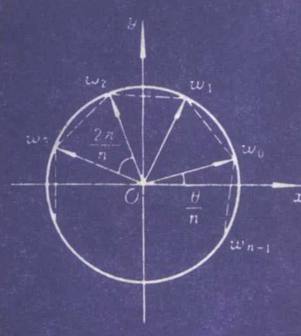
职工高等工业专科学校教材

复变函数

★ 陈俊澳 顾昭荣 编



高等教育出版社

职工高等工业专科学校教材

复 变 函 数

陈俊澳　顾昭荣 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是根据职工高等工业专科学校工程数学教学大纲编写的．本书讲述了职工高等工业专科学校各专业课程所需要的复变函数基础知识．每章末都附有小结、思考题和适量的习题，书末附有习题答案．

本书叙述详细，例题较多，便于成人自学．本书可供职工高等工业专科学校有关专业作教材，或供工程技术人员作参考书．

职工高等工业专科学校教材

复 变 函 数

陈俊澳　顾昭荣 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张7.125　字数170 000

1987年7月第1版　1987年8月第1次印刷

印数 00,001—[illegible],16[illegible]

书号：13010·01402　　定价：1.20元

前　　言

本书是根据1983年11月在无锡召开的全国职工高等工业专科学校数学大纲审定会议精神，按照职工高等工业专科学校《工程数学教学大纲》编写的，主要供电类各专业作教材使用，也可供其他专业选用．使用本书的几点说明如下：

1．按照教学大纲要求，本教材可用26～34学时授完教学大纲中规定的内容．

2．根据职工高等工业专科学校学生的特点，我们在文字上力求通俗易懂；为了使学生掌握基本理论，我们在各部分安排了较多的例题，必要的推导也比较详细，以便于自学．

3．本课程主要是为有关专业课程服务的，因此本书对于基本概念和基本理论尽量作到叙述准确、解释清楚，但对于较难或较繁的证明，多数省略．本书的编写着重在训练学生准确地掌握运用复变函数理论去解决实际问题．

4．每章末的小结和思考题，供读者复习和理解基本概念使用，各章之后附有适量的习题，并在书后附有答案，根据教学大纲要求，学生在教师指导下可只选做其中一部分．

5．加“*”号的内容和习题，是教学大纲规定的加深或加宽的内容，所用的学时不在教学计划之内，教师可以根据实际情况取舍。加“△”的各章节，是供不同专业的需要选学的内容．

本书由天津大学祝肇栋副教授和天津市河北区职工大学李超志同志担任主审，参加审稿的还有谢增凤，邱华吉同志，他们对本书提出了许多宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，错误和不妥之处在所难免，诚恳地欢迎广大的教师和读者批评指正。

编　者

1986 年元月

目　录

第一章　复数与复变函数

§1　复数及其代数运算

1. 复数的概念

在初中代数里，我们知道，当一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ (a,b,c为实数，且 $a\neq 0$)的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$时，此一元二次方程就没有实数根.

例如，方程 $x^2-4x+13=0$ 的判别式 $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 13=-36<0$，此方程没有实数根. 但引入一个新数 i ($i^2=-1$，即 $i=\sqrt{-1}$)之后，此方程有两个根，$2+3i$ 和 $2-3i$.

象 $2+3i$ 和 $2-3i$ 这样的数称为复数.

复数 z 一般表示为 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，x 和 y 均为实数，分别称为 z 的实部和虚部，记为 $\mathrm{Re}(z)=x$，$\mathrm{Im}(z)=y$.

复数

$$z=x+yi, \tag{1.1}$$

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是实数；当 $y\neq 0$ 时，z 称为虚数；当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，$z=yi$ 称为纯虚数.

例如：$0.3+\sqrt{2}\,i$，$\frac{7}{2}-3i$，5，$10i$ 均为复数.

定义 1.1　设复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，称 z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1=z_2$.

定义 1.2　设复数 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，当 $x_1=x_2$，而

$y_1=-y_2$，则称 z_1 为 z_2 的共轭复数，记为 $z_1=\bar{z}_2$.

例如，$3-4i$ 为 $3+4i$ 的共轭复数，同时 $3+4i$ 也是 $3-4i$ 的共轭复数.

由于 $y_1=-y_2$ 时 $y_2=-y_1$，故当 z_1 是 z_2 的共轭复数时，z_2 也是 z_1 的共轭复数，从而 z_1 和 z_2 互为共轭复数. 例如，$3-4i$ 和 $3+4i$ 互为共轭复数.

由共轭复数的定义，容易推出

$$(\overline{\bar{z}})=z. \tag{1.2}$$

2. 复数的代数运算

定义 1.3 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则复数

$$z=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

称为 z_1 与 z_2 的和，记为 $z=z_1+z_2$，即

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{1.3}$$

定义 1.4 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则复数

$$z=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

称为 z_1 与 z_2 的差，记为 $z=z_1-z_2$，即

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.4}$$

由定义 1.3 和定义 1.4 可知，复数相加（减）就是将它们的实部和虚部分别相加（减）.

例 1 计算 (1) $(4+i)+(-2+3i)$；

(2) $(0.3-i)-(5-2.4i)$；

(3) $z+\bar{z}$；(4) $z-\bar{z}$.

解 (1) $(4+i)+(-2+3i)=(4-2)+(1+3)i=2+4i$；

(2) $(0.3-i)-(5-2.4i)=(0.3-5)+(-1+2.4)i$
$=-4.7+1.4i$；

(3) $z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\,\mathrm{Re}(z)$；

(4) $z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2yi=2i\,\mathrm{Im}(z)$.

定义 1.5 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则复数

$$z=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

称为z_1与z_2之积，记为$z=z_1\cdot z_2$，即

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \quad (1.5)$$

复数相乘可按多项式的乘法规则进行，在所得结果中把i^2换成-1，并分别合并实部和虚部.

例 2 计算 $(3+4i)(5+2i)$

解 $(3+4i)(5+2i)=3(5+2i)+4i(5+2i)$

$$=15+6i+20i+8i^2=15+26i-8$$

$$=7+26i,$$

如按复数的乘法定义计算，可得

$$(3+4i)(5+2i)=(3\cdot5-4\cdot2)+(3\cdot2+4\cdot5)i=7+26i,$$

上述两种算法的结果相同.

例 3 计算 (1) $(-2+3i)(-2-3i)$；(2) $z\cdot\bar{z}$.

解 (1) $(-2+3i)(-2-3i)=(-2)^2-(3i)^2=4+9=13$；

(2) $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2$.

从例 3 可知，一对共轭复数之积为一个非负实数，它等于复数z的实部平方与虚部平方之和，即

$$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2.$$

由定义 1.3 和定义 1.5 可以证明，复数的加法与复数的乘法满足下列运算规律

$z_1+z_2=z_2+z_1$， $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$， （交换律）

$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$，$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$，（结合律）

$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$. （分配律）

定义 1.6 设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2\neq0$，则满足$z_2\cdot z=z_1$的复数z称为z_1除以z_2的商，记为$z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

由定义可以得出

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.6}$$

这里，复数除法定义为复数乘法的逆运算，当然前面的复数减法也可以定义为复数加法的逆运算．而在实际计算中，为了求 $\frac{z_1}{z_2}$，常在分子与分母中同乘以分母的共轭复数 $\bar{z}_2$，化简后，即可得出所求的商．

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

例 4 计算 (1) $\frac{1+2i}{3-4i}$；(2) $\frac{2+5i}{3i}$.

解 (1) $\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i+6i+8i^2}{3^2+4^2}$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i;$$

(2) $\frac{2+5i}{3i}=\frac{(2+5i)(-i)}{3i(-i)}=\frac{-2i-5i^2}{3}$

$$=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}i.$$

定义了复数的四则运算，我们可以证明：

$$\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2;\quad \overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.\ (z_2\neq 0). \tag{1.7}$$

证明作为练习留给读者．

定义 1.7 n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记为 z^n，即

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n\text{ 个}}. \tag{1.8}$$

当 $z\neq 0$ 时，定义

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}\quad (n\text{ 为正整数}). \tag{1.9}$$

当 $z=i$ 时,按定义 1.7 ,有

$$i^1=i\quad,\quad i^2=-1\quad,\quad i^3=i^2\cdot i=-i\quad,$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=1\quad,\quad i^5=i^4\cdot i=i\quad,\cdots$$

一般地,如果 n 是正整数,则

$$i^{4n}=1\ ,\ i^{4n+1}=i\ ,\ i^{4n+2}=-1\ ,\ i^{4n+3}=-i\ .$$

复数 $z=x+iy$ 的 n 次幂,也可按多项式的乘法公式计算.

例 5 计算 (1) $(-1+\sqrt{3}i)^3$; (2) $i^{15}+4i^{-3}-6i^{-11}$.

解 (1) $(-1+\sqrt{3}i)^3=(-1)^3+3(-1)^2(\sqrt{3}i)$

$$+3(-1)(\sqrt{3}i)^2+(\sqrt{3}i)^3$$

$$=-1+3\sqrt{3}i+9-3\sqrt{3}i=8;$$

(2) $$i^{15}+4i^{-3}-6i^{-11}=i^{15}+\frac{4}{i^3}-\frac{6}{i^{11}}$$

$$=i^{4\times3+3}+\frac{4}{i^3}-\frac{6}{i^{4\times2+3}}=-i-\frac{4}{i}+\frac{6}{i}$$

$$=-i+\frac{2}{i}=-i-2i$$

$$=-3i\ .$$

定义 1.8 已给复数 z,如果 $w^n=z$ (n 为正整数),则复数 w 称为 z 的 n 次方根,记为 $\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$,即 $w=\sqrt[n]{z}$

当 $z\neq0$ 时,z 的 n 次方根 w 有 n 个不同的值,求根的方法详见§ 2.5.

例 6 已知 $z=\dfrac{(1+i)(-1+2i)+(2-i)}{2-3i}-\dfrac{2}{i}$,求 $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$

解 $$z=\frac{(1+i)(-1+2i)+(2-i)}{2-3i}-\frac{2}{i}$$

$$=\frac{-1}{2-3i}+2i$$

$$=-\frac{2}{13}+\frac{23}{13}i,$$

由此得出，$\operatorname{Re}(z)=-\frac{2}{13}$，$\operatorname{Im}(z)=\frac{23}{13}$.

例 7 验证 $z=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$ 是方程$3z^2+2z+1=0$ 的根.

证 $3\left(-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i\right)+1$

$$=3\left(\frac{1}{9}\mp\frac{2\sqrt{2}}{9}i+\frac{2}{9}i^2\right)-\frac{2}{3}\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i+1$$

$$=\frac{1}{3}\mp\frac{2\sqrt{2}}{3}i-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}i+1$$

$$=0\ .$$

由上可知，$z=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i$ 为方程 $3z^2+2z+1=0$ 的根.

例 8 证明 $z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

证法一 设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，

$$\begin{aligned}z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2&=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)+(x_1-iy_1)(x_2+iy_2)\\&=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)\\&\quad+i(x_1y_2-x_2y_1)\\&=2(x_1x_2+y_1y_2),\end{aligned}$$

$$z_1\bar{z}_2=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2),$$

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)=x_1x_2+y_1y_2.$$

由此得出

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

证法二 由共轭复数的性质知

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=(z_1\bar{z}_2)+\overline{(z_1\bar{z}_2)}=2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2).$$

§ 2　复数的几种表示法

1. 复数的代数表示法

在§ 1 中我们用 $z=x+iy$ 表示复数，这种表示称为复数的代数形式.

2. 复数的坐标表示法

由于复数 $z=x+iy$ 与有序实数组(x, y)之间有一一对应关系，所以，当平面上给定了直角坐标系后，复数 $z=x+iy$ 可以用坐标为(x, y)的点来表示.

表示复数的坐标平面称为复平面或 z 平面. 在复平面上 x 轴上的点$(x, 0)$表示实数，x 轴又称实轴；y 轴上的点$(0, y)$表示纯虚数，y 轴又称虚轴. 必须注意，复平面的虚轴不包括原点；原点在实轴上，表示实数 0.

这样，复数与复平面上的点之间就建立了一一对应关系. 以后，我们对复平面上的点与复数将不加区别，即将"点 z"与"复数 z"作为同义词.

例如，复数 $2+3i$，$-3+i$，2，$3i$，$-2i$，$2-3i$ 可由图 1.1 中的点 A，B，C，D，E，F 分别表示，我们说已知复平面上的点 A，就是已知复数 $2+3i$.

一对共轭复数 $2+3i$ 与 $2-3i$ 用复平面上的两点 A 与 F 表示，它们关于实轴对称(图 1.1).

3. 复数的向量表示法

复数 $z=x+iy$ 除了可以用复平面上的点(x,y)表示外，还可以用一个向量表示，该向量的起点可以落在任意一点，它在实轴及虚轴上的投影分别是 x 及 y. 这里，对于经平行移动可以重合的向量，被认为是同一个向量，这种向量称为自由向量.

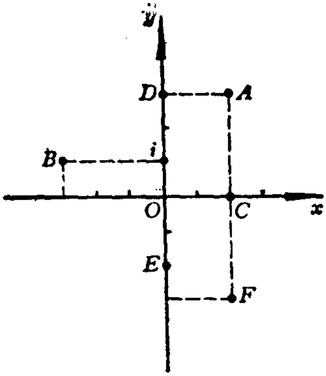


图 1.1

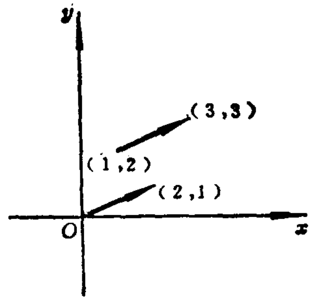


图 1.2

例如，从点(1,2)到点(3,3)的向量，它在实轴与虚轴上的投影分别为 $3-1=2$ 与 $3-2=1$，故它表示的复数为 $z=2+i$. 如果将所给出的向量平行移动，使起点落在原点，则终点落在点(2,1)处，该向量所表示的复数仍为 $z=2+i$(图 1.2).

由上可知，复数与向量之间也是一一对应的. 以后，将"复数 z"与"向量 $\overrightarrow{Oz}$"也作为同义词.

如果用向量表示复数，则 $z_1=x_1+iy_1$ 与 $z_2=x_2+iy_2$ 相加或相减，就相当于向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 与 $\overrightarrow{Oz_2}$ 相加或相减，即可以用平行四边形法则或三角形法则去求 z_1+z_2 及 z_1-z_2(图 1.3).

复数 z_1-z_2 可以由 $z_1+(-z_2)$ 得出（$-z_2$ 表示与 z_2 长度相等，方向相反的向量）；也可以将 z_1 与 z_2 的起点落在一起，则 z_1-z_2 是由 $\overrightarrow{Oz_2}$ 的终点到 $\overrightarrow{Oz_1}$ 的终点所构成的向量(图 1.3).

定义 1.9 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度，称为复数 z 的模，记为 $|z|=r$ (图1.4).

关于复数的模，显然有下列关系