全国高等教育自学考试

凌明娟 主编

高等数学(一)学习辅导

(第三版)

GAODENGSHUXUE XUEXIFUDAO

同济大学出版社

全国高等教育自学考试

高等数学(一)学习辅导

(第三版)

凌明娟　主编

同济大学出版社

内容提要

本书根据修订后的“高等数学(一)自学考试大纲”,在第二版的基础上重新编写而成,主要内容包括函数及其图形、极限和连续、一元函数的导数和微分、中值定理和导数的应用、一元函数积分学和二元函数微积分等6章. 每章由基本要求、主要内容简述和典型例题、练习题及历年试题四部分构成. 第三版对原版内容作了较大修改,特别是针对近年来的命题思路,补充了大量的例题,以便于帮助读者更好地完成该课程的学习. 书末录入了2002(上、下)全国高等教育自学考试“高等数学(一)试卷”和“高等数学(一)参考样卷”,并附有答案和提示.

本书可作为经济管理人员和专升本的考生自学用书,也可供数学教师教学参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)学习辅导(第三版)/凌明娟主编.—上海:同济大学出版社,2003.6

全国高等教育自学考试

ISBN 7-5608-1469-7

Ⅰ.高… Ⅱ.凌… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试—自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第23384号

高等数学(一)学习辅导(第三版)

凌明娟 主编

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐 栩 封面设计 李志云

出版发行	同济大学出版社
	(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)
经　销	全国各地新华书店
印　刷	江苏启东印刷厂印刷
开　本	787mm×960mm 1/16
印　张	21.25
字　数	425000
印　数	1—6000
版　次	2003年7月第3版　　2003年7月第1次印刷
书　号	ISBN 7-5608-1469-7/O·140
定　价	25.00元

第三版前言

本书根据修订后的“高等数学(一)自学考试大纲”,在第二版的基础上重新编写而成．主要内容有函数及其图形、极限和连续、一元函数的导数和微分、中值定理和导数的应用、一元函数积分学、二元函数微积分．编者力求保留原版的风格,紧扣修订后的自学考试大纲,针对自学考试考生的特点,结合典型例子,强化基本概念、定理、公式和法则,突出重点和难点,引导学生注意基本理论的学习,重视基本的计算方法和计算技巧的讲解,帮助考生真正达到考核的要求,叙述深入浅出、循序渐进;解题思路清晰,指导性强．每章由基本要求、主要内容简述和典型例题、练习题及历年自学考试试题四个部分构成．书末录入 2002 年全国高等教育自学考试“高等数学(一)”试卷和“高等数学(一)”参考样卷,习题与试题都配有答案与提示,便于自学考生复习使用,提高学习效率．

本书由凌明娟、张震峰、魏枫编写,凌明娟任主编．

编者

2003 年 3 月

注:根据最新自学考试大纲,无穷级数已不作要求,故本书第三版已作删除,但考试操作上尚有一个过渡过程．如自学考生需要了解相关内容,可以查阅本书的第二版或其他微积分教材．

再版前言

本书自 1995 年出版以来，深受广大读者的厚爱，受到报考自学考试的考生和辅导老师的普遍欢迎，到目前为止已重印两次，达两万余册，并已销售一空。这是对我们工作的肯定和鼓励，对于我们来说，也是一种鞭策，促使我们对它进一步充实、修改、完善，以便及时反映自学考试试题的最新信息，更好地适应和满足自学考试复习辅导的需要．

第二版在保持第一版特色的基础上主要作了如下修改：

(1) 第二章到第六章配置了一套练习题，以方便学习辅导时使用；

(2) 调换和增加了若干例题；

(3) 按章和题型编目的“历年试题”中充实了 1995 年上半年到 1997 年上半年的有关试题(附答案及部分试题题解)；

(4) 录入了 1997 年上、下半年的最新试题和答案，供学生模拟考试时应用；

(5) 为了适应数学与国际接轨，三角函数中的正切符号 tg 用 tan 表示，余切符号 ctg 用 cot 表示；相应的反正切与反余切改用 arctan 与 arccot 表示；

(6) 历年考试中从未考到的内容用“＊”号表示．

在修改本书的过程，王雅芬、朱快蕾、张福宝、魏枫、晓薇等老师也参加了编写工作．

编者

1997 年 11 月

前　言

本书根据“高等数学(一)自学考试大纲”和全国高等教育自学考试委员会高等数学题库建设研究组编写的“高等数学考核目标”,结合编者从事自学考试辅导的体会,针对自学考试考生的特点编写而成．本书力求紧扣大纲,深入浅出,内容简明,重点突出,解题思路清晰,每章配有自测题和历年自学考试按章编辑的试题,书末附有答案和提示,便于学生自学和社会助学以适应考试的要求．

本书按大纲分为八章,每章包括下述四部分:

一、基本要求

二、主要内容简述和典型例题

三、自我检查题

四、历年自学考试试题(附部分试题题解)

本书由上海财经大学基础部副教授凌明娟主编,李炳钊、方能文、张震峰、丁家声、杨勇等同志也参加了部分章节的编写,并得到了吴立煦教授的具体帮助和指导．

在本书编写过程中,作者得到了同济大学出版社的热情支持,也得到了上海市自学考试办公室、上海财经大学自学考试办公室有关同志和上海市电子信息应用教育中心、广博财贸进修学院、凌云财贸进修学校等自学考试辅导点的支持和帮助,并征求了部分自学考试辅导老师和学员的意见,在此向有关人员表示衷心感谢．

限于编者水平,成书仓促,缺点和错误在所难免,欢迎读者批评指正．

编者

1995 年 3 月

目　录

第一章　函数及其图形

一、基本要求

(1) 理解并领会一元函数的定义及函数与图形之间的关系，掌握函数定义中的两个要素——定义域和对应法则，知道什么叫函数的值域，会求函数的定义域.

(2) 了解并识记函数的三种常用表示法——**解析法**、**表格法**、**图像法**，清楚分段函数的概念.

(3) 理解并能简单应用函数的几种基本特性——**有界性**、**单调性**、**奇偶性**、**周期性**.

(4) 掌握并领会函数的反函数及其图形之间的关系，会求比较简单的函数的反函数，知道函数的**定义域**、**值域**与其反函数的**定义域**、**值域**之间的关系.

(5) 掌握函数的复合和分解，清楚函数的复合运算的含义，会求简单的复合函数的定义域，并能把一个函数分解成简单函数的复合.

(6) 熟练掌握基本初等函数及其图形的性态，熟记反三角函数的主值范围，知道什么叫初等函数.

(7) 了解几种常见的经济函数，对于比较简单的实际问题能建立函数关系.

二、主要内容简述和典型例题

(一) 预备知识

1. 集合的概念

(1) 基本概念

集合　具有某种属性的对象的全体称为集合，可用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

元素　构成集合的对象称为元素，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\overline{\in} A$，读作 a 不属于 A.

(2) 集合的表示法

列举法　将集合中的元素不重复、不遗漏、不计次序列出，写在花括号{　}内，这种表示集合的方法叫做列举法.

例如　小于 6 的自然数的集合为$\{1,2,3,4,5\}$；

$\{1,2,3\}$，$\{3,2,1\}$都表示由 1，2，3 三个元素组成的同一个集合．

注意　$\{a\}$与 a 不同，a 是元素，$\{a\}$是只含有一个元素 a 的集合，两者概念不同．a 是集合$\{a\}$的元素，两者的关系是 $a\in\{a\}$．

描述法　把对于集合中元素的共同属性的描述写在花括号内．如果 x 表示集合 A 中的任意元素，而用 $p(x)$来描述 x 的性质，那么集合 A 可以表示为

$$A=\{x\mid p(x)\}$$

例如　在平面直角坐标系上，所有与原点距离等于 1 的点的集合可以表示为

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$$

方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集 A 可表示为

$$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$$

2．实数、区间、邻域和绝对值

(1) 实数与数轴

数是数学中一个重要的研究对象，在实数范围内数可归类为

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数(自然数)
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - (有限小数和无限循环小数)
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - (无限不循环小数，如$\sqrt{2}$，π，e 等)

实数轴(图 1-1)　是具有方向、原点和单位长度的有向直线．实数与数轴上的点是一一对应的．点 a 与数 a 意义相同，无需区别．

(2) 区间

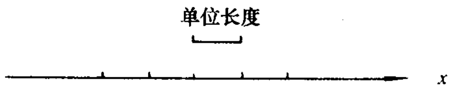

图 1-1

区间　表示介于两个实数之间的全体实数．这两个实数叫做区间的**端点**．

开区间(a,b)(图 1-2)　表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合，即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$．

闭区间$[a,b]$(图 1-3)　表示满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的全体实数 x 的集合，即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$．

半开区间$[a,b)$或$(a,b]$(图 1-4，图 1-5)　表示满足 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的全体

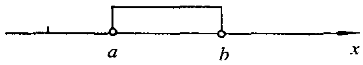

图 1-2

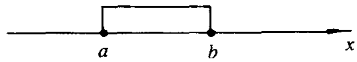

图 1-3

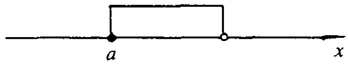

图 1-4

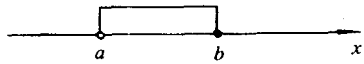

图 1-5

实数 x 的集合，即 $[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$；$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$.

无穷区间

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}=\{x \mid x>a\}$ 表示大于 a 的全体实数(图 1-6).

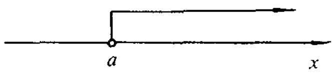

图 1-6

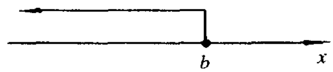

图 1-7

$(-\infty, b]=\{x \mid-\infty<x \leqslant b\}=\{x \mid x \leqslant b\}$ 表示小于、等于 b 的全体实数(图 1-7).

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid-\infty<x<+\infty\}$ 表示全体实数.

(3) 绝对值

实数 x 的**绝对值**，记作 $|x|$，定义为

$$|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

它表示 x 到原点 0 的距离. 绝对值具有以下六条性质：

① $|x|=\sqrt{x^2}$；　② $|x| \geqslant 0$；　③ $|x|=|-x|$；

④ $-|x| \leqslant x \leqslant|x|$；　⑤ $|x|-|y| \leqslant|x \pm y| \leqslant|x|+|y|$；

⑥ 如果 $a>0$，则 $|x|<a \Leftrightarrow-a<x<a$，即 $\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid-a<x<a\}$；

$|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant-a$.

例如　用区间表示满足不等式 $|x|>|x-3|$ 的 x 的集合.

则　当 $x \geqslant 3$ 时，$|x|>|x-3| \Leftrightarrow x>x-3$ 恒成立.

当 $0 \leqslant x<3$ 时，$|x|>|x-3| \Leftrightarrow x>3-x \Rightarrow x>\frac{3}{2}$，所以 $\frac{3}{2}<x<3$.

当 $x<0$ 时，$-x>3-x$，不可能.

所以，满足 $|x|>|x-3|$ 的 $x \in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

(4) 邻域

实数集合$\{x \mid |x-x_0|<\delta,\ \delta>0\}$叫做$x_0$的$\delta$**邻域**,其中$x_0$叫做邻域的**中心**,$\delta$称为邻域的半径.$x_0$的$\delta$邻域在数轴上常以开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$表示.如图1-8所示.

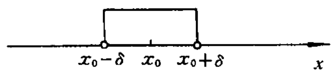

图1-8

实数集合$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta, \delta>0\}$叫做$x_0$的**去心邻域**.它表示将$x_0$的$\delta$领域去掉中心$x_0$点以后所得到的一个集合.

例如 $|x-2|<1$,表示以$x_0=2$为中心,1为半径的邻域,也就是开区间(1,3).

3. 充分条件、必要条件、充要条件与无关条件

若命题A成立能推得命题B成立,用$A \Rightarrow B$表示,则称A是B的**充分条件**;B是A的**必要条件**.

若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$,即$A \Leftrightarrow B$,则A与B互为**充分必要条件**.

若$A \nRightarrow B$且$B \nRightarrow A$,则A与B互为**无关条件**.

以上四个概念在后面各章的定理、性质中经常用到,必须正确认识.

(二)一元函数

1. 函数的定义

两个变量x,y,如果变量x在某变化范围D内任取一个数值时,变量y按一定的规律有唯一确定的值与它对应,则称y是x的**一元函数**.记作$y=f(x)$.变量x称为**自变量**,自变量允许取值范围称为**定义域**,记作D_f.变量y称为**因变量**,y的取值范围称为函数的**值域**,记作Z_f.即$Z_f=\{y \mid y=f(x), x \in D_f\}$.函数与变量的记号无关,如果定义域相同,则$y_1=f(x)$与$y_2=f(t)$表示同一函数.

2. 函数定义中的两个要素

(1) 定义域及其求法

① 应用题中函数的定义域由变量的实际意义而定;

② 用解析式表示的函数,其定义域应使该解析式在实数范围内有意义.

例1 求下列函数的定义域,并用区间表示.

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{\ln(2x-3)}{2x^2-3x-2}$;　　(2) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{1}{\lg|x-2|}$.

分析 (1) 要使函数有意义,必须而且只须偶次根式中被开方数$9-x^2 \geqslant 0$,对数函数中真数$2x-3>0$,分式中分母$2x^2-3x-2 \neq 0$,定义域中的点x应该使上面这些条件同时得到满足.

(2) 反正弦函数中$\left|\dfrac{x-3}{2}\right| \leqslant 1$,对数函数真数$|x-2|>0$,分母$\lg|x-2| \neq 0$,即

$|x-2|\neq 1$.

解　(1) $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\2x-3>0\\2x^2-3x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\leqslant 3\\x>\dfrac{3}{2}\\x\neq-\dfrac{1}{2},\ x\neq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3\\x>\dfrac{3}{2}\\x\neq-\dfrac{1}{2},\ x\neq 2\end{cases}$

所以，定义域 D_f 是区间 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 和 $(2,3]$，即 D_f 是两个区间 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ 和 $(2,3]$ 的合并．

(2) $\begin{cases}\left|\dfrac{x-3}{2}\right|\leqslant 1\\|x-2|>0\\|x-2|\neq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-3|\leqslant 2\\x\neq 2\\x-2\neq\pm 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 5\\x\neq 2\\x\neq 3,x\neq 1\end{cases}$

所以，D_f 是 $(1,2)$，$(2,3)$ 和 $(3,5]$，即 D_f 是三个区间 $(1,2)$，$(2,3)$ 和 $(3,5]$ 的合并．

(2) 对应法则

函数 $y=f(x)$ 中的记号 $f(\ \ )$ 是表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系，在用解析式表示的函数中 $f(\ \ )$ 表示一种“运算框架”.

例如　$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，$f(\ \ )$ 表示将括号内的变量除以（变量-1）的运算，即

$$f(\ \ )=\frac{(\ \ )}{(\ \ )-1}.$$

$f(x_0)=\dfrac{x_0}{x_0-1}$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值．

$$f(2)=\frac{2}{2-1}=1.$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x\quad（其中\ x\neq 0,\ x\neq 1）$$

$f(\ \ )$ 括号内可以是常量，也可以是变量或函数．

比较两个函数，只有当定义域和对应法则都相同时，才称为相同.

例 2　下列各对函数是否相同，并说明原因.

(1) $f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-1}$；　　(2) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=2\cos^2 x-1$，$g(t)=1-2\sin^2 t$；(4) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$.

解 (1) 不相同. 定义域不同，$D_f:(-\infty,+\infty)$，$D_g:(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$.

(2) 不相同. 定义域不同，D_f: $(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$，$D_g:(0,+\infty)$.

(3) 相同. 定义域相同,对应法则也相同. 函数与自变量的记号无关.

$$2\cos^2(\quad)-1=1-2\sin^2(\quad)=\cos 2(\quad).$$

(4) 不相同. 对应法则不同,因为 $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

3. 一元函数的表示法

(1) **解析法** 用解析表达式表示的函数就称为函数的解析法,解析法也称为公式法. 如例 2 中的函数都是用解析法表示的函数.

(2) **表格法** 将自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,如各种数学用表——平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.

(3) **图示法** 在一元函数中,两个变量之间的对应关系是某个坐标系中的一条曲线.

4. 分段函数

对于定义域内自变量 x 的不同取值范围,函数有不同的解析表达式,这类函数称为**分段函数**(这是解析法表示函数的特例).

例 3 $y=f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1; \\ x+1, & x>1. \end{cases}$ 求 D_f，$f(2)$，$f\left(\frac{1}{4}\right)$.

解 分段函数的定义域是各定义区间的合并,所以 D_f 是$[0,1]$和$(1,+\infty)$的合并,即 $D_f=[0,+\infty)$.

因为 $2\in(1,+\infty)$,所以 $f(2)=2+1=3$;因为$\frac{1}{4}\in[0,1]$所以 $f\left(\frac{1}{4}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$.

求分段函数的函数值时分析自变量在哪个小区间,就用哪个对应法则.

例 4 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & |x|\leqslant 2 \\ x^2-4, & 2<|x|\leqslant 4, \end{cases}$ $g(x)=f(x^2)+f(3+x)$. 求 $g(x)$的定义域.

解 D_f 是两个集合$\{x\mid |x|\leqslant 2\}$,$\{x\mid 2<|x|\leqslant 4\}$的合并,所以 $D_f=\{x\mid\ |x|\leqslant 4\}=[-4,4]$,

D_f 表示 $f(\quad)$的自变量的取值范围为$[-4,4]$.

$f(x^2)$自变量是 x^2,所以$-4\leqslant x^2\leqslant 4\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$,

$f(3+x)$自变量是$(3+x)$,所以$-4\leqslant 3+x\leqslant 4\Leftrightarrow -7\leqslant x\leqslant 1$.

$g(x)$的定义域 D_g 中的点 x 应该使上面两个条件同时得到满足，所以 $D_g=\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}=[-2,1]$.

说明　比较容易产生的错误是将 $f(x)$的定义域看作 x 的范围：$-4\leqslant x\leqslant 4$，并由此得到 $0\leqslant x^2\leqslant 16$，$-1\leqslant 3+x\leqslant 7$，所以错误地认为 $f(x^2)$的定义域是$[0,16]$，$f(3+x)$的定义域是$[-1,7]$.

另外，由上例可知，多项函数的定义域中的点 x 应该使得每一项函数定义域的条件都得到满足.

5. 函数的几何特性

(1) **单调性**　设函数 $y=f(x)$在区间 I 内有定义，若对区间 I 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$是区间 I 内的**单调增(减)函数**. 区间 I 称为函数的**单调增(减)区间**.

(2) **有界性**　若$\exists$一个正数 M，对$\forall x\in(a,b)$恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在(a,b)内有界. 否则就称为**无界函数**. 在几何上，如果函数的图像介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，则函数有界.("$\forall$"表示"任意给定"，"$\exists$"表示"存在")

例如　$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界.

又由于$(|x|-1)^2\geqslant 0$，$x^2+1\geqslant 2|x|$，$\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$也是有界函数.

函数是否有界，不仅与函数有关，而且与自变量取值的区间有关.

例如　$y=\ln(x-1)$在区间$(1,2)$，$(2,+\infty)$内无界，而在区间$(2,3)$内有界.

常见的有界函数是：$\sin x$，$\cos x$，$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$，$\dfrac{x}{1+x^2}$.

(3) **奇偶性**　设 $f(x)$在区间 I 有定义，若$\forall x\in I$，恒有$-x\in I$，且 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**；若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**. **偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于原点**. 如果 $f(x)$是奇函数，且 $f(x)$在 $x=0$ 点有定义，则 $f(0)=0$.

例 5　判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；　(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$；

(3) $f(x)=x^2-3x+1$；　(4) $f(x)=-|f_1(x)|$；

(5) $f(x)=xf_1(x^2)$.

解　(1) $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$

所以 $f(x)$是偶函数.

(2) $f(-x)=\lg(\sqrt{(-x)^2+1}-x)=\lg\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$$

所以 $f(x)$是奇函数.

(3) $f(-x)=(-x)^2-3\cdot(-x)+1=x^2+3x+1$,

$-f(x)=-x^2+3x-1$,

$f(-x)\neq f(x)$且 $f(-x)\neq -f(x)$.

所以 $f(x)$是非奇非偶函数.

(4) 当 $f_1(x)$是奇函数或偶函数时,$f(x)$是偶函数;

当 $f_1(x)$是非奇非偶函数时,$f(x)$也是非奇非偶函数.

(5) 因为 $f(-x)=-xf_1[(-x)^2]=-xf_1(x^2)=-f(x)$,所以 $f(x)$是奇函数.

常见的奇函数是:$\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\dfrac{1}{x}$, $x^{2n+1}(n\in \mathrm{N})$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $xf(x^2)$, $f(x)-f(-x)$.

常见的偶函数是:$\cos x$, $\sec x$, $|x|$, $x^{2n}(n\in \mathrm{N})$, $f(x^2)$, $f(x)+f(-x)$.

(4) **周期性**　设函数 $y=f(x)$在区间 I 有定义,若存在正数 T,对一切 $x\in I$ 恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为**周期函数**,满足上式的最小正数 T 称为$f(x)$的**周期**.

例如　$y=\sin(\omega x+\varphi)$ 和 $y=\cos(\omega x+\varphi)$ 是**周期函数**,周期 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$. $y=\tan(ax)$, $y=\cot(ax)$, $y=|\sin(ax)|$, $y=|\cos(ax)|$也是周期函数,周期 $T=\dfrac{\pi}{|a|}$.

$y=5\sin(\pi x+2)$的周期 $T=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

若 $f(x)$,$g(x)$是周期函数,周期分别是 T_1,T_2($T_1\neq T_2$),则 $f(x)\pm g(x)$也是周期函数,其周期 T 等于 T_1,T_2 的最小公倍数.

(三) 初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是指下列六类函数:

常数函数　$y=c$

幂函数　$y=x^{\mu}$（μ 为任何实数）

指数函数　$y=a^{x}$　$(a>0,\ a\neq 1)$

对数函数　$y=\log_{a}x$　$(a>0,\ a\neq 1)$

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\,x$

基本初等函数的定义、性质、图像是求极限、求导（导数、微分）、求积（不定积分和定积分）的基础，必须掌握好. 为了便于学习，我们将基本初等函数的定义、性质、图形和常用的运算法则和公式归纳如下：

(1) 常数函数 $y=c$

x 取任何值，y 始终等于 c. 例如，$y=f(x)=\ln 3$，则

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\ln 3-\ln 3=0.$$

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$　（μ 为任何实数）

定义域随 μ 而异，但不论 μ 为何值，x^{μ} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且图形都经过 $(1,1)$ 点，见图 1-9.

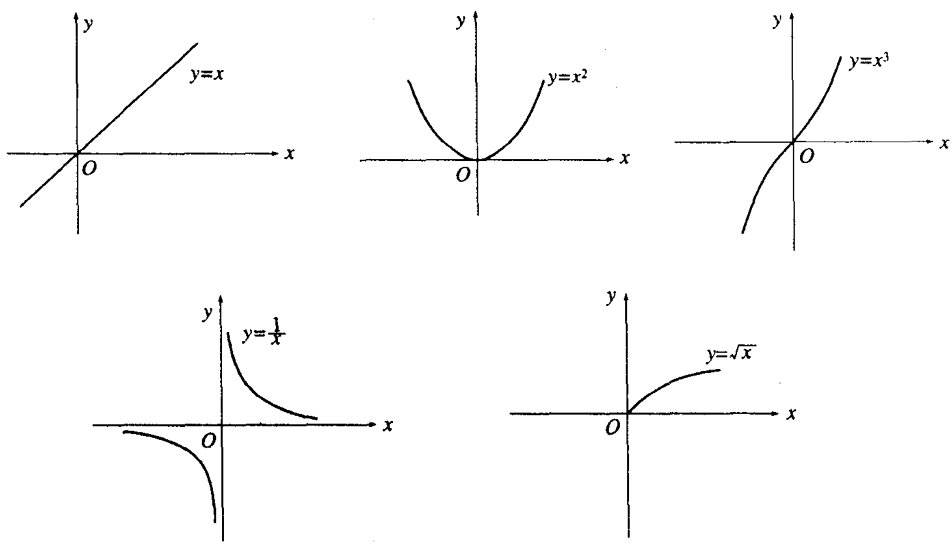

图 1-9

(3) 指数函数 $y=a^{x}$　$(a>0,\ a\neq 1)$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，图形经过 $(0,1)$ 点（图 1-10），若 $a>1$，$y=a^{x}$ 单调增加，$0<a<1$，$y=a^{x}$ 单调减少.

e^{x} 随 x 增大而急速趋向 $+\infty$，e^{-x} 随 x 增大而急速衰减趋向 0（图 1-11）.