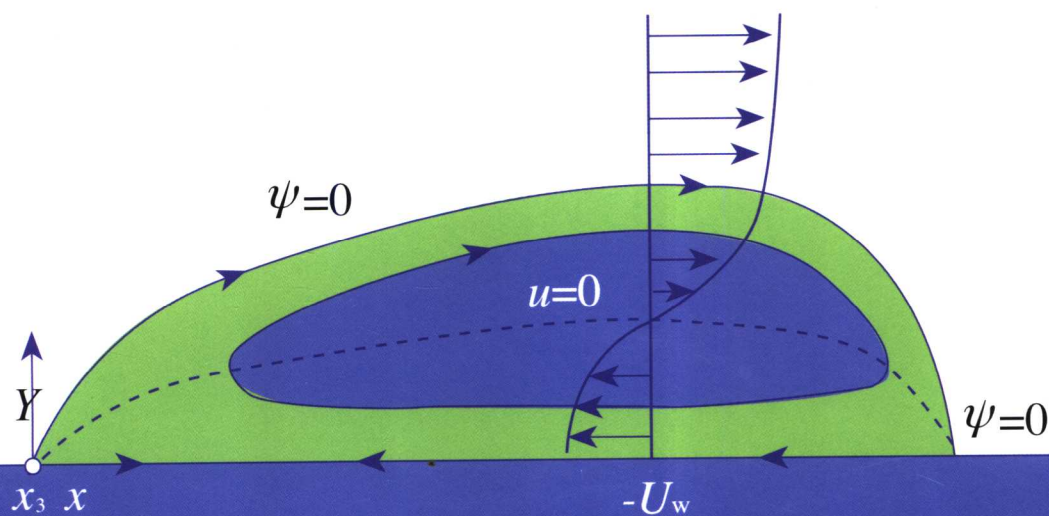


郑连存 张欣欣 赫冀成 著

传输过程 奇异非线性边值问题

——动量、热量与质量传递方程的相似分析方法



75.8
66

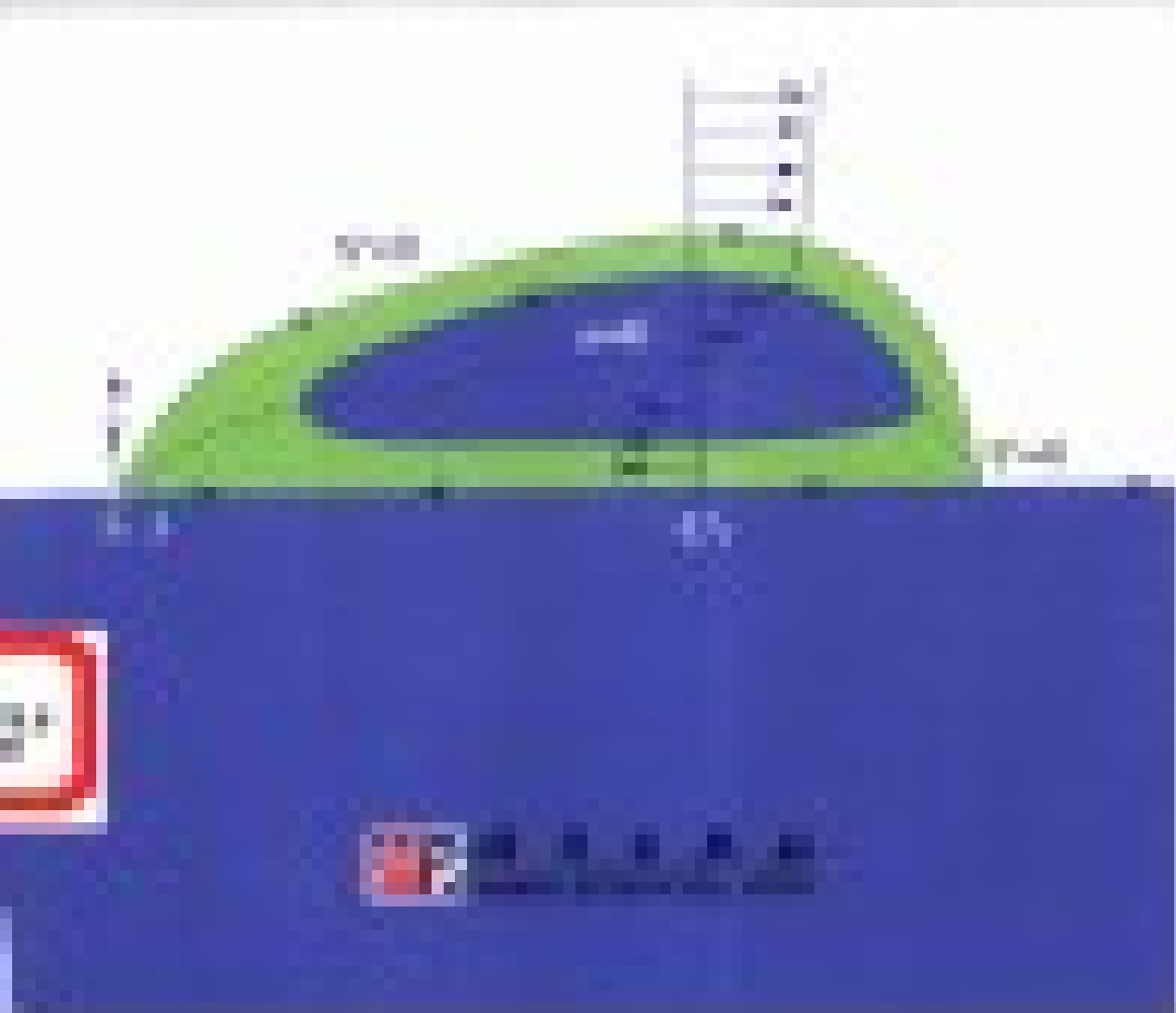


科学出版社
www.sciencep.com

张远新 李海英 编著

传输过程 奇异非线性边值问题

——能量、熵与质量守恒方程的解的存在性证明



传输过程奇异非线性边值问题

——动量、热量与质量传递方程的相似分析方法

郑连存 张欣欣 赫冀成 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书从数学方法论角度出发,综合物理、化学、流体力学、传热传质学等领域的知识以及偏微分方程现代理论的发展,利用微分方程相似变换群理论、函数分析理论、积分方程理论、广义函数理论、打靶法技巧和奇异摄动法技巧等,对自然界和工程技术中普遍存在的非常规边界条件下的边界层内的流动、传热、扩散等现象,从解析分析、数学论证和数值模拟等方面进行深入系统的定性分析和定量研究。着重介绍了激波边界层、膨胀波边界层、射流边界层、具有抽吸/喷注的幂律流体顺流/逆流移动物面边界层和幂律广义反应扩散方程,以及由此导出的一类奇异非线性边界值问题,反映了近年来该领域发展的最新成果。

本书可作为航空航天、航海、能源、环境、动力、冶金、化工、水利、水电等行业的研究人员和工程技术人员的参考书,也可用作理工科大学数学、力学、工程热物理学等专业的研究生教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

传输过程奇异非线性边值问题——动量、热量与质量传递方程的相似分析方法/郑连存,张欣欣,赫冀成著. —北京:科学出版社,2003.6

ISBN 7-03-011229-6

I. 传… II. ①郑… ②张… ③赫… III. 边值问题-研究
IV. O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015576 号

责任编辑:胡 凯 鄢德平/责任校对:钟 洋

责任印制:安春生/封面设计:王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2003年6月第一次印刷 印张:9 1/2

印数:1—1 500 字数:170 000

定价:20.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序

物质的多样性和物质运动形态(力、热、电磁、光、声、化学反应)的相互可转换性是自然变化(包括生命演化)的原动力。在改造自然的各种工程和生产实践以及医疗防护中,经常遇到动量、能量和物质传输的诸多宏观流动、传热、传质、反应扩散等具体过程。半个世纪以来,从经典的流体动力学发展了黏性流体的边界层理论与相似分析法,推动了对流传热传质学和化学流体动力学的进展,并从流变学特性提出了幂律型非牛顿流体,开拓了数值模拟方法与技术,为技术创新不断做出相应的贡献。

郑连存、张欣欣、赫冀成教授长期从事流体力学、热能工程与工程热物理的教学和科研工作,将十余年累积的专门研究成果,系统整理成专著《传输过程奇异非线性边值问题——动量、热量与质量传递方程的相似分析方法》。作为专论,自应有别于通常教科书,而是突出主题,开门见山。全稿以简练的笔触,深入阐述了多参数干扰下非常规边界条件下有关流动、传热、扩散等奇异非线性问题的求解。

本书共七章,篇幅紧凑,除第一章作为全书绪言而简介发展历程和阐明专著内容意向外,第二、三章分别讨论由激波或膨胀波诱导的边界层相似解和射流冲击运动平面的边界层相似解,第四章至第五章专门讨论幂律流体的边界层问题,第六章至第七章研究 N 幂律反应扩散方程和偏微分方程现代理论的一些发展及其在研究反应扩散方程中的应用。本书从严格的物理本质和数学方法论的角度出发,思路新颖,领域宽广。可供涉及传输过程的教学和科研工作者(包括研究生)学习参考。谨为之简介,以供参考。



中国科学院院士

2002年11月于清华园

前 言

数学推导与数量化在科学技术的发展中起了巨大作用,奠定了现代科学的基础。可以说,没有数的规律或规定的世界,只能是一个混乱的世界。流动、传热、扩散等现象普遍存在于自然界和生产实际,如航空航天、航海、水利、水电、能源、环境、化工、冶金、动力以及生物工程和纳米技术等。从物理本质与数学描述两方面全面认识和深入研究相关基本现象,不断揭示其内在规律,才能推动科学研究的发展,并带动相关行业工程技术的进步。由偏微分方程组所描述的非经典边界条件下边界层内的流动、传热以及广义反应扩散问题,特别是涉及到幂律流体时,由于问题的超非线性及边界条件的非常规性且影响参数众多,问题异常复杂。尽管到了科学技术高度发展的今天,对于这类传输问题进行系统的定性、定量的研究仍然是十分困难的。面对自然现象和工程领域内众多的复杂问题,建立合适的数学模型并寻求问题的解析解(或数值解),是几乎所有科学工作者和工程技术人员梦寐以求和首先追求的主题。

本书作者经过十几年的艰辛努力,广泛综合数学、物理、化学、流体力学、传热质质学等领域的知识和进展,从解析分析、数学论证和数值模拟等方面,对不同机制诱发的边界层及其在常规和非常规边界条件(移动边界,边界上存在抽吸/喷注等)下牛顿流体和幂律流体的流动、传热、扩散等问题进行了较为系统的研究,对解的定性、性态以及动量、能量和质量的传递行为进行了系统的分析。本书思路独特,结构新颖,涉及领域宽广。本书绝大部分内容取材于作者近年来的研究成果和发表的论文。对于大部分具有实际背景的问题给出了解析解、解的定性分析、数学论证以及数值模拟结果,从理论上给出了解的行为的物理解释,为相关科学研究和工程应用提供了新的依据、思路和方法。

本书的特色和创新之处在于从数学方法论的角度出发,采用多学科交叉的研究方法,利用微分方程相似变换群理论、函数分析理论、积分方程理论、广义函数理论、打靶法和奇异摄动法等,从理论分析、数学论证和数值模拟等方面对非常规边界条件下边界层内的流动、传热、扩散问题进行深入系统的研究。特别是对于多参数干扰下的幂律流体流动和广义反应扩散问题,通过引入适当的相似变换,将幂律偏微分方程组转化为常微分方程奇异非线性边值问题,最后通过对边值问题进行数学论证、解析求解和数值求解,得到过去无法得到的结果。作者希望通过本书不仅为读者提供边界层问题的一般研究结果,而且还为读者提供解决物理及工程问

题的思路和方法。

本书的写作得到中国科学院院士清华大学王补宣教授的热情帮助,他审阅了全部书稿,提出了许多宝贵意见,并为本书撰写了序言,在此作者对王先生表示最诚挚的谢意。

由于作者水平所限,本书难免存在不足之处,诚请广大读者及时给予指正。

作 者

2002 年冬于北京

主要符号表

英文符号

C_p	定压比热容
k	热传导系数
R	气体常数
T	绝对温度; T_e 热边界层外缘温度; T_w 壁面温度
P	压力
t	时间
$(\bar{x}, \bar{y}), (x, y), (X, Y)$	笛卡儿坐标
$\bar{u}, \bar{v}$	平行于 $\bar{x}, \bar{y}$ 轴的速度; u, v 平行于 x, y 轴的速度
U, V	平行于 X, Y 轴的速度
ρ	密度
H	厚度
H_0	射流半厚度
$Q = U_0 H_0$	热量
q	热通量
T_0	射流温度

希腊文符号

γ	比热比
μ	动力黏度
ν	运动黏度
ψ	流函数
η	相似变量
τ	剪切应力

矢量符号

$\mathbf{q}$	广义通量密度矢量
$\mathbf{V} = (U, V)$	速度矢量和分量
$\mathbf{Q}$	广义通量矢量

Θ	广义浓度; $\nabla\Theta$	广义浓度梯度
B	关于广义浓度梯度 $\nabla\Theta$ 的向量函数	
Φ	算子	
$C^\infty(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$	基本函数空间	

无量纲准数

Pr	普朗特数
Re	雷诺数
Nu	努塞尔数
Ma	马赫数

无量纲参数

N	幂律指数	“
$C = (N+1)BV_0/U_\infty$	抽吸/喷注参数	
$\xi = u_w/u_e, U_w/U_0, U_w/U_\infty$	速度比例参数	
$\lambda = T_w/T_e$	温度比例参数	

目 录

第一章 绪论	(1)
1.1 黏性流体力学相关知识	(1)
1.1.1 边界层理论的历史概述	(1)
1.1.2 相似研究方法	(3)
1.1.3 非牛顿流体流动	(5)
1.2 反应扩散方程简介	(7)
1.2.1 概述	(7)
1.2.2 N 幂律反应扩散方程	(8)
1.2.3 广义函数与微分方程广义解	(9)
1.3 本书内容概述	(10)
参考文献	(12)
第二章 激波和膨胀波诱导边界层及其相似解	(17)
2.1 引言	(17)
2.2 激波、膨胀波边界层方程	(18)
2.2.1 边界层控制方程	(18)
2.2.2 流函数和相似变量	(19)
2.3 激波动量、能量边界层方程的相似解	(20)
2.3.1 转化为非线性两点边值问题	(20)
2.3.2 两点边值问题的解及讨论	(20)
2.4 膨胀波动量、能量边界层方程的相似解	(24)
2.4.1 转化为非线性两点边值问题	(25)
2.4.2 两点边值问题的解及讨论	(25)
2.5 本章结论	(27)
参考文献	(28)
第三章 垂直射流冲击运动平面的边界层及其相似解	(29)
3.1 垂直射流到运动平面	(29)
3.1.1 引言	(29)
3.1.2 层流边界层控制方程	(30)
3.2 速度比例参数 $0 \leq \xi < 1$ 的情况	(31)
3.2.1 相似变换及 Crocco 变换	(31)

3.2.2 奇异非线性边界值问题求解	(32)
3.3 速度比例参数 $\xi > 1$ 的情况	(37)
3.3.1 相似变换及 Crocco 变换	(37)
3.3.2 奇异非线性边界值问题求解	(38)
3.4 本章结论	(41)
参考文献	(42)
第四章 幂律流体顺流运动平板边界层及其相似解	(44)
4.1 物理背景及相似解方程的导出	(44)
4.1.1 问题的起源	(44)
4.1.2 边界层方程	(45)
4.1.3 流函数和相似变量	(46)
4.1.4 Crocco 变量和相似变换	(47)
4.2 主要分析结果及证明	(48)
4.2.1 主要结果	(48)
4.2.2 证明结论	(48)
4.3 数值结果和讨论	(54)
4.4 一类一般奇异非线性边值问题	(57)
4.4.1 一般奇异非线性边值问题	(58)
4.4.2 正解的惟一性	(60)
4.4.3 正解的存在性	(62)
4.5 本章结论	(65)
参考文献	(66)
第五章 幂律流体逆流运动平板边界层及其分歧解	(68)
5.1 物理背景及其相似解方程	(68)
5.1.1 问题的起源	(68)
5.1.2 边界层方程	(70)
5.1.3 流函数和相似变量	(71)
5.2 边值问题的主要分析结果	(72)
5.3 结果证明	(73)
5.4 数值结果和讨论	(79)
5.5 一类非线性边值问题的进一步研究	(83)
5.5.1 引言	(83)
5.5.2 主要结果	(84)
5.5.3 证明结果	(86)
5.6 本章结论	(94)
参考文献	(94)
第六章 N 幂律广义反应扩散方程	(97)

6.1 引言	(97)
6.1.1 反应扩散方程的各种实际问题	(97)
6.1.2 N 幂律反应扩散方程	(99)
6.2 具有对流项的广义反应扩散方程	(101)
6.2.1 方程的形式及其相似变换	(101)
6.2.2 两点边值问题	(102)
6.3 两点边值问题解的存在惟一性	(102)
6.4 边值问题的解	(106)
6.5 一类具有自由边界的扩散问题	(108)
6.5.1 数学模型及控制方程	(108)
6.5.2 转化成两点边值问题	(109)
6.5.3 两点边值问题的解及讨论	(110)
6.6 本章结论	(116)
参考文献	(117)
第七章 偏微分方程现代理论及 N 扩散方程广义解	(119)
7.1 偏微分古典解及其局限性	(119)
7.1.1 波动方程的古典解	(119)
7.1.2 热传导方程的古典解	(120)
7.1.3 微分方程解的概念扩充	(120)
7.2 广义函数的基本概念	(121)
7.2.1 基本函数空间 $C^\infty(\Omega)$ 和 $C_0^\infty(\Omega)$	(121)
7.2.2 广义函数和广义函数空间	(123)
7.3 广义函数的导数和乘子	(125)
7.3.1 广义函数的导数	(125)
7.3.2 广义函数的乘子	(127)
7.4 广义函数的卷积与傅里叶变换	(127)
7.4.1 基本空间 $S(R^n)$ 和广义函数空间 $S'(R^n)$	(127)
7.4.2 广义函数的卷积	(128)
7.4.3 广义函数的傅里叶变换	(129)
7.5 偏微分方程基本解及其应用	(130)
7.5.1 偏微分方程基本解	(130)
7.6 具有无穷边界的 N 扩散方程初值问题研究	(132)
7.6.1 数学方程	(132)
7.6.2 数学方程的化简	(132)
7.6.3 两点边值问题的解及讨论	(134)
7.7 本章结论	(137)
参考文献	(138)

第一章 绪 论

物质的多样性与不均匀性,温度和浓度的差异是世界的本质和生命的原动力。流动、传热和扩散等现象普遍存在于在自然界和生产实际,如水利、电力、航空航天、航海、化学工业、冶金工业、材料工业、能源工程和生物工程等。从物理本质与数学描述两方面深刻地认识相关基本现象,揭示内在规律,是推动传输研究领域更快发展的有效方法。由偏微分方程组特别是具有幂律特征的偏微分方程组所描述的非经典边界条件下的流动、传热及广义反应扩散问题,由于问题的超非线性及边界条件的非常规性且影响参数的众多,问题异常复杂。相关学科的发展、实验技术的进步以及现代计算机技术的飞速发展,为分析研究这类问题提供了有效的方法。面对众多的复杂问题,建立合适的数学模型并寻求问题的解析解,仍然是几乎所有科学家和工程师首先追求和永远梦寐以求的主题。

非经典边界条件下的流动、传热及广义反应扩散问题主要包括三个方面的内容:动量传输、热量传输和质量传输。三者具有类似的机理,也有相互关联和相互作用。尤其是动量传输,它是运动流体体系中或流体掠过固体表面时热量传输和质量传输的基础。因此研究黏性流体的动量传输问题,对研究传输问题具有重要的意义。

本书是作者经过十几年的艰辛努力,从数学方法论角度出发,采用多学科交叉的研究方法,在广泛综合数学、物理、化学、流体力学、传热学等领域的知识和进展的基础上,利用微分方程相似变换理论、函数分析理论、积分方程理论、广义函数理论、打靶法和奇异摄动法等,从理论分析、数学模化和数值模拟等多方面对常规与非常规边界条件下的流动、传热和扩散问题的解析求解、解的性态及相应的传递行为进行了深入系统研究的基础上写成的专论,目的在于深入揭示问题的本质,并为解决实际工程问题提供理论依据和方法论。

1.1 黏性流体力学相关知识

1.1.1 边界层理论的历史概述

黏性流体流动的研究可以回溯到古代。早在文艺复兴时期,意大利的列奥那多·达·芬奇(Leonardo da Vinci, 1452~1519)就正确推导出了一维不可压缩流动的质量守恒方程。在他的手稿中,还记载着波动、水跃、自由射流、钝体后面旋涡的

形成、流线型减阻以及旋涡中速度分布的准确描述。

1687年,牛顿(Isaac Newton, 1642~1727)发表了他的名著《自然哲学的数学原理》,对几乎所有普通流体的黏性性状作了这样的描述:“流体的两部分由于缺乏润滑性而引起的阻力,同流体两部分彼此分开的速度成正比。”现在我们称之为不可压缩流体的牛顿内摩擦定律。在简单剪切流中,不可压缩流的牛顿内摩擦定律可以表示为

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.1.1)$$

式中 τ 表示剪切应力, μ 表示流体的黏性系数,或称为动力黏性系数, du/dy 表示速度梯度。符合牛顿内摩擦定律的流体,被称为牛顿流体。许多流体,包括空气和水,都是牛顿流体。

牛顿的微积分为流体力学的研究提供了强有力的分析工具,使流体力学得到了充分的发展。伯努利(Daniel Bernoulli, 1700~1782)、欧拉(Leonhard Euler, 1707~1783)、达朗贝尔(J. le R. d'Alembert, 1717~1783)、拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736~1813)和拉普拉斯(P. S. Laplace, 1749~1827)都对这一学科的发展作出了重要的、甚至是奠基性的贡献。由于人类最经常接触的流体是空气和水,它们的黏性都很小,所以,最初的研究都忽略了流体的黏性,按照无黏性的理想流体进行研究。以描写理想流体的欧拉运动方程为基础,以纯数学分析为手段,建立和发展了理论流体力学。到19世纪末,这一理论已经发展到相当完善的程度。

但是这种理论在某些方面与试验结果相矛盾,例如它不能估计管道流动中的压力损失和在流体中运动的固体所受到的阻力,而从实际工作的工程师是需要这些数据的,因此,他们对这种理论不感兴趣。于是,他们根据实际工程发展的需要,以实验结果为基础,建立和发展了水力学。

流体力学的这两个分支互不联系、平行发展的情况一直持续到19世纪末。

在19世纪20年代,已有一些科学家看到了理论流体力学的弱点而想加以改进,即在欧拉流体运动方程中加上摩擦力项。纳维(C. L. M. H. Navier, 1785~1836)、柯西(A. L. Cauchy, 1789~1857)、泊松(S. D. Poisson, 1781~1840)、圣维南(A. J. C. B. de Saint-Venant, 1797~1886)和斯托克斯(G. G. Stokes, 1819~1903)都以不同的完善程度实现了这一点,而斯托克斯首先采用第一黏性系数 μ , 最后完成了这一工作。现在把这样的黏性流体力学的基本方程称为纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程,简称N-S方程。

纳维-斯托克斯方程的建立使人们对黏性流体流动问题的分析成为可能。但是用分析方法求解N-S方程非常困难,迄今为止大约也只求出了70个特解。当时的水力学工作者看不出斯托克斯工作的巨大意义,因为纳维-斯托克斯方程并未导出有实际意义的结果。

1904 年普朗特(L. Prandtl, 1875~1953) 在海德堡(Heidelberg)举行的第三届国际数学会议上发表的“摩擦极小的流体流动”这篇关于边界层理论的简短论文^[1]完全改变了上述情况。普朗特以他特有的才能以及对问题的透彻理解,对 N-S 方程进行了合理的、大幅度的简化。根据普朗特的观点,当黏性较小的流体绕流固体时,可将流体分为两个区域。一是在物体邻近存在非常薄的一层,称为附面层,现在称之为边界层,在边界层内黏性起主要的作用;另一区域则是边界层外的其余部分,在这个区域中黏性可以忽略,即可按理想流体来处理该区域的流动。普朗特深刻地阐明了在估计阻力时流体黏性的重要性,开辟了黏性流体流动的理论分析方法。普朗特的理论在数学上进行了很大的简化,又得出了与实际相符的结果,解决了过去不能计算流动阻力的问题。

普朗特的边界层理论把流体力学的两个分支统一起来,使理论与实际达到高度的结合。边界层理论在流体力学的历史上开创了新纪元,对理解黏性流体流动及 20 世纪流体力学的顺利发展开辟了广阔的道路。边界层理论现在已经广泛应用于航空、航天、航海、叶轮机械、化学工程以及气象学、环境科学及能源科学等方面,并且在应用中不断地得到充实和提高。

1.1.2 相似研究方法

1908 年,普朗特的学生布拉修斯(H. Blasius)^[2]利用相似变换技巧,对不可压缩均匀流体沿零攻角绕流半无限大平板时的边界层情况,推导出了著名的布拉修斯边界层方程

$$\begin{aligned} f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) &= 0, \\ f(0) = f'(0) &= 0, \quad f'(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

并利用级数展开求出了一些级数解。后来,贝司托(L. Bairstow)^[3]和哥德斯坦(S. Goldstein)^[4]分别研究了布拉修斯边界层方程并改进了布拉修斯的结果。数学家托普弗(C. Töpfer)^[5]和何尔斯(L. Howarth)^[6]利用龙格-库塔(Runge-Kutta)方法计算了布拉修斯方程的数值解。魏尔(H. Weyl)^[7]利用函数论技巧研究了布拉修斯边界层方程解的存在性和惟一性问题。

布拉修斯边界层方程虽然形式简单,但它能够清楚地揭示问题的本质,便于人们对边界层问题进行理论上的分析和数学上的研究,因此多年来一直引起人们的极大兴趣。

1968 年,Callegari 和 Friedman^[8]利用相似变换和 Crocco 变量变换技巧^[9],将经典的布拉修斯边界层方程转化成一个二阶常微分方程奇异非线性两点边界值问题

$$\begin{aligned} g(z)g''(z) + z &= 0, \quad 0 < z < 1 \\ g(0) &= 0, \quad g(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

利用函数论技巧,确立了边界值问题正解的存在性,惟一性和解析性。

1978年,Callegari和Nachman^[10]研究了流体中半无限大平板和均匀来流存在同方向运动时平板表面处的边界层情况,对伴随弱扩展及激波的流动以及流体在运动的传送带上的流动所形成的边界层问题,通过边界条件标准化,得到了边界值问题解的惟一性和解析性。

抽吸/喷注对边界层流体的结构和流动有很大的影响,对于增加/减少拖拽力以及控制边界层的分离具有重要意义,因此流体绕流多孔介质物体表面时的情况受到人们的特别关注^[11~12]。Kassoy(1971)^[13],Klemp和Acrivos(1972)^[14]利用数值方法研究了抽吸/喷注对边界层流动的影响。最近Vajravelu、Soewono和Mohapatra(1991)^[15]从理论上研究了平板边界层受到抽吸/喷注影响时的情况,利用相似变换、Crocco变量变换和新发展的打靶法技巧证明了边界层问题解的存在性、惟一性和解析性,并分析了速度比参数及抽吸/喷注参数对解的影响。特别是针对抽吸及喷注两种不同情况,给出了表面摩擦(壁摩擦)系数的估计式及近似计算公式,并利用龙格-库塔法和打靶法技巧对不同参数给出了相应的表面摩擦(壁摩擦)系数的数值解。

边界层研究近期进展中的另一个重要方面是边界层分离流。在当今计算机技术飞速发展的时代,一些包括分离流在内的复杂流场已经可以直接用N-S方程进行计算。但是,这种大型计算毕竟还只是一种数值实验,在实际应用中除了那些物理模型已经清楚、计算方法已经成熟的问题外,还不能单靠大型计算来解决实际问题。有些流动问题或者因为物理模型有待研究,或者因为流场结构还不清楚,就需要借助一般计算方法、实验手段及理论分析进行研究。

分离流是流体力学中一个古老的难题,出现在许多流动中,对物体所受流体的作用力有重要影响。如对钝体绕流来说,分离点位置可以影响物体的压阻。飞机失速的主要缘由就是分离流引起的。其他如内部流象喷管、扩压器等器件往往因为出现分离流以致引起流场急剧变化而影响这些器件的使用效果。国内外对分离流的研究一直非常活跃。

分离流有两种性质不完全一样的情况。当物体表面附近压力沿流向增加而存在流体逆压力梯度时,边界层内流体的动量为克服压力和摩擦影响而渐渐损耗,在某一点上流体层从物面发生压缩性的分离。在分离点下游形成一个回流区,原边界层绕过回流区在再附点又回到物面上来。也有因为物体表面几何形状突然变化,如后向台阶或底部附近产生膨胀性的分离流。压缩分离和膨胀的流场都有包括回流的分离区与再附区。另外一种分离流动是当飞行器在大攻角下飞行时物体背风面或机翼前缘产生脱离涡,或某些钝体如圆柱、圆球这样形状的物体绕流的脱体涡流动。我们要讨论的是前一种有分离和再附的分离流动,并且是能用边界层方法进行处理,即着重讨论的是边界层分离流。

Klemp 和 Acrivos^[16~17]首先研究了二维平板逆来流方向运动时的边界层数值计算问题。发现当用传统的数值方法计算边界层问题时,解非常不稳定而导致计算失败。其原因在于由于平板和流体存在相向运动,在靠近平板邻近处流体出现回流而造成边界层分离,边界层方程在分离点处出现奇点。在不考虑抽吸及喷注的情况下,在除去奇点的邻近处,Klemp 和 Acrivos 为逆流运动平板边界层问题的数值计算提供了一种新的数值方法,从数值上证明了边界层问题存在分歧解。

Hussaini 和 Lakin^[18]从理论分析的角度证明,当且仅当速度比例参数 ξ 不超过某一个确定的临界值 ξ^* ,即 $0 < \xi \leq \xi^*$ 时,边界层问题才有解并且当 $0 < \xi < \xi^*$ 时其解是不惟一的,而当速度比率参数大于临界值 ξ^* 时边界层问题无解。对满足 $0 < \xi < \xi^*$ 的不同参数值,就壁摩擦因数和速度比参数之间的关系给出了数值结果,并进一步指出边界层问题存在分歧解这一特性与壁摩擦的多重值有关。后来,Hussaini、Lakin 和 Nachman^[19]研究了这种情况下解的解析性问题。

Soewono、Vajravelu 和 Mohapatra^[20]研究了上述边界层问题受到抽吸/喷注影响时的情况,利用相似变换、Crocco 变量变换和一种新发展的打靶技巧确立了边界层问题相似解的存在性,非惟一性和解析性的充分条件,并分析了各参数对解的影响。但遗憾的是受研究中所采用的方法和技巧的限制,理论结果中增加了对解的要求和对参数的限制。同时,研究工作还给出了数值结果,也证明了分歧解的存在。

1.1.3 非牛顿流体流动

1.1.3.1 非牛顿流体理论的发展

虽然水和空气等流体符合牛顿内摩擦定律,但也有许多流体不满足关系式(1.1.1),或者说应力和应变速度之间存在着非线性关系,一般称这样的流体为非牛顿流体。

非牛顿流体在自然界和工程技术中是非常普遍的,典型的非牛顿流体是高分子熔体和高分子溶液。在过去 30 年中,高分子工业的迅速发展,引起了科学家们对研究高分子材料的兴趣,并从数学和力学的角度研究了上述特殊流体的力学性能,推动了这门学科的更快发展。在化学工业中的各类泥浆和悬浮液、油漆、涂料、颜料等,均属非牛顿流体。在现代流体力学的新分支中,生物流体力学占有重要位置。生物流体,例如人体内和各类动物体内的血液、关节腔内的滑液、淋巴液、细胞液、脑脊液、支气管内分泌液等,都具有非牛顿流体的性质。科学家们认为,地球中心炽热的岩浆可以作为非牛顿流体处理。实验证明,我国的高蜡原油及黄河的高含沙水流也具有非牛顿流性质。严格地讲,空气和水也可以看作非牛顿流体的一种特殊情形,即非牛顿流体效应趋向于无限小的情形。当气体的分子平均自