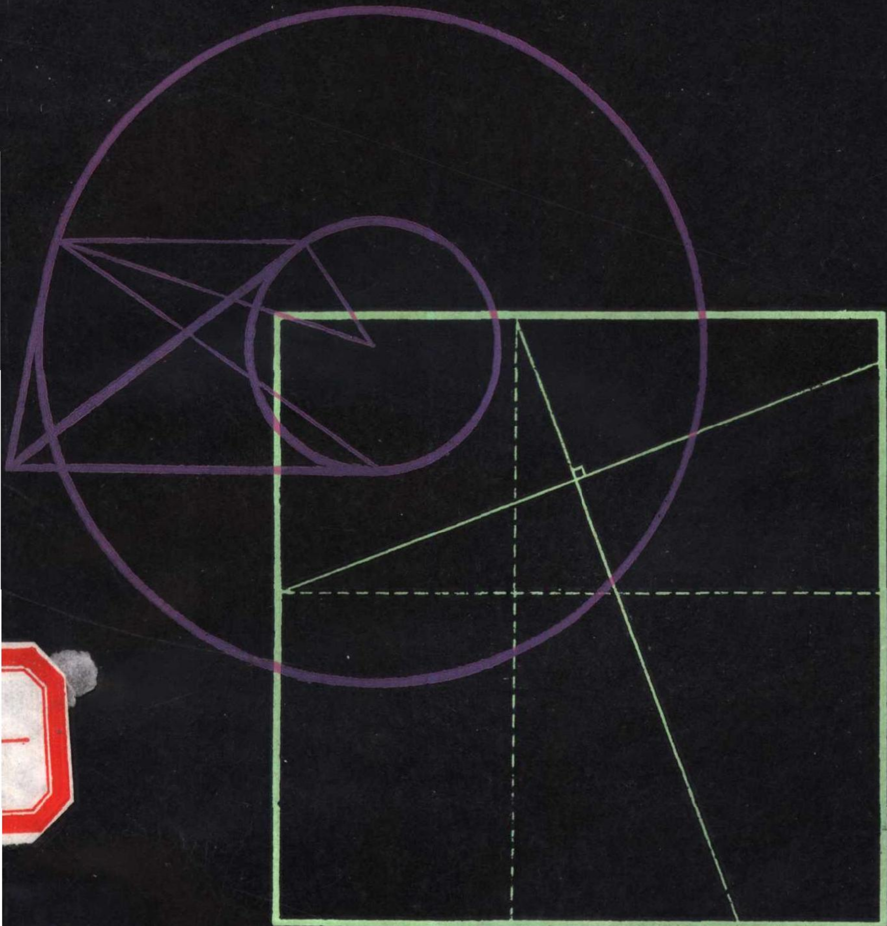
ZENYANG TIAN FUZHUXIAN



怎样添辅助线

中学生文库

怎样添辅助线

余振棠 谢传芳

上海教育出版社

中学生文库　怎样添辅助线

余振棠　谢传芳　上海教育出版社出版
（上海永福路123号）
江苏溧阳印刷厂印刷　新华书店上海发行所发行
开本 787×1092　1/32　印张 3　字数 58,000
1985 年 5 月第 1 版　1986 年 8 月第 2 次印刷
印数50,801—90,800本

统一书号：7150·3390　定价：0.38元

内 容 提 要

平面几何证题中的添辅助线对初学者来说经常感到困难，本书根据中学生学习平面几何知识的需要，介绍几何证题中添辅助线的方法。作者积累了多年来的教学心得，从剖析简单几何题着手，总结出几种典型的添辅助线方法，以及这些方法在证明较复杂几何题时的综合运用。书中配有适量的习题，可供学生练习思考。本书说理清楚、透彻，是一本添辅助线证题的入门书，初中学生更值得一读。

前　　言

证明平面几何命题，就同行军一样，要从起点(题设)出发，寻找出一条到达终点(结论)的路线．但是这种路线可能是畅通无阻的阳关大道，也可能是迂回曲折的崎岖小径，有的还可能被河流阻隔着，必须架了桥才能继续前进．证明几何命题中的添辅助线，就是起着架桥的作用．不少题目在证明过程中，只有添了辅助线才能顺利地进行证明，有时添了辅助线还可以大大地简化证题的步骤，易于获得要证明的结论．

在行军中，桥要架在什么地方，架怎样的桥，如何架等等，没有一种固定不变的、普遍适用的现成方案可循，必须根据具体的地形，进行详细地分析，才能选择一种最佳的架桥方案．在几何证题中，添辅助线问题也是如此，同样没有一个固定不变的、普遍适用的方法可循．因而怎样添辅助线便成了初学几何者所感到困难的问题．但是分析、思考、找寻解决这个问题的过程，确是一个逻辑非常严谨、想象非常丰富的、饶有趣味的思维过程．这本小册子是根据我们自己学几何与教几何的体会，试着对这个困难而饶有趣味的问题作些探讨，供初学几何的青年学生作参考．

目录 ZHONG XUE SHENG WENKU

一、简单问题

我们知道，在证明几何题的时候，一般总是凭着给出的图形(要是题目中没有给出图形，那就按照已知条件作出图形来)，从所求的结论出发，并根据学过的定义、公理、定理等来探求证题的途径，然后把题目证出来．例如：在 $\triangle ABC$ 中，已知 AD 是中线，DE 是 AD 的延长线，并且 $DE=AD$．求证：$BE \perp\!\!\!= AC$ (图 1)．

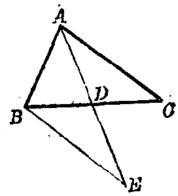


图 1

这里容易知道，要证明 $BE /\!/ AC$，可以从证明 $\angle EBC=\angle ACB$，或者 $\angle BEA=\angle CAE$ 着手．要证明 $BE=AC$，可以从证明 $\triangle BED\cong\triangle CAD$ 着手．而根据两个全等三角形的对应角相等，从后者的证明中就可以得到 $\angle EBC=\angle ACB$，或者 $\angle BEA=\angle CAE$．因此这里只要设法证明 $\triangle BED\cong\triangle CAD$．

写出证明如下：

$\because$ AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore$ $BD=DC$．又 DE 是 AD 的延长线，$\therefore$ $\angle ADC=\angle BDE$，并且 $DE=AD$，$\therefore$ $\triangle BED\cong\triangle CAD$，$\therefore$ $BE=AC$，$\angle EBD=\angle ACD$，$\therefore$ $BE /\!/ AC$．

从上例看到，我们根据题设条件，凭着给出的图形，顺利地证得了所求的结论．但是在很多情况下，光凭所给的图形

还不能证得所求的结论，这时就需要添置辅助线了. 就本题而论，如果连结 CE 这条辅助线，就得到 $\square ABEC$，同样可以证得 $BE \perp\!\!\!\!= AC$. 可见证题步骤适当地简化了. 下面我们再来看一些比较简单的例子.

含有中线的问题

[例 1] 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线. 求证：$AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$.

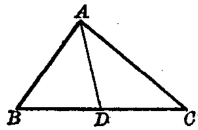


图 2

证法一

分析与思考 要证明 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$，就是要证明 $2AD<AB+AC$. 根据"三角形的两边之和大于第三边"这个性质，如果 AB, AC, $2AD$ 是一个三角形的三条边，那就可以了. 但是，在给出的图形中，不存在这样一个三角形，那末必须添置怎样的辅助线呢？

上面的例子启发我们：如果延长 AD 到 E，使 $DE=AD$(图 3)，并且连结 BE，那末 $BE=AC$. 这样，从 $AB+BE>AE$，就可以证得所求的结论了.

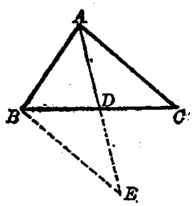


图 3

证明一 延长 AD 到 E，使 $DE=AD$. 连结 BE.

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$AD=DE,\ CD=BD,\ \angle ADC=\angle EDB,$$

$$\therefore\quad \triangle ADC\cong\triangle EDB.$$

$$\therefore\quad BE=AC.$$

在 $\triangle ABE$ 中，$AB+BE>AE$,

$$\therefore \quad AB+AC>2AD,$$

即 $$AD<\frac{1}{2}(AB+AC).$$

注：例题的“已知”和“求证”部分从略，下文相同。

这个证法，我们是把中线 AD 延长到 E，使 $DE=AD$，再连结 BE，DE、BE 成了添置的辅助线，然后证得结论成立的。添置 DE、BE 这两条辅助线，可以有多种方法。例如我们可以把 AC 平行移动到 BE 的位置上（参见图 3），连结 DE，这时，只要证明 A、D、E 三点在一条直线上，并且 $DE=AD$ 就可以了。

证明二　从 B 作 $BE \mathrel{\underline{\parallel}} AC$，连结 DE.

$$\because \quad BE \parallel AC, \quad \therefore \quad \angle ACB=\angle EBC.$$

又 $BE=AC$，$BD=DC$，$\therefore \quad \triangle BED \cong \triangle CAD$.

$$\therefore \quad \angle BDE=\angle CDA, \; DE=AD.$$

又 $\angle BDE+\angle EDC=180°$，$\angle CDA+\angle EDC=180°$，所以 A、D、E 在一条直线上，并且 $AE=2AD$.

在 $\triangle ABE$ 中，$AB+BE>AE$，$\therefore \quad 2AD<AB+AC$.

读者不妨试一试，如果将 $\triangle ADC$ 绕 D 点旋转 $180°$，能否证出所求的结论？所添的辅助线是否相同？

证法二

分析与思考　要证明 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$，就是要证明 $AD<\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC$，为此我们可以先作出 $\frac{1}{2}AB$ 和 $\frac{1}{2}AC$，再设法证明它们的和大于 AD. 容易看到，如图 4，如果取 AB 的中点 E，那末 AE 就是 $\frac{1}{2}AB$. 而 D 是 BC 的中点，如果连结 DE，那末 $DE=\frac{1}{2}AC$. 这样就

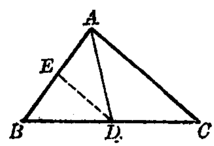


图 4

把问题转化为求证 $AE+ED>AD$ 了．这从 $\triangle AED$ 中可以得到证明．

证明　从略．

上面的两种证法，由于思考的途径不同，所添置的辅助线也不同．证法一是借助于全等三角形的对应部分相等，根据中线所蕴含的性质来添置辅助线的．采取的方法是：可将中线延长一倍，或将某直线平移，或将三角形旋转，将图形改变位置，使分散的条件，集中在一起，得到由 AB、AC 和 $2AD$ 构成的三角形 ABE，从而证得所求的结论．证法二是借助于中位线的性质来添置辅助线的．得到由 $\frac{1}{2}AB$、$\frac{1}{2}AC$ 和 AD 构成的三角形 AED，从而证得所求的结论．

[例 2]　如图 5 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，四边形 $ABGF$ 和 $ACDE$ 是正方形．求证：$EF=2AM$．

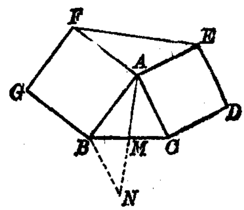


图　5

分析与思考　要证明 $EF=2AM$，可以先延长 AM 到 N，使 $AN=2AM$，然后设法证明 $EF=AN$．要证明 $EF=AN$，可以从证明两个分别含有这两条线段的三角形全等着手．连结 BN，只要证明 $\triangle ABN\cong\triangle FAE$ 就可以了，因为 $BN\mathrel{\underline{\parallel}}AC$．$\angle ABN+\angle BAC=180°$，而 $\angle BAF+\angle CAE=180°$，所以 $\angle ABN=\angle FAE$．$AB=FA$，$BN=AE$，容易证得 $\triangle ABN\cong\triangle FAE$，从而就可以证明 $EF=2AM$ 了．

证明　从略．

从例 1 的证法一和例 2 的证明可以看到，如果在题目中

含有三角形的中线的已知条件，比较多的情况是将中线延长一倍，添了这一条辅助线，便可得到两个全等的三角形，或平行四边形，这样有利于把条件与结论之间的关系建立起来.

练　　习

1．已知 $\triangle ABC$，AM 是中线，$AB>AC$．求证：$\angle CAM>\angle BAM$．

2．已知 $\triangle ABC$，AM 是中线，$\angle A>90°$．求证：$\angle BAM>\angle ABM$．

3．在 $\triangle ABC$ 中，AD 是中线，也是角平分线．求证：$AD\perp BC$．

含有中点的问题

[例 3]　如图 6，在 $\triangle ABC$ 中，E 为 AC 的中点，D 在 BC 上，且 $BD=\frac{1}{3}BC$．求证：AD 平分 BE．

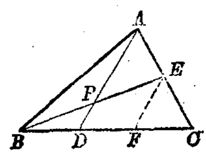


图　6

证法一

分析与思考　要证 DP 平分 BE，可以从三角形中位线定理的逆定理证得，设法作一个以 DP 为中位线的三角形就可以了．要使 D 点为三角形一边的中点，可在 DC 上取 $DF=BD$．连结 EF，如果能证明 $EF\parallel PD$，那末 P 点平分 BE．在 $\triangle ACD$ 中，因为 E 是 AC 的中点，只要证明 F 也是 DC 的中点就可以了．根据题设条件，显然 F 为 DC 的中点．

证明　从略．

证法二

分析与思考　要证明 $BP=PE$(图7)，BP 是 $\triangle BDP$ 的一条边，如果能作一个以 PE 为一边的三角形，与三角形 BDP 全等就可证得 $BP=PE$. 假设三角形 PEG 已作出，并且 $\triangle PEG\cong\triangle PBD$. 要使 $\triangle PEG\cong\triangle PBD$，便要有 $\angle BDP=\angle EGP$，$\angle DBP=\angle PEG$ 及 $BD=EG$. 为此，便要有 $EG\parallel BC$，及 $EG=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{2}DC$，于是 EG 必须是 $\triangle ACD$ 的中位线. 因此，EG 可以作出，从而可证明 $BP=PE$.

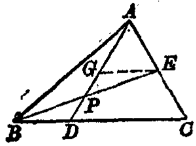


图　7

证明　从略.

[例4]　如图8，四边形 $ABCD$，$AC=BD$，M、N 为 AB、CD 的中点. 求证：AC、BD、MN 相交成一个等腰 $\triangle PQR$.

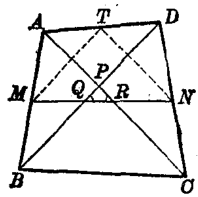


图　8

分析与思考　要证 $\triangle PQR$ 是等腰三角形，可从证明 $\angle PQR=\angle PRQ$ 着手，要证明 $\angle PQR=\angle PRQ$，图中没有直接关系，必须添辅助线把它们移动到容易建立关系的适当的位置上去　由于 M、N 是 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 一边的中点，便自然想到取另一边 AD 的中点 T，作中位线 MT、NT，要证明 $\angle PQR=\angle PRQ$ 就转换成证明 $\angle TMN=\angle TNM$. 由题设 $AC=BD$，于是可以证得 $TM=TN$，从而证得 $PQ=PR$.

证明　从略.

[例5]　求证连结梯形两对角线中点的线段平行且等于

两底差的一半.

如图 9, 本题求证 $MN \parallel BC$, 及 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

证法一

分析与思考　要证明 $MN \parallel BC$, 根据已知条件 N 是 AC 的中点, 只要证明 MN 是 $\triangle ACB$ 的中位线的一部分. 设 NM 的延长线与 AB 交于 L, 只要证明 L 是 AB 的中点就可以了. 另一方面要证明 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$, 就是要证明 $NL-ML=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}AD$, 也就是要证明 $NL=\frac{1}{2}BC$, $ML=\frac{1}{2}AD$. 这样便归结为要证明 L 是 AB 的中点. 为此, 不妨先取 AB 的中点 L, 然后证明 L、M、N 三点共线. 连结 ML、NL, 由于 $LN \parallel BC$, $LM \parallel AD$ 及 $AD \parallel BC$, 所以三点共线是容易证明的

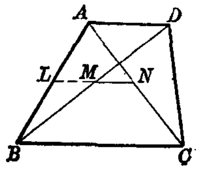


图 9

证明　从略.

证法二

分析与思考　如图 10, 要证明 $MN \parallel BC$, 及 $MN=\frac{1}{2}(BC-AD)$, 如果在 BC 上截去 AD, 即取 $CE=AD$, 就是要证明 $MN \perp\!\!\!\!= \frac{1}{2}BE$. 也就是要证明 MN 是 $\triangle DBE$ 的中位线. 但 D、N、E 不一定共线, 所以必须证明 D、N、E 共线. 这由 $\triangle ADN \cong \triangle CEN$, 可得 $\angle AND=\angle CNE$, 所以不难证得 D、N、E 三点共线. 同时, 也可得 $DN=NE$, 于是 MN 便是 $\triangle DBE$ 的中位线.

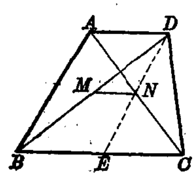


图 10

证明一 根据分析思路逆推来写(从略).

证明二 连结 DN 并且延长，交 BC 于 E.

$$\because \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \quad \angle DAN=\angle ECN,\ \angle ADN=\angle CEN,$$

且 $AN=NC$,

$$\therefore \quad \triangle ADN \cong \triangle ECN,$$

$$\therefore \quad DN=NE,\ AD=CE.$$

又 $\because$ $DM=MB$, $\therefore$ MN 是 $\triangle DBE$ 的中位线，

$$\therefore \quad MN \parallel BC,$$

并且 $MN=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}(BC-CE)=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

这两种证法都是根据中位线定理来证明的．但是采取的途径有所不同．证法一是先从要证明的结论“平行”问题着手，进行分析，即从“三角形的中位线平行于第三边”的性质来考虑，取 AB 边中点 L，添辅助线 NL；证法二是先从要证明的结论“两底差的一半”问题着手进行分析，即从“三角形中位线等于第三边一半”的性质来考虑，在 BC 上截去 AD，然后添辅助线 DN、NE，证明 D、N、E 共线(证明一)，或连结 DN 并延长交 BC 于 E，证明 $CE=AD$(证明二).

在证法一中，证明 N、M、L 三点共线，与证法二的证明一中证明 D、N、E 三点共线，这一步决不能忽略．初学者往往“想当然”地不加证明，这是错误的.

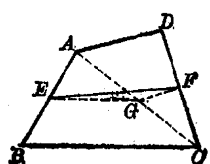


图 11

[例6] 如图11，四边形 $ABCD$，E、F 为 AB、CD 的中点．求证：$EF\leqslant\frac{1}{2}(AD+BC)$.

分析与思考 如果 $AD \parallel BC$，则这个四边形是梯形．所

以 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$，即梯形的中位线定理.

如果 $AD \not\parallel BC$，那么 EF 与两底 AD、BC 间不能直接建立关系．而要证明 $EF<\frac{1}{2}(AD+BC)$，则必须在图中寻找与 $\frac{1}{2}AD$ 及 $\frac{1}{2}BC$ 分别相等的线段，根据中点的条件，自然会想到与 AD、BC 为底边的三角形中位线联系起来．因此必须添辅助线构成两个分别以 E 与 F 为一边中点、以 BC 与 AD 为底边的三角形．连结对角线 AC（或 BD）便得到需要的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CAD$．然后取 AC 的中点 G，添中位线 EG、FG，便能证得结论成立.

证明　从略.

从例 3 到例 6 的已知条件中都含有三角形或多边形边的中点．证题方法都是添置中位线作为辅助线，然后应用三角形的中位线性质来证明．如果图形中已存在三角形或梯形，中位线可以马上作出（如例 3、例 4 及例 5 的证法一）；如果图形中不存在现成的，或适用的三角形，则要先构造出三角形，然后添置中位线证明（如例 5 的证法二和例 6）.

练　　习

1．在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 的中点，E 在 AC 上，且 $AE=\frac{2}{3}AC$，BE 交 CD 于 O，求证：$OE=\frac{1}{4}BE$.

2．若四边形的两对角线互相垂直，则两组对边的中点连线相等.

3．在 $\triangle ABC$ 中，E、F 分别为 BC、AB 的中点，M、N 在 AC 上，且 $AM=MN=NC$，FM、EN 的延长线交于 D，

求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形。

含有角平分线的问题

[例7] 如图12，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=2\angle B$，CD 平分 $\angle C$，求证：$BC=AC+AD$。

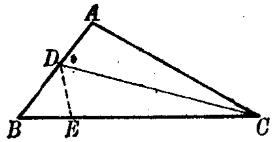


图 12

分析与思考 要证明 $BC=AC+AD$，设想能否将 BC 分成与 AC、AD 相等的两线段．这里 CD 是 $\angle C$ 的平分线，如果以 CD 为轴，将 $\triangle ACD$ 翻折过来，那么 A 点一定落在 BC 上，得 E 点．也就是 $CE=CA$，$DE=DA$．如果能证明 $BE=DE$，就可证得 $BE=DA$．由于 $\angle A=\angle CED=2\angle B$．就可证得结论成立．

证明 因为 CD 平分 $\angle C$，以 CD 为轴将 $\triangle ACD$ 翻折过来，A 点落在 CB 上，得 E 点，连结 ED，则 $ED=AD$，$\angle DAC=\angle DEC$。

又 $\quad \angle A=2\angle B,\quad \therefore\quad \angle DEC=2\angle B.$

而 $\quad \angle DEC=\angle B+\angle BDE\quad \therefore\quad \angle BDE=\angle B,$

$$\therefore\quad BE=DE=DA,$$

$$\therefore\quad BC=AC+AD.$$

注：本题也可以在 CB 上截取一段 CE，使 $CE=AC$，连结 DE，从证明 $\triangle ACD\cong\triangle ECD$ 着手．

[例8] 如图13，在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AD 是 $\angle A$ 的平分线，E 是 AD 上的点．求证：$AB-AC>EB-EC$。

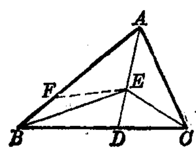


图 13

分析与思考 要证明 $AB-AC>EB-EC$，可在 AB 上截去 AC 后，比较剩下的线段与 EB 减

EC 所得的差的大小，或在 EB 上截去 EC 后，比较剩下的线段与 AB 减 AC 所得的差的大小. 根据题设条件，AD 是 $\angle A$ 的平分线，利用角平分线具有对称轴的性质，将 $\triangle ACE$ 沿 AD 翻折，那末 $AF=AC$，$EF=EC$. 这样就将问题转化为要求证明 $FB>EB-EC$ 了. 显然，从 $\triangle BFE$ 中可以证得结论成立.

证明 从略.

注：本题也可以在 AB 上取一段 AF，使 $AF=AC$，连结 EF，从证明 $\triangle FAE\cong\triangle CAE$ 着手.

上面这两个例子的已知条件中都含有角平分线，角平分线具有对称轴的性质，在证明过程中通常利用这个性质，将图形沿角平分线翻折或借助于全等三角形对应元素相等来添置辅助线，使已知条件与结论联系在一起，从而证得结论成立.

[例 9] 如图 14，在 $\triangle ABC$ 中，AT 是 $\angle A$ 的平分线，AM 是中线，$BE\perp AT$ 于 E，$CF\perp AT$ 于 F. 求证：$ME=MF$.

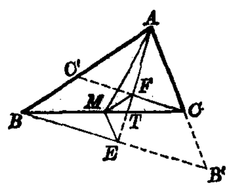


图 14

证法一

分析与思考 要证明 $ME=MF$，可以从证明 $\angle MEF=\angle MFE$ 来考虑. 这里 $\angle MEF=\angle MFE$ 没有直接的关系，必须寻找与 $\angle MEF$、$\angle MFE$ 分别相等的角. 已知 M 是 BC 的中点，将 CF 延长交 AB 于 C'，如能证得 F 点为 CC' 的中点，那么 $MF\parallel AB$，$\angle MFE=\angle BAT$. 现在来考虑 F 点是否为 CC' 的中点？因为 AT 是 $\angle A$ 的平分线，并且 $CF\perp AT$，所以 F 点为 CC' 的中点. 按同样的思路可证得 $\angle MEF=\angle CAT$，从而可证得 $\angle MEF=\angle MFE$.