要的能量与工作状况設是已知的．現在要确定發电站必需的功率．这时应当考虑到联合机組的随机（偶然）停頓．如果不考虑这种停頓时的停止需要能量，往往会过多地提高了电站所估計的能量，有时电站实际被利用的功率只占50—60%．这問題的实际意义很大，解决它目前还很困难．

科学的發展总是要从較初步的、粗淺的从靜止的簡單化了

---

❶ 請参看本書："数理統計簡單介紹"、"数理統計与工业产品的檢查"．

❷ 取自格涅堅科："关于概率論的若干問題"，数学进展，第4卷（1958），第4期，574—582頁．

的看法观察世界，进而从动的、从它本来面目来观察它。从定量的数学轉变到变量的数学——数学分析的建立——乃是数学史上的一个轉折点。在概率論中，也經历了这样由静到动的阶段。以往考察的随机事件，只是指个别的事件，它的發生具有一定的可能性。相应的要考虑一种随机量，它的值由实驗結果决定，它可以具种种值，取每个值有一定的可能性(概率)。但后来在实际問題中遇到一些随机量，它同时又是随时間而变的。当时間固定时，即在指定的时刻，它取哪个值，由实驗的結果决定。在一定的实驗結果中，它在不同时間取不同值，从而得到一个普通的时間的函数。这种量叫做随机函数，也叫随机过程，在自然現象中有随机过程的典型例子。例如浮悬在液体中的非常小的微粒受液体的大量分子的不規則的撞击而处在連續的不規則的运动状态中。由于撞击微粒的分子数量非常大，这种撞击可以看作是随机的。这个微粒的位置一方面是时間的函数，但在各个时刻它受到的撞击是随机的，从而它又是个随机量。于是这个微粒的运动便表現成一个随机过程。又如工业生产中也出現随机过程的例子。棉紗横截面的厚度是截面坐标的随机函数。飞机在大气中飞行时，由于大气的湍流，飞机的运动也經常受到随机的影响。研究无綫电的噪音也要使用随机过程概念。

还应当提一下信息論——它可以說是近年来科学中最大成就之一。它起源于电話、电报及电視中的信息傳遞問題，即如何获得最有效的傳送信息方式。如对信息不能加以量的測定，自然无从想象如何把数学方法应用到信息論上去。数理信息論的建立，正是起源于确定了信息量的定义。想法是这样的：在所考虑的問題中，在接到信息之前，情况有种种可能性，从而存在着一种不定性；信息的量的大小，就由通过这一信息的获得所能消除的不定性的量大小来标志。由此可以推出表示信息量的簡單数学公式。这公式所規定的信息量的測定适用于在質方面很不相同的信息傳遞，得到同样的成功。

§IV. 关于在中学講授概率論的初步知識的意見

概率論既是很有用的知識，它在現代科学技术中占着重要地位，是研究自然現象，处理現代工程技术乃至公众事业問題的有力工具，那么，尽可能的普及这一方面的知識，就应当提到日程上来．当然，概率論既是还在不断發展着的方向，它使用着現代数学中的种种最新工具．但这并不妨碍有可能来把概率論的最初步的知識及其最簡單的应用放在高級中学里講授．在笔者讀高級中学的时代(在大約二十四五年前)，在中学里本是要学一些概率論的，但那时由于采用外国教本，例子与習題脱离我国的实际，也不联系实际应用，学習的效果一点也不好．但問題不是根本不应教概率論，而是在于如何教的問題．在排列組合知識的基础上，不依靠高等数学，也可以介紹一点概率論初步．本書中的“中学校里的概率論初步”，讀者可以参考．数学通报1958年11—12月号連載的“对中学数学教学改革的意見(附中等学校四年一貫制数学教学大綱初稿)”中也把数理統計学的一些知識(抽样檢查、工序檢查与正态分布等)列在中等学校数学教学大綱中．我認为，中等学校，特别是高級中学的数学教师們最好讀一下象苏联格涅坚科－欣金合著的“概率論初等引論”(已有汉譯本)一类書．那本書的一些內容——事件的概率、概率的合成法則(互斥事件概率的相加以及独立事件概率的相乘)、貝尔努意定理、随机量、分布律、中值(平均值、数学期望)、大数法則、正态分布等，都是中学学生可能懂的．初步的数理統計知識的放入也是很好的．希望广大的中学教师注意这一方向，学習它，研究它，并且一齐討論在中学如何教这方面的初步知識．

中学校里的概率論初步

Г.П.伯叶夫

此篇的題目虽是"中学校里的概率論初步"，但不是說苏联中学校所規定的数学課程中已有概率論，而是作者希望"引起在中学里注意概率論"。原文載在苏联"数学教学"1951年第3期，現經王寿仁同志譯出，以供讀者参考。——編者

§Ⅰ. 概率論的要点

概率論在近代数学里占着一个显著的地位。产生于实际的需要，概率論变成了广闊的和高深的理論，在精密自然科学里，上級生物学、技术科学和經济学里有很多的应用。

概率論以抽象的形式反映了带有大量的特征的随机事件所固有的法則。計算它們的頻率之后，也就是該事件的發生次数和試驗的次数的比例，我們就可以說明每一个这样的随机事件，象試驗所表明的，某些机变的、大量特征的事件有稳定的頻率，也就是它們的頻率在一个很小的范圍內摆动。这样的事件例如天气晴朗的頻率在每一个固定的地点，年复一年的变化很小，又如同用一个固定的槍瞄准目标，而大量的向目标射击，它的命中頻率也是稳定的，等等。

具有稳定頻率的，大量特征的事件正組成了这个对象，它的抽象性質变成了概率論。

稳定頻率的量的特征就是概率。概率就是这样的一个数，当多次的試驗一个随机事件的时候，它的頻率是接近这个数的。当然为了使概率能够作为数学理論的对象，应当給这个概念一个严密的定义，列举出它的基本的形式的特性。这些特性形成了概率論的公理組。当我們对于所考虑的事件对应了一个

固定的数后，这个数叫作概率，而且使它满足一定的公理，然后，通常的数学推理才可以应用到这个数上：知道别的事件的概率，来計算一个事件的概率，在它們当中找出这样或那样的关系，总言之，即建立概率的理論。

有許多的形式地規定概率概念的公理組，下面繪出一組：

公理Ⅰ　对于每一事件 A，对应一个数 $P(A)$，可以取由 0 到 1 的任何数值，这个数叫作 A 的概率。

公理Ⅱ　如果事件 A 是必然的，那么 $P(A)=1$。

公理Ⅲ　如果組成有穷或无穷集合的事件是彼此互斥的，那么这些事件中任何一个事件發生，这个复合事件（称作它們的和）的概率等于它們概率的和。

特別言之，如果事件 A 与 B 乃是互斥的，則有 $P(A \text{或} B)=P(A)+P(B)$。

为了建立理論，我們仍要引进条件概率的概念，它的定义如下：在条件 B 下的 A 的概率等于以 B 的概率除 A 和 B 同时發生的概率的商：

$$P(A \mid B)=\frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

事件 A 和 B 叫作相互独立的，如果 $P(A \mid B)=P(A)$ 能够成立，換言之：

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

基于上述的三个公理，和后面跟着的二个定义，还有某些别的，所有的改进一步的理論就完全邏輯地建立起来了。例如由公理Ⅱ和Ⅲ很容易推出定理：如果已知事件的概率是 p，那么非此事件的概率就是 $1-p$。

这样所建立起来的概率論在邏輯关系上和別的数学理論完全相仿。为了比較，讓我們回想初等几何是怎么样的。在几何的严密叙述里，首先是一組公理，几何对象"点""綫""平面"必須满足这一組公理。如所周知，几何公理組不是純粹幻想的产物而是实在对象所具有的那种特性的抽象，借邏輯法則的应

用，把这些归約成最少，而这些邏輯法則本身且又是反映物質对象間的相互关系的．同样的，概率論公理形式地定义了概率概念，反映了在眞实存在的世界里出現的某种規律性．

但是，不用公理办法，还有别的办法来表明概率概念．我們再举两种办法：一种是十八—十九世紀时代数学所特具的古典办法，一种是德国数学家 R. 密西斯(Von Mises) 所給的經驗的办法．

古典概率論把事件的概率定义为：对已知事件的有利情况的个数，与所有的等同概然的而且包括一切可能和互斥的情况的总个数的比值．例如在一个缸里有 30 个白球和 50 黑球，那么假定由这 80 个球里选出任意一个球来是等同概然的，当我們"随意"选一个球时，所选的球是白的概率就等于3/8．

所看到的古典概率定义是基于沒有定义的等同概然这个概念．所以古典定义有邏輯上的缺点．另外一个缺点是不能把这个概率概念应用到純粹統計事件上．这样，只知道古典概率定义，我們不可能談到不規則六面体这一面或那一面出現的概率，因为在这种情况下，擲此六面体所得的結果不能分布为等同概然的情形．最后古典概率概念还有第三个缺点．假如試驗引到无穷多个可能情况时，这个定义就沒有意义了．

希望补救古典概率概念的缺点，希望使概率概念成为眞正統計的工具，P. 密西斯給了下面的定义：如果在大量的 n 次实驗中，事件出現的頻率为$\frac{m}{n}$，那么当$n\to\infty$时，$\frac{m}{n}$的極限称为这个事件的概率．初看来好象密西斯的定义是唯物的而自然的．事实上它是在邏輯上无根据的而且是唯心的．实質上在它里面的極限沒有数学上通常的意义．为了承認$\frac{1}{2}$是擲銅錢时正面出現的頻率的極限，我們应当証明从某一个 n 以后，不等式 $\left|\frac{m}{n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 能够成立．然而无論就理論的考察或就具体的实驗，不可能找到这样的一个 n，所以承認頻率極限存在是先驗

的，先于理論与經驗的，这个定义整个是唯心的.

唯一正确而且合乎辯証唯物論的概率的数学概念的定义是用公理办法，当然，这些公理是实在世界性質的抽象結果.

§Ⅱ. 概率論簡史

正象其他的数学分支一样，概率論是由于社会發展的实际需要而产生的，十六世紀时盛行賭博，發明賭博理論的打算大大地促进了概率論的發展，塔耳塔立亞（Tartaglia）和卡而丹(Cardan)發明了計算概率，由于它可以得知在擲骰子的賭博里所擲出的点子的种种組合的概率. 后来的伽里略，巴斯伽，費尔馬，䨇根斯(Huyghens)和笛卡兒也从事于这种問題的研究. 直到十八世紀初期，J. 伯努利(Bernoulli)，才得到真正新的結果，他把这結果叫作"大数律". 伯努利算出了在很多次試驗一个事件里，出現的頻率和这个事件的概率相差很小时的概率. 伯努利的定理成了一整系列的定理的开端，这系列定理叫作極限定理，而且是由十八—十九世紀的数学家，模阿夫 (de Moivre)，拉普拉斯，普桑(Poisson)，П.Л. 切被謝夫(Чебышев) А.А. 馬可夫(Марков)諸人所發展.

在十八世紀末十九世紀初拉普拉斯和高斯开始把概率論应用到試驗的誤差上. 在这个路綫上拉普拉斯得到了比伯努利深刻一步的定理.

在十九世紀后半叶和二十世紀前半叶由于俄國和苏联的数学家的工作結果，得到了概率論里的首要結果，切被謝夫所找到的不等式，以惊人簡單的程度証明了伯努利定理. 他又給了一个伯努利定理的第一步的扩充: 有一組相互独立的机变数，它們的方差是一致有界的，这个扩充定理是关于下面事件的概率問題的: 当这一組机变数的个数无穷增多时，它們的数学平均数和此数的数学期望値的差可以任意小的事件. 切被謝夫又陈述了所謂"中心極限定理"，而且概略地以动差方法給出了它的証明. 切氏的学生与后繼者 А.А. 馬可夫掌握了他的观念，