111

机械工程模糊优化方法

谢庆生　罗延科　李屹　编著

机 械 工 业 出 版 社

模糊数学近年在社会科学、自然科学及工程技术等各个领域得到了广泛的应用，其中在机械工程中已应用于产品生产过程的设计、制造、控制及管理等多个方面。工程技术人员以模糊数学为工具，对机电产品整个生命周期中的各个环节进行优化，从而有效地推动了机电产品向高品质、高性能、高新技术方向发展，并已取得了显著的成效。目前，模糊优化技术正日益受到机械工程技术人员的重视，其应用继续向纵深方向发展，显示出广泛的应用前景和蓬勃的生命力。

本书系统地介绍了模糊数学基础、模糊模式识别、模糊矩阵与模糊关系、模糊聚类分析和模糊综合评判，同时结合机械工程应用写入了机械模糊优化设计、机械多目标模糊优化设计、机械模糊可靠性优化设计等内容。

本书可作为产品设计人员、机械工程技术人员、制造业企业管理人员等的技术参考书，也可用于高等学校机械类专业的教师、研究生及高年级大学生的教学参考。

图书在版编目（CIP）数据

机械工程模糊优化方法/谢庆生等编著．—北京：机械工业出版社，2002.5

ISBN 7-111-10234-7

Ⅰ．机… Ⅱ．谢… Ⅲ．模糊数学-应用-机械工程 Ⅳ．H123

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 035328 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：曾 红 版式设计：张世琴 责任校对：吴美英
封面设计：陈 沛 责任印制：何全君
北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2002 年 7 月第 1 版 · 第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5 · 6.75 印张 · 262 千字
0 001—3 000 册
定价：20.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527
封面无防伪标均为盗版

前　言

随着社会进步和科学技术不断地发展，事物间的组织和系统也越来越大，相互联系也会错综复杂，致使客观事物系统复杂性增加，则系统精确表征的能力就减小。在这些复杂事物的众多因素中包含不确定性，除了可用已经成熟的概率论和数理统计方法研究随机事件现象以外，还有更为普遍的不确定性，即模糊性，对于这类问题不可能用传统的精确数学来解决，必须有一门独立的学科来描述和处理模糊性的客观事物，这就诞生了“模糊数学”。该学科由美国控制论专家California 大学的 L. A. Zadeh 教授，首先提出了“模糊集合论”所创立的。

由于模糊数学的深入研究和发展，在社会科学、经济管理、系统控制、国防军事技术、工程技术、医疗诊断、交通运输、地震预测、遥感及信息、语言、历史、农业及各种形式的评估等各类学科领域都得到广泛的应用。模糊技术在机械工程方面，以英国工程师 Manindani 于 1974 年首次成功地开创了蒸汽机车的模糊控制，揭开了应用的新篇章，随之在模糊运算、认别、控制、评判、决策、规划、预测、分析和综合故障诊断及仿真等各个范畴中获得广泛的应用，并取得丰硕的成果，也受到科学及工程界越来越多的重视。

为了便于广大读者学习，本书从机械工程应用出发，密切联系实际，在理论阐述方面力求深入浅出，遵循认识论的规律，以典型实例，循序渐近地贯穿在全书内容之中，集理论与应用于一体。

本书部分内容是作者多年来为研究生开设《模糊数学其应用》、《机械的模糊设计》等教学以及指导研究生科研及学位论文的成果。

以认识事物不确定性的模糊现象和模糊性为起点，揭示了本书第 1 章绪论的序幕；在第 2 章模糊集合及其运算与第 3 章模糊矩阵及模糊关系中，介绍了模糊数学的基本运算法则及性质；第 4 章模糊模式识别、第 5 章模糊聚类分析及隶属函数、第 6 章机械制造中的模糊综合评判等三章，从模糊数学理论逐渐引入第 7 章机械模糊优化方法与第 8 章机械多目标模糊优化，编写了非线性数学规划相关的机械零件及机械系统方面的模糊优化方法；第 9 章机械的模糊可靠性优化设计，论述模糊随机规划在机械工程中的应用实例。

本书由谢庆生编写第 1 章、第 3 章、第 4 章、第 7 章，罗延科编写第 5 章、第 6 章、第 8 章，李屹编写第 2 章和第 9 章。

在编写本书的过程中，得到了贵州工业大学 CAD 研究所几位同仁的大力帮助，在此谨致以衷心的感谢。由于时间仓促、水平有限，疏漏和错误之处再所难免，恳请广大读者批评指正。

目　　录

第1章 绪　　论

1.1 模糊性现象及概念

1.1.1 模糊性现象

在机械工程中，普遍存在着模糊现象，例如人们常对材料议论为“高强度”、“中等强度”或“低强度”；对传动机构所提到的“高速”、“中速”或“低速”传动。日常生活中别人告诉我们此人的特点是“老年人”、“大胖子”或“大胡子”等等，都是模糊性现象。这些特征没有具体给出一个明确的界线，如材料强度多少MPa才算是高强度？要对这类现象给出明确的描述，往往使问题变得更为复杂且困难，因为描述的对象特征不清，人在观察这个对象时易将其混淆起来，因此，不得不用“模糊”这个概念来表现。模糊一词来自英文“Fuzzy”，意思是“模糊的”或“不清楚”。所谓“模糊”是指边界模糊，即概念在质上没有确切的含义，在量上没有明确的界限，这种边界不清的概念称为模糊概念。我们把这种由于概念外延的模糊而造成的划分上的难确定性，称为“模糊性”。

如图1-1所示，在U范围（称为论域）内分布一些线条，若在U上画一个圆圈A，表示哪些线条在A之内。然而有的线条在圆圈A边界上，这种情况如何计算呢？对于精确数学，德国科学家康托(G. Cantor)于1895年创立的集合论，是以“是”与“非”标准来区分，“1”表示100%在圆圈内，“0”表示100%不在圆圈内。

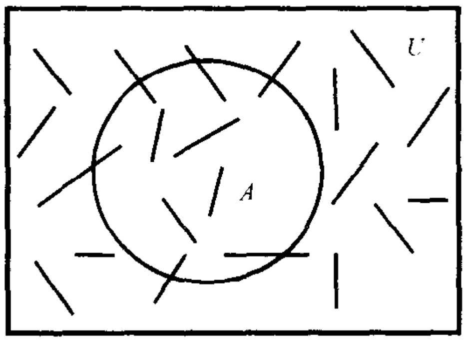


图 1-1

用数学表达式表达是给一个性质P，将所有满足性质P的对象集在一起（像完全在A内的线条一样）构成一个集合，用符号表示为

$$A=\{a|P(a)\}$$

其中a表示A的任何一个元素（在A内的一段线条），P（a）表示具有性质P“（）”，从而表明具有性质P的a汇成一个集合。也可以用概括原则表示为另一种形式

$$(\forall a)(a\in A\Leftrightarrow P(a))$$

其中“$\forall$”表示“对每一个”，“$\in$”表示“属于”，“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”。

康托要求组成集合的对象是确定的，即真就是真，假就是假，形成的是二值逻辑，如“1”和“0”是绝对化，两者只居其一。而在日常生活中大量的模糊现象，如像 A 的边界线条一样，需要量化和数字化。解决模糊性这类领域的问题，只有改造数学使它应用面更为广泛才行，模糊数学正是在这样的背景下诞生的。

1.1.2 模糊概念

将上面的问题绝对化区分，给数学自身的应用和发展带来了很大的局限性。如何计算模糊性现象问题，如“胖子”这个问题，是 200kg 以上或是 160kg 算胖子，这个“胖子”概念在康托意义下的集合不能用，必须改造康托的集合，即用“1”与“0”两个值不够，还须在“1”与“0”之间采用其他中间状态的逻辑值来表示不同的真确度。美国著名的控制论专家 L. A. Zadeh（扎德）教授，首先提出并引进了“隶属函数”的概念来处理模糊事物间的过渡，例如以上论域 U 中集合 A 为“若线段有 20%（=0.2）在 A 圆内……”；

若线段有 20%（=0.2）在 A 圆内的有多少条？称为隶属度为 0.2 有多少条？

线段 50%（=0.5）在 A 圆内的有多少条？称为隶属度为 0.5 有多少条？

线段 70%（=0.7）在 A 圆内的有多少条？称为隶属度为 0.7 有多少条？

线段 100%（=1）在 A 圆内的有多少条？称为隶属度为 1 有多少条？

上例说明 A 有外延，同时“胖子与瘦子”的概念也有外延。概念包括有内涵和外延，所谓的内涵是指符合此概念所具有的共同属性，例如“男人”就是一个概念，内涵就是男人所有的特征；外延是符合此概念的全体对象所组成的集合，男人这一概念的外延就是全体男人。“胖子与瘦子”一些对立的概念没有绝对分明界线，严格地说他们的外延都是不确定的。模糊概念是外延不明确的概念，或具有外延的概念。

1.2 模糊性与随机性

模糊数学与概率论是两个不同的学科，但这两门学科有某些相似的地方，即处理和研究不同的不确定性，度量这种不确定性都在 [0、1] 闭区间上取值。

模糊数学研究处理具有模糊性的现象，概率论研究处理具有随机性的随机现象，现将它们不同点归纳如下：

随机性：

1） 概念本身是明确的处理随机现象；

2） 表现事件的出现与否的不确定性；

3） 用概率刻画事件发生的不确定性大小的数量指标；

4） 由随机性去把握广义的因果规律，即概率规律。

模糊性：

1） 概念本身是不明确的现象；

2）概念外延的模糊性使划分上不确定性；

3）通过隶属度来刻画，以它作为关系上不确定性大小的数量指标；

4）从模糊性中去确定广义的排中律即隶属规律。

尽管随机性与模糊性有着本质的不同，但两者之间却可以互相渗透，由此就产生了模糊概率的理论，在机械工程领域中推动了模糊可靠性设计及模糊可靠性优化设计的发展。

1.3 模糊数学的发展概况

模糊数学的诞生，始于1965年美国加利福尼亚大学控制论教授L. A. Zadeh（扎德）发表模糊数学的第一篇论文《模糊集》。文章中首先提出了“模糊集合”的概念，建立了模糊集合的“并”、“交”、“补”的运算。1968年Chang提出模糊拓扑空间。1968年Zadeh讨论了模糊事件的概率问题，1969年他收进了模糊语法。1970年R. E. Bellman和L. A. Zadeh教授提出了“模糊优化”的概念，为多目标优化和涉及生产管理、调配等模糊因素较多领域内之线性规划提供了有效工具。1975年L. A. Zadeh教授发表了《语言变量的概念及其在近似推理中的应用》一文，使得信息的内容和意义的传输与逻辑加工成为一种可能。1978年L. A. Zadeh教授提出了“可能性理论”，此理论使模糊数学广泛地应用于人工智能。1978年国际性杂志《模糊集与系统》创刊。1984年国际模糊系统协会成立，同年在美国夏威夷召开了“第一届 模 糊 信 息 处 理 国 际 会 议”。1985 年 国 际 模 糊 系 统 协会在西班牙召开了第一次世界大会，随后召开了多次世界性的大会。

从每年发表论文的数量看，1962年2篇，1970年69篇，1980年1500篇，到1990年已达到7300篇以上；从论文涉及面来看，模糊数学已应用到自然科学、社会科学的各个领域。

模糊技术随着模糊数学理论发展的同时，在开发应用方面也取得了显著的成果。1974年英国工程师Mamdani成功地完成了世界上第一个模糊控制实例：蒸汽机的模糊控制。1977年英国的Pappis和Mamdani合作，将模糊控制理论用于十字路口交通控制系统，使得车辆平均等待的时间减少了7%。1983年日本学者山川烈研究成功一种基于语言真值推理的模糊逻辑控制器，成功地用于汽车速度的自动控制。仅1989年和1990年就申报了有关模糊技术的专利2000项。据1988年的统计，世界上100个模糊产品中约有80个是日本制造的，诸如松下电器推出的全自动的模糊洗衣机、电饭锅等。德国著名的奔驰汽车公司开始研制“模糊控制汽车”。由于模糊控制系统的开发和研究，完全有理由相信，今后市场会出现更多的“模糊产品”。

我国的模糊数学研究工作开始于20世纪70年代，首篇论文是张绵文、潘雪海的《弗齐集合论》，发表在1976年第9期《计算机与应用数学》杂志上。随后汪培庄等于

1978 年 10 月 13 日在《光明日报》发表《介绍一门新的数学——模糊数学》的文章。1980 年 11 月汪浩等译著的《模糊集在系统分析中的应用》一书出版。1981 年《模糊数学》杂志创刊。1982 年成立了“中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会”，迄今为止，该委员会已召开了九次年会。我国还分别于 1985 年（北京）、1987 年（广州、贵阳）和 1990 年（北京）成功地主办了三次国际会议。

尽管如此，在模糊技术应用开发上，我们与国外相比还有很大差距。为了迅速扭转这一局面，国家教委已投资几十万美元在北京师范大学建立了模糊技术研究开发的重点实验室，加强应用开发。1989 年国家自然科学基金委员会将“模糊信息与机器智能”课题列为重大研究项目，1994 年国家经济贸易委员会把模糊技术产品开发作为国家技术开发项目。专项投资上亿元。国家技术监督局制定了各种模糊产品的国家标准。

在模糊数学学科中，我国的理论研究与国外的差距较小。我们相信通过广大模糊数学及模糊技术开发研究工作者的不懈努力，在国家的大力支持下，模糊技术在我国的经济建设中将做出更大的贡献。

1.4 机械工程中优化的模糊性

机械模糊优化方法与常规优化方法的不同在于目标函数、约束条件及设计变量中考虑了种种因素。在机械设计及工艺中所要考虑的因素，主要是零件的强度、断面形状及尺寸、材料的机械性质、载荷工况、热处理工艺、加工工艺等。此外，还必须考虑结构及工艺的经济实用。安全可靠以及人文因素，如政治影响、经济政策环境条件及市场情况等，而这些因素大多具有比较强烈的模糊性。因此，在机械工程中的优化问题，大都要涉及到各种模糊因素，就构成了机械的模糊优化问题。

以前，由于缺乏处理模糊概念的方法和手段，所以把许多本来是模糊的量人为地当成是确定量，在普通的优化设计中忽略了客观存在的模糊性，使得设计变量和目标函数不能达到应有的取值范围，所以往往会漏掉真正的优化方案，甚至会带来一些矛盾的结果。现在，有了处理模糊概念的方法和手段，为了使我们的设计更加符合客观实际，取得更好的设计效果，就应该赋予模糊性的本来面目，这必然要涉及到在机械工程中应用模糊优化方法问题。

随着机械工程中研究对象的复杂化，必然要遇到大量的模糊因素，而现代信息化、人工智能化的发展，也要对模糊信息进行识别和处理。由于机械工程控制与现代各科学领域间相互交叉，新的设计理论和方法、新的技术不断涌现，机械工程模糊优化问题应用更趋于广泛。本书后面各章中重点地叙述机械制造中的择优、机械模糊优化、机械模糊多目标优化及机械模糊可靠性优化设计，并尽量结合机械工程中的应用实例，以使读者学以致用。

第 2 章　模糊集合及其运算

2.1　集合的基本知识及运算

模糊集合是在普通集合的基础上推广和扩充发展起来的，因此在学习模糊集合前有必要了解普通集合的基本理论知识。

2.1.1　集合的概念

定义 1　具有某种共同性质的事物的全体称为集合，而集合中的每一个事物称为集合的元素。

例 1　某车间车工班的工人组成一个集合，该班每一个车工是该集合的一个元素。

若集合内不含任何元素，称此集合为空集，用“ϕ”表示。

习惯上，集合用大写字母 A、B、Y、Z…来表示；用小写的字母 a、b、c…表示集合的元素。

若 a 是集合 A 的一个元素，记为

$$a \in A$$

读作“a 属于 A”。

若 a 不是集合 A 的元素，记为

$$a \notin A$$

读作“a 不属于 A”。

定义 2　若集合 B 的每一个元素都属于集合 A，则称 B 是 A 的子集；否则称 B 不是 A 的子集，记为

$$B \subseteq A \text{ 或是 } A \supseteq B$$

称为 A 包含 B 或 B 被包含于 A。

若 B 不是 A 的子集，记为

$$B \nsubseteq A \text{ 或是 } A \not\supseteq B$$

称为 A 不包含 B 或是 B 不属于 A。

2.1.2　集合的表示方法

1. 枚举法

当集合的元素为有限个数时，可将一个集合的全部元素列出，并用花括号括

起来。

例 2 以自然数 0，1，2，3，4，5 为元素的集合 A 可记为：

$$A=\{0,1,2,3,4,5\}$$

例 3 设 A 为机修工人技术水平优、良、中、差的集合记为

$$A=\{\text{优},\text{良},\text{中},\text{差}\}$$

2. 描述法

通过描述集合元素的共同特征来表示集合的方法，称为描述法，用记号

$$A=\{x|P(x)\}$$

表示 A 是由满足性质(或条件)$P(x)$的全体 x 构成的集合。

例 4 若 $P(x)$表示"数 x 的平方等于 4"这一性质，则满足这一条件的 x 所组成的集合表示为：

$$\{x|x^2=4\}$$

显然，它是由 -2 与 2 的两个数组成的集合，用枚举法可表示为：$\{-2,2\}$

即
$$\{x|x^2=4\}=\{-2,2\}$$

2.1.3 集合的运算

1. 并集

定义 3 设 A、B 为论域中的两个集合，则由集 A 与集 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记为：

$$A\cup B$$

由定义知，并集 $A\cup B$ 的元素或属于 A 或属于 B，因此 $A\cup B$ 又可记为：

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

例 5 若论域 $U=\{1,3,4,5,8,9\}$，U 中的两个子集分别为：

$$A=\{1,4,8,9\}$$

$$B=\{3,5,8,9\}$$

则有
$$A\cup B=\{1,3,4,5,8,9\}$$

2. 交集

定义 4 设 A、B 为论域的两个集合，则由集合 A 与集合 B 所有公共元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记为：

$$A\cap B$$

由定义知，交集 $A\cap B$ 中的元素既属于 A 又属于 B，因此 $A\cap B$ 又可记为：

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

由上例，得

$$A\cap B=\{8,9\}$$

3. 余集(或补集)

定义 5 设 A 是论域 U 中的一个子集，则由论域 U 中不属于集 A 的所有元素

构成的集合，称为集合 A 的余集(或补集)，记为：

$$A^c$$

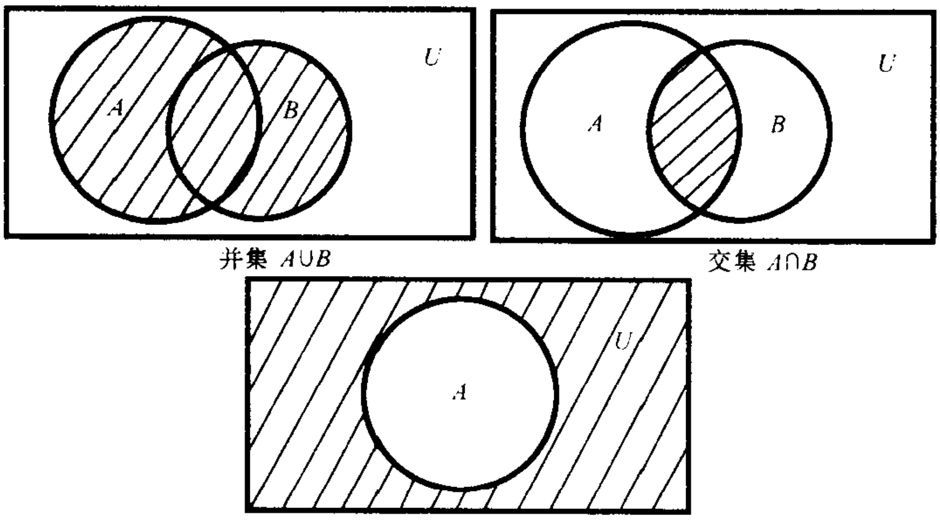
由定义知，余集 A^c 的元素不属于 A，但属于 U，因此 A^c 又可描述为：

$$A^c=\{u\,|\,u\in A \text{ 但 } u\in U\}$$

例 6 设 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$A=\{b,d,e\}$

则有 $$A^c=\{a,c\}$$

以上的运算，可以由直观图形来表示，如图 2-1。



并集 $A\cup B$　　交集 $A\cap B$

余集 A^c

图 2-1 集合运算

4. 直积(或笛卡儿乘积)

定义 6 设 U、V 是两个论域，记

$$U\times V\triangleq\{(u,v)\,|\,u\in U,v\in V\}$$

则将 $U\times V$ 称为 U 与 V 的直积，符号"$\triangleq$"表示右边定义左边。

用语言来描述，就是在 U 中取一个元素 u，又在 V 中取一个元素 v，把它们反搭配起来成为 (u,v)，叫做序偶(注意，"序偶"是有顺序的)，所以，一般 $(a,b)\neq(b,a)$。所有这样的序偶的全体构成集合就是直积，为两个集合间的无约束搭配。

两个集合的直积可以推广到多个集合上去，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是几个集合，

则 $$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\triangleq\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1\in A_1,x_2\in A_2,\cdots,x_n\in A_n\}$$

例 7 设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{*,\bigtriangledown,\triangle\}$，求 $A\times B\times C$。

解：$A\times B\times C=\{0,a,*,),(0,b,*),(1,a,*),\cdots,(1,b,\bigtriangledown)\}$。

它是由 12 个元素组成的集合。

2.1.4 关系

1. 关系的概念

定义 7 若从 U 到 V 的关系是 R，则其论域为直积 $U\times V$ 的一个子集，即 $R\subseteq U\times V$，记为：

$$U\xrightarrow{R}V \tag{2-1}$$

对于$U\times V$中的元素(u,v)，若$(u,v)\in R$，则说u与v有关系R；若$(u,v)\notin R$，则说u与v没有关系。

例 8 设$U=\{$张山，李时，王尔$\}$

$V=\{$优，良，中，差$\}$

在某次考核中，张山得优，李时得良，王尔得良，则构成一个关系

$$R=\{(\text{张山},\text{优}),(\text{李时},\text{良}),(\text{王尔},\text{良})\}$$

可见R是$U\times V$的一个子集。

2. 关系的表示方法

(1) 列表法

将被考核人员与评分等级列于表 2-1。表中用“1”表示$(a,b)\in R$，“0”表示$(a,b)\notin R$。例如表 2-1 中“1”的位置对应着横行中的张山，纵列中的优，这表示(张山，优)$\in R$；类似的，“0”表示张山不属于良；……

表 2-1

R	优	良	中	差
张山	1	0	0	0
李时	0	1	0	0
王尔	0	1	0	0

一般地，对有限域上的关系可用图来表示。例如前例中关系可以表示为图 2-2，画法是：若$(a,b)\in R$，则从a到b连一条线。否则，不连。

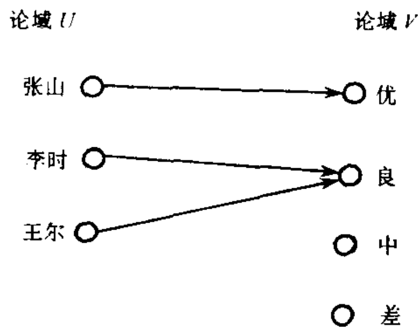


图 2-2

(2) 用矩阵表示

设论域U、V都是有限论域，此时关系R可以用一个矩阵$\boldsymbol{R}$来表示：

$$\boldsymbol{R}=(r_{ij})_{m\times n} \qquad (2\text{-}2)$$

其中$\boldsymbol{R}$为矩阵，$r_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{R}$中的元素，$r_{ij}\in\{0,1\}$。

例如，在前面的例子中的关系可表示为矩阵，

$$\boldsymbol{R}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\text{优} & \text{良} & \text{中} & \text{差}\end{matrix} \\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{张山}\\ \text{李时}\\ \text{王尔}\end{array}$$

以上介绍了U到V的关系。一般来说$U\neq V$，当$U=V$时，关系的表示更简单。

2.1.5 映射

1. 映射

映射的概念是函数概念的推广，它是集合间的一种对应关系。

定义 8 给定集合 A、B，若对$\forall\ a\in A$，存在一个对应法则 f，使得有唯一确定的 $b\in B$ 与其对应，则对应法则 f 称为从 A 到 B 的映射，记为：

$$f: A\to B \tag{2-3}$$
$$a\ \mapsto f(a)=b$$

这里 $A\to$ 指明 f 是从 A 到 B 的映射，$a\ \mapsto b$ 则指明具体的对应法则。A 称为映射 f 的定义域，记为 D_f；而 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}\in B$ 称为 f 的值域，记为 R_f，且 $a\in A$ 称为"原像"，$f(a)=b\in B$ 称为 a 在映射 f 下的"像"。

2. 映射的扩张

映射可以从两个方面进行推广，一方面是把一个从 U 到 V 的映射直接扩张成从 $P(U)$ 到 $P(V)$ 的映射；另一方面是从映射本身进行扩张，以后将会看到，这种推广是很有益处的。

定义 9 （经典扩张原则）设 U，V 为非空集，给定映射

$$f: U\to V \tag{2-4}$$
$$u\ \mapsto v=f(v)$$

称为 $P(U)$ 到 $P(V)$ 的新映射

$$F: P(U)\to P(V)$$
$$A\ \mapsto B=F(A)=\{v\mid v\in V,\exists\ u\in A,v=f(u)\}$$

为 f 的一个扩张，也称 F 是由 f 诱导出的（符号$\exists$ 表示存在）。这是由 f 诱导出的新映射 F，是子集与子集的对应，即对于 U 的任一子集 A，通过 F 都有 V 中唯一确定的子集 B 与 A 对应。

例 9 设 $U=\{1,2,3\}$，$V=\{2,4,6\}$ 为两集合，给定映射

$$f: U\to V$$
$$u\ \mapsto 2u=v$$

求由 f 扩张而成的从 $P(U)$ 到 $P(V)$ 的映射。

解：根据定义，由 f 扩张的映射为

$$\{1\}\ \mapsto\{2\};\{1,2\}\ \mapsto\{2,4\}$$
$$\{2\}\ \mapsto\{4\};\{1,3\}\ \mapsto\{2,6\}$$
$$\{3\}\ \mapsto\{6\};\{2,3\}\ \mapsto\{4,6\}$$
$$\Phi\ \mapsto\Phi\qquad U\ \mapsto V$$

2.2 模糊集合的定义及运算

经典数学通过特征函数过渡到模糊数学，因此，这里有必要对特征函数有所了解。