电网络分析与综合

吴　宁　主编

科学出版社
www.sciencep.com

电网络分析与综合

吴 宁 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书共十章,含电网络分析和电网络综合两大部分。第一至六章主要内容为网络分析,包括:网络元件和网络的基本性质,网络图论与网络方程,网络函数,网络分析的状态变量法,线性网络的信号流图分析法。第七至十章主要内容为网络综合,包括:无源网络综合基础,滤波器逼近方法,电抗梯形滤波器综合,有源滤波器综合基础。

本书可作为电类(电工、电子、通信与信息、自动控制、计算机等)学科有关专业的硕士研究生的教材,亦可供在该学科领域工作的科研和工程技术人员作为继续教育的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电网络分析与综合/吴宁主编.—北京:科学出版社,2003

ISBN 7-03-010848-5

Ⅰ.电…　Ⅱ.吴…　Ⅲ.①电力网络分析②电力系统—网络综合
Ⅳ.TM711

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 080487 号

责任编辑:赵卫江/责任校对:曹锐军
责任印制:吕春珉/封面设计:王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2003年3月第　一　版　开本:787×1092 1/16
2003年3月第一次印刷　印张:26 1/2
印数:1—4 000　字数:614 000

定价:38.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　言

电网络理论是研究电网络(即电路)的基本规律及其分析计算方法的科学,是电工和电子科学与技术的重要理论基础。“网络分析”与“网络综合”是电网络理论包含的两大主要部分。本书共十章,第一至六章主要内容为网络分析,第七至十章主要内容为网络综合。网络分析部分在大学本科电路原理课程的基础上,进一步深入研究电路的基本规律和分析计算方法。其中,第一章(网络元件和网络的基本性质)包含电网络理论的基本概念与基本定义,是全书的理论基础。第二、三、四、五章(网络图论和网络方程、网络函数、网络分析的状态变量法、线性网络的信号流图分析法)介绍现代电网络理论中的几类分析电网络的方法。第六章(灵敏度分析)研究评价电路质量的一个重要性能指标——灵敏度的分析计算方法,为电网络的综合与设计提供必要的工具。在网络综合部分,除介绍网络综合的基础知识、无源滤波器和有源滤波器综合的基本步骤外,侧重研究得到广泛应用的无源滤波器和有源滤波器的综合方法。其中,第七、八章(无源网络综合基础、滤波器逼近方法)的内容是进行电网络综合所必须具备的基础知识。第九章(电抗梯形滤波器综合)对无源 *LC* 梯形滤波器的综合方法做了详细介绍。因为这种滤波器不仅具有优良性能、得到广泛应用,而且在有源 *RC* 滤波器以及 *SC* 滤波器、*SI* 滤波器等现代滤波器设计中,常以其作为原型滤波器。第十章(有源滤波器综合基础)在综述有源滤波器基本知识的基础上,介绍几类常用的高阶有源滤波器综合方法。其中,比较深入地研究了用对无源 *LC* 梯形的运算模拟法综合有源滤波器的方法。

本书覆盖内容较广,可用作电类学科各专业研究生公共专业基础理论课“电网络理论”或“网络分析与网络综合”的教材。也可根据不同需要,单独用本书前面部分或后面部分作为“网络分析”或“网络综合”、“网络综合与滤波器设计基础”课的教材。

本书是为电类(电工、电子、通信与信息、自动控制、计算机等)学科有关专业的硕士研究生编写的教材,亦可供在上述学科领域工作的科研和工程技术人员作为继续教育的教材或参考书。

参加本书编写工作的有:吴宁(第一、三、六、七、八、九、十章),谢品芳(第二、四章),李新(第五章)。全书由吴宁统稿、修改和校定。

重庆大学江泽佳教授对本书进行了仔细审阅并提出宝贵的修改意见,在此致以衷心的感谢。

本书是作者在长期从事研究生培养工作、讲授相关内容研究生课程的基础上编写而成的。从开始编写到教材初稿付印、试用和出版,始终得到重庆大学研究生院、电气工程学院和电工理论与新技术系的关心和支持,在此一并致谢。

此外,还要对本书所引用文献、专著的作者表示谢意。

由于作者水平有限,书中可能存在错误和不妥之处,恳请读者批评指正。

作　者

2002 年 12 月于重庆大学

目　录

第一章　网络元件和网络的基本性质

导　言

本章主要论述网络的基本元件以及网络和网络元件的基本性质。

本书所称“网络”系指电气网络，即电路。实际的电路由电气装置、器件联接而成。在电网络理论中所研究的电路则是实际电路的数学模型，它的基本构造单元是电路元件。每一个电路元件集中地表征电气装置电磁过程某一方面的性能，用反映这一性能的各变量间关系的方程表示。

电网络的基本变量是电流 i、电压 u、电荷 q 和磁通 ϕ（或磁通链 ψ），它们分别对应于电磁场的表征量磁场强度 $\boldsymbol{H}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移 $\boldsymbol{D}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$。用场的观点来考察，实际电路的问题可视为在特定的有限局部空间中的电磁场问题，电路与电磁场的表征量是一一对应且通过下列方程相互联系的：

$$i = \oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \quad u = \int_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}, \quad q = \oint_s \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \quad \phi = \int_s \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上述电网络的四个基本变量各具有其重要的性质，即电流的连续性；在位场情况下电位的单值性；电荷的守恒性；磁通的连续性。这些性质是电网络理论中一系列重要结论和推论的理论基础。

除了电流、电压、电荷、磁通四个基本变量之外，电网络理论中还有两个重要的变量，电功率 p 和电能量 W，可称为基本复合量，它们由电网络的基本变量按以下关系式确定：

$$p(t) = u(t)i(t), \quad W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} u(t)i(t)\mathrm{d}t$$

式中 $W(t_1, t_2)$为在时间$[t_1, t_2]$内网络（或元件）吸收的电能量（设 u 与 i 参考方向一致）。能量的守恒性是电网络理论中许多重要推理的立论基础之一。

本书全部内容均以集总公设为前提。所谓集总公设，是指假定任一网络变量信号仅是独立变量时间 t 的函数，而与测点的空间坐标无关，即认为电磁波的传播是瞬时完成的。换句话讲，对于以光速传播的电磁波而言，线路的长短和电气装置的大小可以忽略不计。这样，便可将统一电磁过程中的各个方面（电场储能、磁场储能、电能的损耗等）孤立开来，各自分别存在于某一类元件上，而一个电路中各元件的空间位置关系对电路的行为是毫无影响的。符合上述集总公设的电路（或元件）称为集总电路（或集总元件）。

1-1　容许信号偶和基本元件组

图 1-1(a)、(b)中 N 分别表示一个$(n+1)$端元件和一个 n 端口元件。对于多端元件的每个端子或多端口元件的每一端口来说，均有其 i、u、q、ψ 四个基本网络变量。在任一端子（或端口）k 上，各基本网络变量之间存在着如下两个不依赖于元件性质的关系：

$$u_k(t) = \frac{\mathrm{d}\psi_k(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-1-1}$$

$$i_k(t) = \frac{\mathrm{d}q_k(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-1-2}$$

或表示为

$$\psi_k(t) = \int_{-\infty}^{t} u_k(\tau)\mathrm{d}\tau = \psi_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_k(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-1-3}$$

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^{t} i_k(\tau)\mathrm{d}\tau = q_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} i_k(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-1-4}$$

因此，(u_k, ψ_k)和(i_k, q_k)两对变量被称为动态相关的网络变量偶。

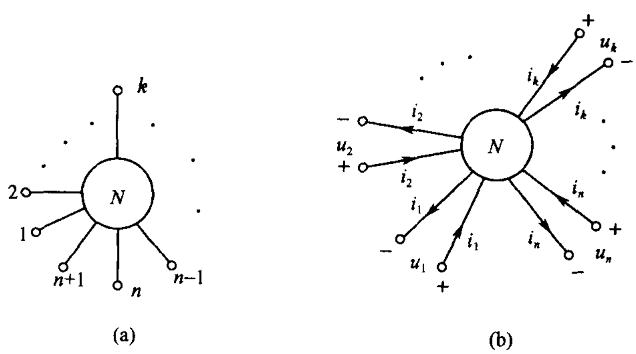

图 1-1

在四个基本网络变量的六种成对组合里，除了上述两种变量偶是动态相关的之外，(u_k, i_k)、(u_k, q_k)、(i_k, ψ_k)和(ψ_k, q_k)这四种组合的二对变量之间不存在预先规定的不依赖于元件 N 的关系，它们被称为动态无关的网络变量偶。一般而言，由一对动态无关的网络变量向量构成的向量偶称为动态无关变量向量偶，记为

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}), (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}), (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{\psi}), (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{q})\}$$

在整个时间区间$[t_0, \infty)$里，对 n 端口(或$(n+1)$端)元件 N 观测到的一对动态无关变量向量$(\boldsymbol{\xi}(t), \boldsymbol{\eta}(t))$，称为 N 的容许信号偶(admissible signal pair)。相对于同一起始时间 t_0 测出的 N 的所有容许信号偶$(\boldsymbol{\xi}(\cdot), \boldsymbol{\eta}(\cdot))$的全体叫做 N 的成分关系(constitutive relation)①。如果元件 N 的成分关系可以用只包含$\boldsymbol{\xi}(t)$和 $\boldsymbol{\eta}(t)$的代数方程表示，而不含它们的导数和积分，则称为代数成分关系。反之，如果成分关系不能用 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 的代数方程表示，则称为动态成分关系。

每一对动态无关的网络变量向量对应于一种代数成分关系，进而惟一地定义一类网络元件，这就是

$$\boldsymbol{f}_R(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{i}, t) = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{f}_R(\cdot)$为电阻类元件的伏-安关系；

$$\boldsymbol{f}_C(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, t) = \boldsymbol{0}$$

① constitutive relation 一词在有的书中译为“构造性关系”。

$f_C(\cdot)$为电容类元件的伏-库关系；

$$f_L(\boldsymbol{i},\boldsymbol{\psi},t)=\mathbf{0}$$

$f_L(\cdot)$为电感类元件的安-韦关系；

$$f_M(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{q},t)=\mathbf{0}$$

$f_M(\cdot)$为忆阻类元件的韦-库关系。

以上四类元件形成网络的基本元件组。

图 1-2 所示完备图表示出网络变量向量偶和它们的四种代数成分关系。图中节点变量为四个基本网络变量向量，每一虚线边联接的是一对动态相关的网络变量向量，每一实线边联接的是一对动态无关的网络变量向量，在实线旁标出的是该二变量向量间的代数成分关系以及与之对应的网络元件的符号。下面分别介绍上述四种类型的网络元件。由于任一$(n+1)$端元件可等效于一个 n 端口元件，故以下仅阐述 n 端口元件的定义、性质等，而不再对$(n+1)$端元件一一赘述。

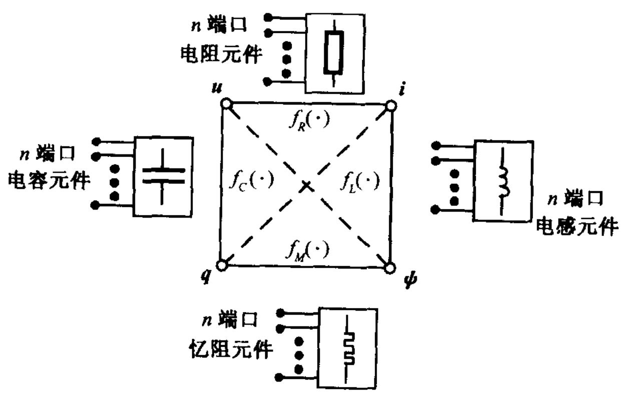

图 1-2

1-2 电阻元件

如果一个 n 端口元件的端口电压向量$\boldsymbol{u}$ 和端口电流向量$\boldsymbol{i}$ 之间为代数成分关系：

$$f_R(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{i}(t),t)=\mathbf{0} \tag{1-2-1}$$

则称该元件为电阻性 n 端口元件，或 n 端口电阻元件。下面侧重研究一端口(二端)电阻元件。

对于图 1-3 所示二端电阻元件，其端电压 u 与电流 i 之间存在代数成分关系：

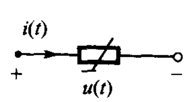

图 1-3

$$f_R(u(t),i(t),t)=0 \tag{1-2-2}$$

这就表明，在指定时刻 t，电阻元件的特性可以用 i-u 平面上的一条曲线表示。u 与 i 这一对动态无关的网络变量之间的代数成分关系方程(式(1-2-2))被称为二端电阻元件的特性方程。

若电阻电压可用电阻电流的单值函数表示，即

$$u(t)=f(i(t),t) \tag{1-2-3}$$

则称该电阻为流控电阻。图 1-4 中绘出了一个流控电阻的 i-u 曲线。

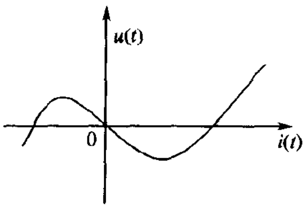

图 1-4

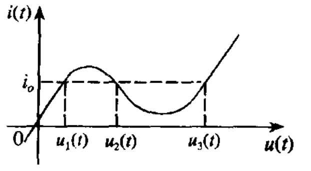

图 1-5

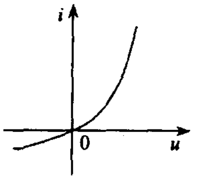

图 1-6

若电阻电流可用电阻电压的单值函数表示,即

$$i(t) = g(u(t), t) \tag{1-2-4}$$

则称该电阻为压控电阻。图 1-5 中绘出了一个压控电阻的 u-i 曲线。

有一类电阻,其 i-u 特性曲线为严格单调增(或严格单调减)的,称为单调电阻。这种电阻的特性方程既可写为流控形式,又可写为压控形式。例如,PN 结二极管就是单调电阻,其元件特性方程为

$$i(t) = \alpha(e^{\beta u(t)} - 1) \tag{1-2-5}$$

式中 α、β 为正实常数。上式也可写为

$$u(t) = \frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{\alpha}i(t) + 1\right] \tag{1-2-6}$$

其 u-i 曲线如图 1-6 所示。一般而言,单调电阻的元件特性方程可写为 $u = f(i, t)$和 $i = g(u, t)$两种形式,式中 $f(\cdot, t)$和 $g(\cdot, t)$均为单值函数,且两者互为惟一的反函数。

如果式(1-2-3)、(1-2-4)中的函数 f、g 不依赖于时间变量 t,即元件特性方程为

$$u(t) = f(i(t)) \tag{1-2-7}$$

和

$$i(t) = g(u(t)) \tag{1-2-8}$$

这种电阻元件称为时不变的,反之则是时变的。

线性电阻是单调电阻中的一种重要的类型,其电压、电流关系函数 $f(\cdot, t)$和 $g(\cdot, t)$是线性函数(对于所有的 t)。线性电阻元件的特性方程可写为以下形式:

$$u(t) = R(t)i(t) \tag{1-2-9}$$

和

$$i(t) = G(t)u(t) \tag{1-2-10}$$

式中 $R(t)$和 $G(t)$分别是线性电阻元件于 t 时刻的电阻和电导之值。图 1-7 中的三条过 i-u 平面原点的直线表示一个线性时变电阻于三个指定时刻的特性。

最常见的一类线性电阻是线性时不变电阻,即在式(1-2-9)、(1-2-10)所示元件特性方程中的 $R(t)$、$G(t)$是不随 t 改变的常数,其 u-i 方程为

$$u(t) = Ri(t) \tag{1-2-11}$$

和

$$i(t) = Gu(t) \tag{1-2-12}$$

下面研究非线性电阻元件的小信号行为。考察一个时不变流控电阻,其 u-i 关系为

$$u(t)=f(i(t))$$

若输入电流由时变偏置电流 $I(t)$和小信号电流 $\delta i(t)$两部分组成,即

$$i(t) = I(t) + \delta i(t) \tag{1-2-13}$$

设$|\delta i(t)|$在任何时刻均远小于$|I(t)|$的平均值,则相应的电阻电压也可以表示为

$$u(t) = U(t) + \delta u(t) \tag{1-2-14}$$

式中 $U(t)$是仅由偏置电流 $I(t)$所产生的电压,$\delta u(t)$则是由于电流有微小增量 $\delta i(t)$而导致的电压的微小增量,于是有

$$U(t) = f(I(t)) \tag{1-2-15}$$

$$U(t) + \delta u(t) = f(I(t) + \delta i(t)) \tag{1-2-16}$$

用泰勒级数将上式右端在 $I(t)$附近展开,则

$$U(t) + \delta u(t) = f(I(t)) + f'(I(t)) \cdot \delta i(t) + \frac{1}{2!}f''(I(t)) \cdot [\delta i(t)]^2 + \cdots \tag{1-2-17}$$

比较式(1-2-17)与(1-2-15),得

$$\delta u(t) = f'(I(t)) \cdot \delta i(t) + \frac{1}{2!}f''(I(t)) \cdot [\delta i(t)]^2 + \cdots \tag{1-2-18}$$

若函数 $f(\cdot)$连续,且因 $\delta i(t)$足够小,故可忽略上式中含 $\delta i(t)$的二次方项以及各高次方项,于是有

$$\delta u(t) = f'(I(t)) \cdot \delta i(t) \tag{1-2-19}$$

或写为

$$\delta u(t) = R_d(t) \cdot \delta i(t) \tag{1-2-20}$$

式中

$$R_d(t) = f'(I(t)) \tag{1-2-21}$$

称为原非线性电阻元件的小信号等效电阻(又称动态电阻),其值等于非线性函数 $f(\cdot)$在 $I(t)$处之导数。

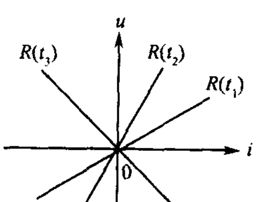

图 1-7

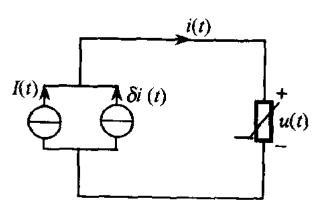

图 1-8

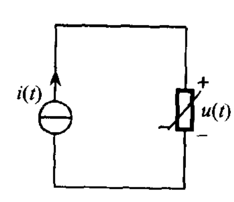

图 1-9

例 1-1　在图 1-8 所示电路中,非线性时不变电阻元件特性为

$$u(t) = f(i(t)) = \frac{1}{3}i^3(t) + 2i(t)$$

输入电流由时变偏置电流 $I(t)=\sin\omega t$ 和小信号电流 $\delta i(t)$两部分组成。求小信号电压与小信号电流间的关系方程。

解:由式(1-2-21)求小信号等效电阻如下:

$$R_d(t) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}\left(\frac{1}{3}i^3(t) + 2i(t)\right)\right]_{i(t)=I(t)} = \left[i^2(t) + 2\right]_{i(t)=\sin\omega t} = \sin^2\omega t + 2$$

故小信号电压与小信号电流间的关系方程为

$$\delta u(t) = (\sin^2\omega t + 2)\delta i(t)$$

由上例看出,在时变偏置电源作用下,一个非线性时不变电阻元件的小信号等效电阻是线性时变的,这是一个十分有用的结果。显然,如果希望得到线性时不变的小信号等效电阻,只需将偏置电源换为直流电源即可。

例 1-2 在图 1-9 所示电路中,流控非线性电阻的元件特性为

$$u(t) = f(i(t)) = 3i(t) - 4i^3(t)$$

输入电流为正弦电流 $i(t)=\sin\omega t$。试确定输出电压 $u(t)$的波形。

解:输出电压为电阻端电压,即

$$u(t) = 3i(t) - 4i^3(t) = 3\sin\omega t - 4\sin^3\omega t = \sin 3\omega t$$

输出电压 $u(t)$也是正弦波形,但与输入电流 $i(t)$频率不同,$u(t)$的频率等于 $i(t)$频率的三倍。可见,例中的流控非线性电阻实为一个变频器。

通过以上两例可以看出,电阻元件的作用已远不能仅用“将电能转化为热能”来描述。实际上,在现代电子技术中,非线性电阻和线性时变电阻被广泛地应用于整流、变频、调制、限幅等信号处理的许多方面。

最后,在结束本节之前尚需指出,四种理想受控源、理想变压器、回转器和负阻抗变换器等元件都是二端口电阻元件,因为它们的元件特性都是用端口电压向量和端口电流向量间的代数成分关系来表征的。独立电压源与独立电流源的元件特性分别用 u-i 平面上的平行于 i 轴与平行于 u 轴的直线表示,因此,它们均属于非线性电阻元件。

1-3 电容元件

如果一个 n 端口元件的端口电压向量 $\boldsymbol{u}$ 和端口电荷向量 $\boldsymbol{q}$ 之间为代数成分关系:

$$\boldsymbol{f}_C(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{q}(t), t) = \boldsymbol{0} \tag{1-3-1}$$

则称该元件为电容性 n 端口元件,或 n 端口电容元件。下面侧重研究一端口(二端)电容元件。

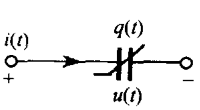

图 1-10

对于图 1-10 所示二端电容元件,其端电压 u 与电荷 q 之间存在代数成分关系:

$$f_C(u(t), q(t), t) = 0 \tag{1-3-2}$$

这就表明,在指定时刻 t,电容元件的特性可以用 u-q 平面上的一条曲线表示。u 与 q 这一对动态无关的网络变量之间的代数成分关系方程(式(1-3-2))被称为二端电容元件的特性方程。

若电容电压可用电容电荷的单值函数表示,即

$$u(t) = h(q(t), t) \tag{1-3-3}$$

则称该电容为荷控电容。

若电容电荷可用电容电压的单值函数表示,即

$$q(t) = f(u(t), t) \tag{1-3-4}$$

则该电容称为压控电容。

一个二端电容元件，如果其元件特性既可写为式(1-3-3)所示的荷控形式，又可表示为式(1-3-4)所示的压控形式，且函数 $h(\cdot,t)$ 与 $f(\cdot,t)$ 互为惟一的反函数，则其 q-u 曲线必定为严格单调增(或严格单调减)的，这种电容称为单调型的。

如果电容元件的 q-u 关系方程不显含时间变量 t，即

$$u(t) = h(q(t)) \tag{1-3-5}$$

$$q(t) = f(u(t)) \tag{1-3-6}$$

这种电容元件称为时不变的。反之，则称为时变的。金属氧化物半导体(MOS)电容器的模型就是时不变的单调型非线性电容元件，其 q-u 曲线如图 1-11 所示。

如果单调电容的电荷与电压关系函数 $h(\cdot,t)$ 和 $f(\cdot,t)$ 是线性函数(对于所有的 $t\geqslant 0$)，则是线性电容元件，其元件特性方程可写为以下形式：

$$q(t) = C(t)\cdot u(t) \tag{1-3-7}$$

式中 $C(t)$ 是线性电容元件于 t 时刻的电容之值。如果 $C(t)$ 是不随时间 t 而改变的常数，即元件特性方程为

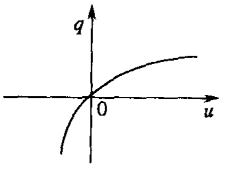

图 1-11

$$q(t) = Cu(t) \tag{1-3-8}$$

则该电容元件是线性时不变的。如不特殊声明，一般电容器的电路模型就是线性时不变电容元件。

对于电网络的四个基本变量 u、i、q、ψ，在网络分析与综合以及工程实践中经常使用的是电压与电流这两个便于检测的变量，可称为常用网络变量。由于电容元件的特性不是由常用网络变量 u、i 关系来定义的，故有必要研究电容元件的电压与电流之间的关系。为了根据电容元件的 q-u 特性得到 u-i 关系方程，应用式(1-1-2)所示关系

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-3-9}$$

于下列几种 q-u 特性的情形。

(1)压控型非线性时变电容。元件特性为

$$q(t) = f(u(t),t)$$

则 u-i 关系方程为

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(u(t),t) = \frac{\partial f(u,t)}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f(u,t)}{\partial t} \tag{1-3-10}$$

(2)荷控型非线性时变电容。元件特性为

$$u(t) = h(q(t),t)$$

u-i 关系方程为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h(q,t)}{\partial q}\cdot i(t) + \frac{\partial h(q,t)}{\partial t} \tag{1-3-11}$$

(3)线性时变电容。由式(1-3-7)的元件特性可得 u-i 关系方程如下：

$$i(t) = C(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + u(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-3-12}$$

(4)线性时不变电容。根据式(1-3-12)得

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-3-13}$$

例 1-3 在图 1-12 所示电路中，压控非线性时变电容的元件特性为

$$q(t) = f(u(t), t) = (1 + 0.5\sin t)u^3(t)$$

激励源电压为 $u(t)=\sin\omega t$。求电容电流 $i(t)$。

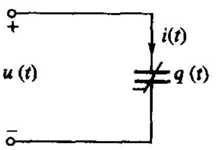

图 1-12

解：由式(1-3-10)可得电容电流

$$i(t) = (1 + 0.5\sin t)\cdot 3u^2(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + 0.5\cos t\cdot u^3(t)$$

$$= 3\omega(1 + 0.5\sin t)\sin^2\omega t\cos\omega t + 0.5\sin^3\omega t\cos t$$

下面研究非线性电容的小信号行为。考察一个压控电容，其 q-u 关系为

$$q(t) = f(u(t)) \tag{1-3-14}$$

若电源电压 $u(t)$ 由时变偏置 $U(t)$ 和小信号 $\delta u(t)$ 两部分组成，即

$$u(t) = U(t) + \delta u(t) \tag{1-3-15}$$

相应地，电容电荷也可以表示为两部分之和：

$$q(t) = Q(t) + \delta q(t) \tag{1-3-16}$$

式中 $Q(t)$ 为仅由于偏置电压 $U(t)$ 存在而储存的电荷，$\delta q(t)$ 是对应于 $\delta u(t)$ 的小信号电荷。由

$$Q(t) = f(U(t)) \tag{1-3-17}$$

$$Q(t) + \delta q(t) = f(U(t) + \delta u(t)) \tag{1-3-18}$$

并根据 $f(\cdot)$ 连续和 $\delta u(t)$ 足够小的条件，可得小信号电荷与小信号电压之间的关系：

$$\delta q(t) = f'(U(t))\cdot\delta u(t) = C_d(t)\cdot\delta u(t) \tag{1-3-19}$$

式中 $f'(U(t))$ 是非线性函数 $f(\cdot)$ 在 $U(t)$ 处之导数，它是时间 t 的函数。将上式与式(1-3-7)相比较，可以看出，$C_d(t)=f'(U(t))$ 是原非线性电容元件的小信号等效电容，又称动态电容。

从以上研究可得如下结论：在时变偏置电压源作用下，一个非线性时不变电容元件的小信号等效电容是线性时变电容。如果希望得到参数可调的线性时不变小信号等效电容，则偏置电源应采用电压可调的直流电源。以下举例中的电子调谐装置就是基于这一原理的。

例1-4 图 1-13 为一个电子调谐装置的电路，其中非线性时不变电容的 q-u 特性为

$$q = \frac{1}{2}ku^2 \qquad (k \text{ 为正实常数})$$

偏置电源为电压 U_0 可调的直流电压源，信号电压 $u_s(t)$ 相对于 U_0 而言可视为小信号。试求电路对小信号的谐振频率与偏置电压的关系式。

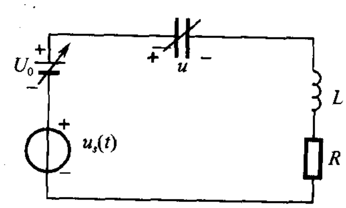

图 1-13

解：在偏置电压 U_0 作用下，非线性电容元件的小信号等效电容为

$$C_d = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}ku^2\right)\Bigg|_{u=U_0} = kU_0$$

电路对小信号的谐振频率：