21世纪大学课程辅导丛书

概率统计

辅导与典型题解析

吴云江 编著

西安交通大学出版社

21 世纪大学课程辅导丛书

概率统计
辅导与典型题解析

吴云江　编著

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书按工学、医学、经济学各专业的本科教学和硕士研究生入学考试的大纲，精选了一批有代表性的和可开拓思路的概率统计题目(也包括基本训练的题目)，每题除详尽的解答外，全部配有注释(对题目的说明，解题易犯的错误等)，相当于与读者的“交谈”。各章有精练的基本知识提要(便于读者查阅)和自测练习题。本书可供考研和本、专科学习概率统计的学生做解题训练和学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导与典型题解析 / 吴云江编著 .—西安：
西安交通大学出版社，2002.12
(21 世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1626-2

Ⅰ.概 ... Ⅱ.吴 ... Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 097244 号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路 25 号 邮政编码:710049 电话:(029)2668315)
西安东江印务有限公司印装
各地新华书店经销

*

开本：787 mm×1 092 mm 1/16 印张：10 字数：241 千字
2002 年 12 月第 1 版 2003 年 1 月第 1 次印刷
印数:0 001～5 000 定价：13.00 元

发行科电话:(029)2668357,2667874

前　　言

做完一道题后,请选择:

(a)接着做下一道题或休息一会儿;

(b)仔细体会一下:刚才这道题用到什么知识?有哪些应注意、容易出错的地方?刚开始为什么我没做出来(如果是这样的话)?还有什么薄弱环节或以前疏忽的地方需要加强巩固?

此选择当然无标准答案,选(a)看似效率高,但我更主张选(b),因为这些时间的花费是有价值的,不算“浪费”.做过的题如果很快就丢于脑后,那才是“浪费”时间呢.

本书按概率统计的章节,精选了一批典型题目.其中有考研试题、教育部考试中心推荐的样本题,以及在各类考研补习班中选用过的一些题,参考MBA入学考试、自学考试以及理科概率统计题目(按工学、经济管理类的要求范围选用),包括有一定特点、一定难度的题,也包括最基本的训练题和一些内容相近但有区别、易于混淆的题,对解法思路相同或相近的题一般不重复选,过于容易的“送分”题也尽量少选.各章有基本要求、基本内容提要和难点重点,帮助同学复习基本知识.每题后有注释,注明解题的关键处、学生易犯的错误或关于此题的一些说明,对做题后愿意多思考(即前边选择(b))的读者,相信有所帮助.

本书数理统计采用“下侧”分位数,注意与上侧分位数的地方相区别.

由于水平所限,本书难免会有不足之处,欢迎广大读者批评指正.

编者

2002年10月

目　录

第1章　随机事件与概率

1.1　基本要求

1. 了解随机事件的定义和基本的关系、运算.
2. 知道概率空间和概率的公理化定义、统计学定义.
3. 理解、掌握概率的性质.
4. 会计算古典概率和几何概率.
5. 理解条件概率,掌握乘法公式、全概率公式和Bayes(贝叶斯)公式.
6. 理解事件的独立性的定义,掌握独立性的应用和贝努里概型.

1.2　基本内容提要

1. 随机事件(可简称"事件")是指在一次试验中可能发生也可能不发生的事件,如抛硬币一次——(随机)试验,而"出现正面"——(随机)事件.试验中必然发生的事件(称为"必然事件",记为Ω)和不可能发生的事件(称为"不可能事件",记为$\varnothing$)可以看成特殊的随机事件.

2. 若事件A发生必导致事件B发生,称B包含A,记作$A \subset B$.

若事件A、B至少一个发生(即A或B发生),称A并B发生,记作$A \cup B$(有的书上记成$A+B$).

若事件A、B都发生,称A交B发生,记作$A \cap B$或AB.

若事件A发生而B不发生,称A减B发生,记作$A-B$(这种事件称为差事件).

若事件A不发生,称A的对立事件(或称补事件)发生,记作$\bar{A}$.

若事件A、B有关系:$AB=\varnothing$(即不可能同时发生),称A与B互不相容(有时称为互斥).

若事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n$满足:(1)$\forall i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j$时,有$A_iA_j=\varnothing$(即$A_1,\cdots,A_n$中任意两个不相容);(2)$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.则称事件组$A_1,\cdots,A_n$为互不相容完备事件组.

3. 事件的并、交运算具有我们熟悉的交换律、结合律和相互间的分配律.如$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$表示$A_1,A_2,\cdots,A_n$这$n$个事件至少发生一个,而$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1A_2\cdots A_n$表示它们都发生.

常见的运算式有:$A\bar{B}=A-B=A-AB$及$\overline{\bigcup\limits_i A_i}=\bigcap\limits_i\bar{A}_i$,$\overline{\bigcap\limits_i A_i}=\bigcup\limits_i\bar{A}_i$(此为对偶律,又称为德·摩根原则.记忆口诀:长杠变短杠,开口换方向)

其他的关系和运算较简单,不再详细列举,如:①如果$A\subset B$,则$\bar{A}\supset\bar{B}$,$AB=A$,$A\cup B=B$;②若$AB=\varnothing$,则$(AC)(BD)=\varnothing$;③$AB\subset A\subset(A\cup B)$;④$A\subset\Omega$,$\varnothing\subset A$;⑤$\bar{\Omega}=\varnothing$,$\bar{\varnothing}=\Omega$等等.

4. Ω 可称为样本空间，Ω 中所含的元素可称作样本点. 重复大量试验时，某一事件 A 所发生的频率有一个“稳定值”，这个稳定值即是 A 的概率，记作 $P(A)$. 这是概率的统计学定义.

5. 概率的性质：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；(可见概率是一个数)

(2) $P(\Omega) = 1, P(\varnothing) = 0$；(注意其逆非真，如 $P(A) = 0$ 不能推出 $A = \varnothing$)

(3) 若 $AB = \varnothing$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$；(此结论可推广到任意多个，如 $A_1, \cdots, A_n$ 两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$)

(另注：$P(A) \geqslant 0$ 称“非负性”；$P(\Omega) = 1$ 称“规范性”；若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两不相容，则 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ 称“可列可加性”，这三条是概率的公理化定义)

(4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

(5) 若 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.(这种 $B - A$ 称“真差”)同时有 $P(A) \leqslant P(B)$.

(6) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.(此性质可推广到 n 个，即 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2\cdots A_n)$.)

6. 已知事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率称为条件概率，记作 $P(B|A)$，$(P(A) > 0)$. $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

乘法公式：$P(AB) = P(A)P(B|A)$.

全概率公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

Bayes 公式：设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为互不相容完备事件组，则

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

7. 古典概率：$P(A) = \dfrac{k}{n}$，其中 n 为基本结果的总个数(即 Ω 中所含的“样本点”——可理解为基本结果——的个数)，k 为事件 A 所含的样本点的个数.

几何概率：$P(A) = \dfrac{A \text{ 的测度}}{\Omega \text{ 的测度}}$. 测度在此处可理解为：一维时指长度，二维时指面积，三维时指体积.

8. 抽签原理：在抽签模型中(随机、依次、不放回)，抽到某签的概率与先后次序无关.

9. 若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立，实际意义为 A 与 B 互不影响，这里 $\bar{A}$ 与 B 也独立.

对三个事件 A、B、C 而言，若 $P(AB) = P(A)P(B)$，$P(AC) = P(A)P(C)$，$P(BC) = P(B)P(C)$，$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 都成立，则称 A、B、C 相互独立(只有前三个式子成立时称“两两独立”). 可类推到 n 个事件的相互独立的定义上.

10. 贝努利概型：做 n 次独立重复试验，每次只有两个结果：A 与 $\bar{A}$，每次试验中 A 发生的

概率均为 p,则这 n 次试验中 A 共发生 k 次的概率为:$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

1.3 重点与难点

1. 利用概率的第(4)、(5)、(6)条性质进行概率的基本运算(这类题常出成填空题).

2. 根据题目所给的背景,将有关的事件用字母表示,然后用乘法公式、全概率公式、Bayes 公式计算相应的概率.

3. 利用题目背景所给的独立性计算概率,判断是否属贝努利概型并计算概率.

1.4 典型题解析

1-1 设 A、B、C 为事件,试用 A、B、C 的运算来表示下列事件:(1)仅 A 发生;(2)A、B、C 都发生;(3)A、B、C 都不发生;(4)A、B、C 至少一个发生;(5)A、B、C 恰好一个发生;(6)A 不发生,而 B、C 至少一个发生;(7)A、B、C 中不多于一个发生;(8)A、B、C 中至少两个发生;(9)A、B、C 中不多于两个发生;(10)A、B、C 中恰有两个发生.

解

(1) 仅 A 发生:$A\bar{B}\bar{C}$(或 $A-B-C$)

(2)A、B、C 都发生:ABC

(3)A、B、C 都不发生:$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(4)A、B、C 至少一个发生:$A \cup B \cup C$

(5)A、B、C 恰好一个发生:$A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

(6)A 不发生,而 B、C 至少一个发生:$\bar{A}(B \cup C)$

(7)A、B、C 中不多于一个发生:$\overline{AB \cup AC \cup BC}$

(或表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$)

(8)A、B、C 中至少两个发生:$AB \cup AC \cup BC$(或表示为:$AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup ABC$)

(9)A、B、C 中不多于两个发生:$\overline{ABC}$(或表示为 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$,也可表示为:$\bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$,说法还可以是“$A$、$B$、$C$ 不都发生”,请与(3)区别)

(10)A、B、C 中恰有两个发生:$AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$

注释 事件描述时要盯清每一个字,有时差一个字意思会相差相大. 如(1)改为“A 发生”,则应表示为:A 即可,而多一“仅”字,意思差别很大.

1-2 (选择)电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电. 以 E 表示“电炉断电”,而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值,则 $E=(\quad)$.

(a) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$ (b) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$ (c) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$ (d) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

解 应选(c). 它们之间的关系是

$\{T_{(1)} \geqslant t_0\} \supset \{T_{(2)} \geqslant t_0\} \supset \{T_{(3)} \geqslant t_0\} = E \supset \{T_{(4)} \geqslant t_0\}$

注释 事件间的相等如"$A = B$"要求"$A \subset B$"且"$A \supset B$",对有实际背景的题目一定要注意验证两个式子都成立.

1-3 (填空)设 A、B 为二事件,则 $P\{(A \cup B)(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})\} =$ ____.

解 应填 0.因为:

$$(A \cup B)(A \cup \bar{B})(\bar{A} \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) = (A \cup A\bar{B} \cup AB \cup B\bar{B})(\bar{A} \cup \bar{A}\bar{B} \cup \bar{A}B \cup B\bar{B})$$
$$= A\bar{A} = \varnothing$$

注释 事件间的"并"、"交"运算具有交换、结合、分配律,因此运算可以像多项式相乘一样(像$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$一样),这种题目不难,要熟练,做题不能太慢.

1-4 对事件 A、B,已知 $P(\bar{A} \cup B) = 0.75$,$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0.8$,$P(B) = 0.3$,求 $P(A)$,$P(AB)$,$P(\bar{A}\bar{B})$,$P(A-B)$,$P(B-A)$,$P(A \cup \bar{B})$.

解 $0.8 = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(AB)$,所以 $P(AB) = 0.2$

$$0.75 = P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(\overline{\bar{A} \cup B}) = 1 - P(A\bar{B}) = 1 - P(A - B)$$
$$= 1 - [P(A) - P(AB)]$$

所以 $P(A) = 1 - 0.75 + P(AB) = 0.25 + 0.2 = 0.45$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\overline{\bar{A}\bar{B}}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$$
$$= 1 - (0.45 + 0.3 - 0.2) = 0.45$$
$$P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.45 - 0.2 = 0.25$$
$$P(B - A) = P(B) - P(AB) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$
$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\overline{A \cup \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A}B) = 1 - P(B - A) = 1 - 0.1 = 0.9$$

注释 这是一类较常见的基本题.(1)$P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(AB)$ 应熟悉(注意概率的性质(5)),切勿 $P(A - B) = P(A) - P(B)$!(2)对两个事件 A、B 的求概率题目,建议思路为:想法先求出 $P(A)$、$P(B)$ 和 $P(AB)$ 这三个基本量.

1-5 已知 $P(\bar{B}|A) = \frac{1}{3}$,$P(B|\bar{A}) = \frac{4}{7}$,$P(AB) = \frac{1}{5}$,求 $P(A)$、$P(B)$.

解 $\frac{1}{3} = P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(A)}$

所以 $P(A) = 3P(A) - 3P(AB) = 3P(A) - \frac{3}{5}$,故 $P(A) = \frac{3}{10}$.

$$\frac{4}{7} = P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - \frac{1}{5}}{1 - \frac{3}{10}},\text{得 } P(B) = \frac{3}{5}.$$

注释 参见 1-4 题的注释.此题当然也可求诸如 $P(\bar{A}\bar{B})$、$P(A \cup \bar{B})$ 等.

1-6 (填空)对事件 A、B、C,已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,$P(AB) = 0$,$P(AC)$

$= P(BC) = \frac{1}{16}$,则 A、B、C 都不发生的概率为____.

解 应填$\frac{3}{8}$.

因为 $ABC \subset AB$,所以 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0$,故 $P(ABC) = 0$.

故
$$\begin{aligned} P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) &= 1 - P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}) = 1 - P(A \cup B \cup C) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)] \\ &= 1 - [\frac{1}{4} \times 3 - 0 - \frac{1}{16} \times 2 + 0] = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

注释 (1)"A、B、C 都不发生"用"$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$"表示(请区分"$A$、$B$、$C$ 不都发生"表示为"$\overline{ABC}$"),注意理解.(2)本题中 $P(ABC) = 0$ 的证法用的概率性质(5),不要这样推:"因为 $P(AB) = 0$,所以 $AB = \varnothing$,所以 $ABC = \varnothing$,…"不可!因为得不到 $AB = \varnothing$ 的结论.

1-7 (填空)设三事件 A、B、C 两两独立,且 $P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$,

$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$,$ABC = \varnothing$,则 $P(A) =$ ____.

解 应填$\frac{1}{4}$.

由已知,$P(AB) = P(A)P(B)$,$P(AC) = P(A)P(C)$,$P(BC) = P(B)P(C)$,

若设 $P(A) = x$,得

$$\begin{aligned} \frac{9}{16} &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= 3P(A) - P(A)P(B) - P(A)P(C) - P(B)P(C) = 3x - 3x^2 \end{aligned}$$

解得 $x = \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$.(因为$\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$,舍去)故 $P(A) = \frac{1}{4}$

注释 $P(A \cup B \cup C)$ 的展开式是概率性质(6)的推广.

1-8 (选择)设事件 A、B 同时发生时,事件 C 必发生,则( ).

(a) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$ (b) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$

(c) $P(C) = P(AB)$ (c) $P(C) = P(A \cup B)$

解 应选(b).

由题意知 $AB \subset C$,所以 $P(AB) \leqslant P(C)$,故有

$$1 \geqslant P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - P(C)$$

得 $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$,即选(b).

注释 对题目给的条件勿理解成"$AB = C$".本题结论还可推广到多个如 $P(ABC) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2$.

1-9 (填空)对二事件 A、B,已知 $P(A) = 0.6$,$P(B) = 0.7$,那么 $P(AB)$ 可能取到的

最大值是____；可能取的最小值是____；$P(A\cup B)$ 可能取的最大值是____；可能取的最小值是____.

解　应依次填为：0.6；0.3；1；0.7.

因为 $AB\subset A$，所以 $P(AB)\leqslant P(A)$. 如果 $A\subset B$，则 $P(AB)=P(A)$，故 $P(AB)$ 可能取的最大值是 $P(A)=0.6$（实际上是 $P(A)$ 与 $P(B)$ 中较小的一个）. 又：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.6+0.7-P(AB)=1.3-(AB)$

所以　$P(AB)=1.3-P(A\cup B)\geqslant 1.3-1=0.3$

而当 $A\cup B=\Omega$ 时 $P(A\cup B)=1$，$P(AB)=0.3$ 即 $P(AB)$ 可能取的最小值为 0.3（实际上是 $P(A)+P(B)-1$ 与 0 中较大的一个）.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leqslant P(A)+P(B)$，故 $P(A\cup B)$ 可能取的最大值为 $P(A)+P(B)$ 与 1 中较小的一个，本题中填 1.

因为 $A\cup B\supset B$，所以 $P(A\cup B)\geqslant P(B)$. 若 $A\subset B$，则 $P(A\cup B)=P(B)$，故 $P(A\cup B)$ 可能取的最小值为 $P(B)=0.7$（实际上是 $P(A)$ 和 $P(B)$ 中较大的一个）.

注释　本题要考虑的是事件 A、B 间特殊的（极端的）情形，如包含、不相容（本题无法做到 A、B 不相容，因为 $P(A)+P(B)>1$，但可考虑 $A\cup B=\Omega$）等情形.

1-10　设玻璃杯整箱出售，每箱20只各箱含0、1、2只残次品的概率分别为0.8、0.1、0.1. 一顾客欲购买一箱玻璃杯，由售货员任取一箱，经顾客开箱随机查看 4 只，若无残次品，则买此箱玻璃杯，否则不买 求（1）顾客买此箱玻璃杯的概率；（2）在顾客买的此箱玻璃杯中，确实没有残次品的概率.

解　记 $B=\{$顾客买下此箱玻璃杯$\}$

$A_i=\{$售货员取的这箱玻璃杯中，恰有 i 只残次品$\}$　$i=0,1,2.$

则 A_0、A_1、A_2 互不相容且 $P(A_0)=0.8$，$P(A_1)=P(A_2)=0.1$

而　$P(B|A_0)=1$，$P(B|A_1)=\dfrac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{4}{5}$，$P(B|A_2)=\dfrac{C_{18}^4}{C_{20}^4}=\dfrac{12}{19}$

（1）由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)=0.8\times 1+0.1\times\frac{4}{5}+0.1\times\frac{12}{19}=0.943$$

$$(2)P(A_0|B)=\frac{P(A_0B)}{P(B)}=\frac{P(B|A_0)P(A_0)}{\sum_{i=0}^{2}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{1\times 0.8}{0.943}=0.848$$

注释　此题是应用全概率公式和Bayes公式的较典型的题目. ① 用字母表述事件时，应是“一个事件”，不要这样设：$A_1=\{$顾客买的这箱玻璃杯中恰有 1 只残次品$\}$（一个字母 A_1 表述了 2 个事件 —— 一是顾客“买”这箱玻璃杯，一是“恰有 1 只残次品”—— 不妥），或设 $A=\{$售货员取 1 箱玻璃杯$\}$（非随机事件），你可以试一试你用字母表述的“事件”其对立事件是否易于准确描述，就知道你的描述是否合适了；② 第 2 问其实用的是 Bayes 公式，Bayes 公式可以用条件概率定义式、全概率公式和乘法公式推出，不必专门去记；③ 第 2 问问的是 $P(A_0|B)$，勿求

成 $P(A_0B)$ 或 $P(A_0)$，注意题意的理解；④ 解中 A_0、A_1、A_2 可视为互不相容完备事件组.

1-11 设考生的报名表来自三个地区，各有10、15、25份，其中女生表分别为3、7、5份. 现随机地取一地区的报名表，从中先后抽2份报名表. 求(1) 先抽到的是女生表的概率 p；(2) 已知后抽到的是男生表，求先抽到的是女生表的概率 q.

解 记 $A_i = \{$取的是第 i 区的报名表$\}$，$i = 1,2,3$.

$B_i = \{$从报名表中第 i 次取的是女生表$\}$，$i = 1,2$.

则 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$

$$P(B_1 \mid A_1) = \frac{3}{10},\ P(B_1 \mid A_2) = \frac{7}{15},\ P(B_1 \mid A_3) = \frac{5}{25}$$

由"抽签原理"知：$P(\bar{B}_2 \mid A_1) = \dfrac{7}{10}$，$P(\bar{B}_2 \mid A_2) = \dfrac{8}{15}$，$P(\bar{B}_2 \mid A_3) = \dfrac{20}{25}$

且有：$P(B_1\bar{B}_2 \mid A_1) = \dfrac{3\times 7}{10\times 9} = \dfrac{7}{30}$，$P(B_1\bar{B}_2 \mid A_2) = \dfrac{8\times 7}{15\times 14} = \dfrac{4}{15}$，

$$P(B_1\bar{B}_2 \mid A_3) = \frac{5\times 20}{25\times 24} = \frac{1}{6}$$

(1) 由全概率公式，得

$$p = P(B_1) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1 \mid A_i)P(A_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25}\right) = \frac{29}{90}$$

$$(2)\ q = P(B_1 \mid \bar{B}_2) = \frac{P(B_1\bar{B}_2)}{P(\bar{B}_2)}$$

而 $P(\bar{B}_2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} P(\bar{B}_2 \mid A_i)P(A_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25}\right) = \frac{61}{90}$

$$P(B_1\bar{B}_2) = \sum_{i=1}^{3} P(B_1\bar{B}_2 \mid A_i)P(A_i) = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{30} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{9}$$

故得 $q = \dfrac{2/9}{61/90} = \dfrac{20}{61}$

注释 参见1-10题注释. "抽签原理"可用在解题的过程中，如 $P(\bar{B}_2 \mid A_1)$ 的求法，否则要用 $P(\bar{B}_2 \mid A_1) = P(\bar{B}_2 \mid B_1A_1)P(B_1 \mid A_1) + P(\bar{B}_2 \mid \bar{B}_1A_1)P(\bar{B}_2 \mid A_1)$ 这种推广了的全概率公式，麻烦一些. 解中如 $P(B_1\bar{B}_2 \mid A_1) = \dfrac{3\times 7}{10\times 9}$ 的求法是用古典概率做的，当然也可用 $P(B_1\bar{B}_2 \mid A_1) = P(\bar{B}_2 \mid B_1A_1)P(B_1 \mid A_1)$ 这种推广了的乘法公式做.

1-12 若将 c、c、e、e、i、n、s 这7个字母任意排成一行，问恰排成 science 的概率.

解 所求概率为 $\dfrac{2\times 2}{7!} = \dfrac{1}{1260}$

注释 古典概率是一难点，但一般不作为重点看，要想熟练，需做较大量的习题. 本题的解题思路可以是：袋中有7只球，分别标有这7个字母，现从袋中随机、依次、不放回地一只一只地取出球，那么第1只球有7种取法，第2只球有6种取法，依此类推，全部取出则共有7!种取法，所以分母为7!. 若要构成 science 顺序，第1只球须是 s，有1种取法；第2只球须是 c，有

2 种取法(从 2 个 c 中选 1 个);第 3 只球是 i,有 1 种选法;第 4 只球是 e,有 2 种选法(2 个 e 中选 1 个);等等,后边都是 1 种选法,故共有 $2\times 2 = 4$ 种选法,此即是分子.

1-13 从 6 双不同的手套中任取 4 只,求恰有一双配对的概率.

解 所求概率为$\dfrac{C_6^1\cdot C_5^2\cdot 4}{C_{12}^4} = \dfrac{16}{33}$.

注释 分母 C_{12}^4 易于理解.分子可理解为:先从 6 双手套中任取一双(题目要求的配对).有 C_6^1 有取法;剩下要取的 2 只必分布在两双里,从剩下的 5 双中任取 2 双,有 C_5^2 种取法;设这两双是 $A-a$ 和$B-b$,然后从 $A-a$ 中任取 1 只(有 2 种取法),从 $B-b$ 中任取 1 只(也是 2 种取法),有 4 种取法.故共有 $C_6^1\cdot C_5^2\cdot 4$ 种取法(乘法原则),此即为分子.有人把分子算成 $C_6^1\cdot C_{10}^1\cdot C_8^1$,想法可能是:从 6 双中任取 1 双;从剩余的 10 只中任取 1 只,比如取的是 A(设剩余的 5 双是 $A-a$、$B-b$、$C-c$、$D-d$、$E-e$),那么最后 1 只从 $B-b$、$C-c$、$D-d$、$E-e$ 这 8 只中任取 1 只即可.这样不行,比如分子把 A、D 算过 2 次(因为可能先取 D,再取 A),但分母是只按一次进行计算的.

1-14 随机地掷甲、乙二骰子,求甲骰子出现的点数大于乙骰子出现的点数的概率 p.

解 由对称性,乙骰子出现的点数大于甲骰子出现的点数的概率也是 p.设甲、乙二骰子出现的点数相同的概率为 α,则有:$2p+\alpha = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{而}\quad \alpha &= \sum_{i=1}^{6} P(\text{甲骰子出现 } i \text{ 点,乙骰子出现 } i \text{ 点})\\
&= \sum_{i=1}^{6} P(\text{甲骰子出现 } i \text{ 点})\cdot P(\text{乙骰子出现 } i \text{ 点})\\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\text{故}\quad p = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{5}{12}$$

注释 应善用对称性,这是一种技巧.

1-15 袋中有 9 白 10 红共 19 只球,从中随机取 7 只球,记 $A = \{$取的是 3 白 4 红共 7 只球$\}$,分不放回、放回,两种情形,分别求 $P(A)$.

解 不放回情形下:

$$P(A) = \frac{C_9^3 C_{10}^4}{C_{19}^7}$$

放回情形下:

$$P(A) = C_7^3\left(\frac{9}{19}\right)^3\left(\frac{10}{19}\right)^4$$

注释 不放回的情形,可归属于"超几何分布";放回的情形为贝努利概型,可看作做 7 次独立重复试验,每次只有 2 个结果:摸出白球和摸出红球(每次都是一个一个地摸),摸出白球的概率均为$\frac{9}{19}$,套用贝努利概型即可,可归属于"二项分布".本题还可推广到多个,见下题.

1-16 (1-15题的推广)袋中有9白10红11黄共30只球,从中随机取12只球,记 $A=\{$取的12只球为3白4红5黄$\}$,分不放回、放回.在这两种情况下,分别求 $P(A)$.

解 不放回情形下:

$$P(A)=\frac{C_9^3\cdot C_{10}^4\cdot C_{11}^5}{C_{30}^{12}}$$

放回情形下:

$$P(A)=C_{12}^3\left(\frac{9}{30}\right)^3C_9^4\left(\frac{10}{30}\right)^4C_5^5\left(\frac{11}{30}\right)^5$$

注释 读者当然可以将这个问题推广到更多个或抽象多个的情形.其中在放回情况下 $C_{12}^3C_9^4C_5^5$ 可以写成$\frac{12!}{3!4!5!}$,称为分组组合问题.

1-17 在区间(0,1)内任取二数,求事件:"此二数之和小于$\frac{6}{5}$"的概率.

解 将这两个数看作 x 和 y,则 (x,y) 的所有可能取的值为 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$,即图1.1所示的正方形,其面积 $S_D=1$.而 $\{(x,y)\mid x+y<\frac{6}{5}\}$ 与 D 的交集如图1.1的阴影部分 G,其面积为

$$S_G=1-\frac{1}{2}\times 0.8^2=0.68$$

故所求概率为:$\frac{S_G}{S_D}=0.68$.

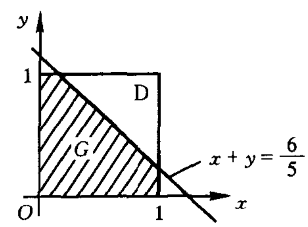

图1.1

注释 本题为几何概率题目.题中 D 可称为"样本空间",G 可称为"有利样本点的集合".几何概率的题目可以用后面的多维随机变量的均匀分布来做.

1-18 连续地、独立地掷二骰子,求二骰子"点数之和为5"出现在"点数之和为7"之前的概率.

解 记 $A_i=\{$第 i 次点数之和为5$\}$,$B_i=\{$第 i 次点数之和为7$\}$,$i=1,2,\cdots$

显然,诸 A_i,A_j,B_k,B_l(在 i,j,k,l 都不相等时)独立,且

$$P(A_i)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},\ P(B_i)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},A_iB_i=\varnothing,$$

所以 $P(\bar{A}_i\bar{B}_i)=1-P(A_i\cup B_i)=1-[P(A_i)+P(B_i)]=1-(\frac{1}{9}+\frac{1}{6})=\frac{13}{18},i=1,2,\cdots$

又记 $C_1=\{$第1次掷时点数之和为5$\}$，

$C_k=\{$前 $k-1$ 次掷时点数之和非5非7,第 k 次掷时点数之和为5$\}$, $k=2,3,\cdots$

同 $C_1,C_2,\cdots$ 两两不相容且 $C_1=A_1, C_k=(\bigcap_{i=1}^{k-1}\bar{A}_i\bar{B}_i)A_k, k=2,3,\cdots$

故 $$P(C_k)=\prod_{i=1}^{k-1}P(\bar{A}_i\bar{B}_i)P(A_k)=\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{9}, k=1,2,\cdots$$

($k=1$ 时可规定 $\prod_{i=1}^{k-1}P(\bar{A}_i\bar{B}_i)=1$,上式就包含了 $k=1$ 的情形)而所求的概率为:

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(C_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{13}{18}}=\frac{2}{5}.$$

注释　此题所求的概率是 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k)$,请理解体会.而 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty}C_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(C_k)$ 是概率性质(3)的推广(这里 $C_1,C_2,\cdots$ 两两不相容),称为"可列可加性".而 $P(A_i)$ 的计算是古典概型,二骰子点数之和为5的情形有4种:1和4点、4和1点、2和3点、3和2点,故 $P(A_i)=\frac{4}{36}$(抛二骰子所有可能的情形有 $6\times6=36$ 种).$P(B_i)$ 的计算类似.

1-19　甲、乙两人的乒乓球比赛已到10:10平局(11分制),领先2分者方为冠军.每个球甲胜的概率均为 p,且各球的胜负互无影响.求这场比赛甲获冠军的概率.

解　设 $C=\{$甲获冠军$\}$, $\alpha=P(C)$,

$A_i=\{$第 i 个球甲胜$\}$, $i=11,12,\cdots$

则 $A_{11},A_{12},\cdots$ 相互独立, $P(A_i)=p, i=11,12,\cdots$

且 $$C=A_{11}A_{12}\cup A_{11}\bar{A}_{12}C\cup\bar{A}_{11}A_{12}C$$

并有 $$P(C|A_{11}\bar{A}_{12})=P(C|\bar{A}_{11}A_{12})=\alpha$$

故 $$\begin{aligned}\alpha=P(C)&=P(A_{11}A_{12}\cup A_{11}\bar{A}_{12}C\cup\bar{A}_{11}A_{12}C)\\&=P(A_{11}A_{12})+P(A_{11}\bar{A}_{12}C)+P(\bar{A}_{11}A_{12}C)\\&=P(A_{11})P(A_{12})+P(C|A_{11}\bar{A}_{12})P(A_{11})P(\bar{A}_{12})+P(C|\bar{A}_{11}A_{12})P(\bar{A}_{11})P(A_{12})\\&=p\cdot p+\alpha\cdot p\cdot(1-p)+\alpha\cdot(1-p)\cdot p=p^2+2\alpha p(1-p)\end{aligned}$$

解得 $$\alpha=\frac{p^2}{1-2p(1-p)}.$$

注释　此题若想把"甲获冠军"的所有情形都列举出来是不行的,因为有无穷多种情形.若出现11:11的情形,相当于重新开始(与10:10一样),是本题解法的主要思路技巧.此类题还可推广下去,如甲、乙、丙三人比分相同,甲、乙先比赛,胜1分者与丙比赛,依此下去,连胜2分者为冠军,有兴趣的读者可试求甲、乙、丙各人得冠军的概率.

1-20　现有 n 个小球和 n 个盒子,均编号 $1,2,\cdots,n$.将这 n 个小球随机地投入这 n 个盒子中,每盒1球,求至少有一个小球与所投盒的号码相同的概率.

解　记 $A_i=\{i$ 号小球投入到 i 号盒中$\}$, $i=1,2,\cdots,n$.

则 $P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n;$

$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)},\quad 1\leqslant i<j\leqslant n;$

$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)(n-2)},\quad 1\leqslant i<j<k\leqslant n;$

$\cdots,P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}.$

所求概率为

$$\begin{aligned}P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)&=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{n(n-1)}+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\&=n\cdot\frac{1}{n}-C_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}+C_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\&=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}\end{aligned}$$

注释 此题有一定难度(称为“配对”问题),题目问的虽然有“至少”一词,但却难以用其对立事件来做.本题解中的 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,既无独立性,也非不相容,而 $P(A_i)$、$P(A_iA_j)$ 的计算属古典概率,可用 $P(A_1)$、$P(A_1A_2)$ 来考虑.

1-21 在一次考试中,某班学生数学的及格率是0.7,外语的及格率是0.8,且这两门课学生及格与否相互独立.现从该班中任取一名学生,求该生的数学、外语两门课中只有一门及格的概率.

解 记 $A=\{$该学生数学及格$\}$,$B=\{$该学生外语及格$\}$.

由题意,A 与 B 相互独立,且 $P(A)=0.7,P(B)=0.8$

所求概率为:

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)&=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)\\&=0.7\times0.2+0.3\times0.8=0.38\end{aligned}$$

注释 题中 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 不相容,而 A 与 $\bar{B}$ 独立,$\bar{A}$ 与 B 独立,注意理解其区别,不要相混.所求的是“只有一门课及格”的概率,勿写成 $P(A\cup B)$.(“$A\cup B$”是“至少一门课及格”)

1-22 (1) 设 $P(A)=0$,证有 A 与任一事件 C 独立;

(2) 设 $P(B)=1$,证明 B 与任一事件 C 独立.

证 (1) 因为 $AC\subset A$,所以 $0\leqslant P(AC)\leqslant P(A)=0$

得 $P(AC)=0$

而 $P(A)P(C)=0\times P(C)=0$

故 $P(AC)=P(A)P(C)$,即 A 与 C 独立.