高等数学

（同济五版）

习题全解

（上册）

杨中兵　杨逢建　王兆生　主编

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学
（同济五版）

习题全解
（下册）

王学理　谭千蓉　梁学忠　主编

NEUPRESS
东北大学出版社

高等数学（同济五版）

习题全解

- 高等数学（同济五版）习题全解（上册） 12.00元
- 高等数学（同济五版）习题全解（下册） 12.00元

ISBN 7-81054-838-7

9 787810 548380 >

ISBN 7-81054-838-7 总定价：24.00元

高等数学

（同济五版）

习题全解

（上册）

高等数学习题全解

主　编　杨中兵　杨逢建　王兆生
副主编　曲中宪　邢丽君　侯玉娟

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解（上册）/ 杨中兵，杨逢建，王兆生主编. 一 沈阳：东北大学出版社，2003.5

ISBN 7-81054-838-7

Ⅰ.高… Ⅱ.①杨… ②杨… ③王… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 015113 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市市政二公司印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

幅面尺寸：140mm×203mm

印 张：20.25

字 数：616 千字

出版时间：2003 年 5 月第 1 版

印刷时间：2003 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑：刘 莹 刘宗玉 责任校对：文 玉

封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

总 定 价：24.00 元

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解（下册）/ 王学理，谭千蓉，梁学忠主编. — 沈阳：东北大学出版社，2003.5

ISBN 7-81054-838-7

Ⅰ.高… Ⅱ.王… ②谭… ③梁… Ⅲ.高等数学—高等学校—解题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 015113 号

出 版 者：东北大学出版社

地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号

邮编：110004

电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）

传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）

E-mail：neuph @ neupress.com

http：//www.neupress.com

印 刷 者：沈阳市市政二公司印刷厂

发 行 者：新华书店总店北京发行所

幅面尺寸：140mm×203mm

印 张：20.25

字 数：616 千字

出版时间：2003 年 5 月第 1 版

印刷时间：2003 年 5 月第 1 次印刷

责任编辑：刘 莹 刘宗玉

责任校对：文 玉

封面设计：唐敏智

责任出版：杨华宁

总 定 价：24.00 元

前　　言

由高等教育出版社出版、同济大学应用数学系主编的《高等数学》一书，是目前国内公认最好的“高等数学”教材之一，广泛使用于各高等院校．该书结构严谨、逻辑清晰，并因为在使用过程中的不断修订而使其日臻完善，目前已出至第五版，是国内用量最多的高等数学教材之一．

为了帮助广大学生学好同济五版《高等数学》，我们编写出这套《高等数学习题全解》．之所以编写同济五版《高等数学》的“习题全解”，主要考虑的是该书作为国家级优秀教材的权威性以及该书习题编排合理、难易适中，能体现出学习高等数学应达到的水平．《高等数学习题全解》以同济五版《高等数学》为蓝本，给出所有习题的详细解答，适合于使用同济五版《高等数学》的学生们．对于刚刚跨进大学门槛的大学生，面对概念抽象、运算繁杂的高等数学，往往感到力不从心．而编写本书的宗旨恰恰是帮助学生们熟悉教材、做好习题，在需要的时候助一臂之力，起到课下辅导的作用．

本书有下述三方面的特点：

1．全面．教材中所有的习题，包括所有带 * 的习题，均有解答．这主要是考虑到地域、学校之间的差别和学生基础不尽相同，各种问题可能都会遇到，加之学生对做过的习题需全部核对，所以对所有习题均给出解答，以满足学生的不同需求．

2．详尽．这里主要是指解题过程详尽，使学生对解题过程有一个全面、清晰的了解，以加强对概念的理解和方法的掌握；详尽的另一方面是对有些习题给出多种解法．

3. 指导性. 解题过程中特别注意对解题方法的叙述，对一些难题还给出解题思路及提示，并举一反三，意在使学生能理解概念、熟悉路径、掌握方法. 结合作者多年的教学经验，对一些典型题，指出易犯的错误，并剖析原因，避免以后犯类似错误. 还特别介绍了一些方便快捷的解题方法与技巧，并力争给出最简解题方法.

同时应该指出的是，虽然本书可以说是学习同济五版《高等数学》的工具书，但要合理使用. 我们不赞成学生自己不动脑筋，依赖于本书的解答. 我们的忠告是，所有习题，学生首先应靠自己的力量去做. 习题能独立完成的，做题后再与解答对照，并检查解步骤是否繁复、方法是否最简等问题；对于做不上来的习题，认真思考后再看解答则会有更大的收获.

本书是《高等数学习题全解（上册)》，与同济五版《高等数学(上册)》配套使用. 由于"同济五版"的习题几乎包含了"同济四版"与"同济五版"的所有习题. 因此，使用同济大学应用数学系主编其他版本的"高等数学"的读者也可以放心地使用本书. 参加本书编写的还有马毅、纪德云、邵东南、王学理等同志. 由于编者水平有限，可能存在疏漏与不足，还望同仁及读者不吝赐教. 如果本书能在节省学生们的宝贵时间、提高学习效率等方面有一点作用的话，我们将深感欣慰.

编　者
2003 年 2 月

目　录

上 册

下 册

第一章　函数与极限

习题 1-1

1. 设 $A=(-\infty,\ -5)\cup(5,\ +\infty)$，$B=[-10,\ 3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$的表达式.

【解】 $A\cup B=(-\infty,\ 3)\cup(5,\ +\infty)$，$A\cap B=[-10,\ -5)$，$A\setminus B=(-\infty,\ -10)\cup(5,\ +\infty)$，$A\setminus(A\setminus B)=[-10,\ -5)$.

2. 设 A，B 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

【证】 设 $x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$，所以$(A\cap B)^C\subset A^C\cup B^C$.

反之，设 $x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$，所以 $A^C\cup B^C\subset(A\cap B)^C$.

于是，$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f\colon X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明：

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

【证】 (1) 设 $x\in A\cup B$ 且 $f(x)=y\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$或 $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cup f(B)$，所以 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$.

反之，设 $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$或 $y\in f(B)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow y\in f(A\cup B)$，所以$f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

于是，$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 设 $y\in f(x)\in f(A\cap B)\Rightarrow x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$ 且 $x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$且 $f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cap f(B)$，所以，$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

4. 设映射 $f\colon X\to Y$，若存在一个映射 $g\colon Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，

$f\circ g=I_Y$，其中 I_X，I_Y 分别是 X，Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_X x=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Y y=y$．证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$．

【证】 设对于任意的 $y\in Y$，存在 $x\in X$，使得 $x=g(y)\Rightarrow f(x)=f\circ g(y)=y$．

对于 X 中任意两个元素 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，要证明 $f(x_1)\neq f(x_2)$．用反证法：假设 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，矛盾．

所以 f 是双射．

根据定义，g 是 f 的逆映射．

5．设映射 f：$X\to Y$，$A\subset X$．证明：

(1) $f^{-1}[f(A)]\supset A$；

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}[f(A)]=A$．

【证】 (1) 对于任意 $x\in A$，则 $y=f(x)\in f(A)\Rightarrow f^{-1}(y)=x\in\{f^{-1}(y)\mid y\in f(A)\}=f^{-1}[f(A)]$，所以，$A\subset f^{-1}[f(A)]$．

(2) 对于任意 $x\in f^{-1}[f(A)]$，存在 $y\in f(A)$，有 $f^{-1}(y)=x$，即 $f(x)=y$．由 $x'\in A$ 得 $f(x')\in f(A)$．由于 f 是单射，则 $x=x'\in A$，所以 $f^{-1}[f(A)]\subset A$，从而 $f^{-1}[f(A)]=A$．

6．求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$．

【解】 (1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，定义域为$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$．

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$，定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$．

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$，定义域为$[-1,0)\cup(0,1]$．

(4) $4-x^2>0 \Rightarrow |x|<2$，定义域为$(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$，定义域为$[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}) \Rightarrow x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}-1\ \ (k\in\mathbf{Z})$，定义域为$\mathbf{R}\setminus\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}-1\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1 \Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$，定义域为$[2,4]$.

(8) $x\neq 0$ 且 $3-x\geqslant 0 \Rightarrow x\neq 0$ 且 $x\leqslant 3$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0 \Rightarrow x>-1$，定义域为$(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

7. 下列各题中，函数$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

【解】 (1) 不相同. $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}\setminus\{x=0\}$，而$g(x)$的定义域为$x>0$.

(2) 不相同. 因为值域不同. $f(x)$的值域为$\mathbf{R}$，$g(x)$的值域为$(0,+\infty)$.

(3) 相同. 两个函数的定义域和值域都相同，且对应法则也相同.

(4) 不相同. 因为定义域不同. $f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$g(x)$的定义域为$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\frac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\frac{\pi}{3},\end{cases}$$

求$\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数$y=\varphi(x)$的图形.

【解】 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$.

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1.

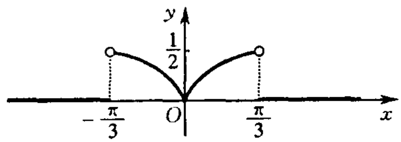

图 1-1

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,\ 1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0,\ +\infty)$.

【证】 (1) 设 x_1，$x_2\in(-\infty,\ 1)$且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$在$(-\infty,\ 1)$上单调增加.

(2) 设 x_1，$x_2\in(0,\ +\infty)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\ln x_1-(x_2+\ln x_2)$$

$$=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(x)$在$(0,\ +\infty)$上单调增加.

10. 设 $f(x)$为定义在$(-l,\ l)$内的奇函数，若 $f(x)$在$(0,\ l)$内单调增加，证明：$f(x)$在$(-l,\ 0)$内也单调增加.

【证】 设 x_1，$x_2\in(-l\ ,\ 0)$且 $x_1<x_2$，则有

$$-x_1,\ -x_2\in(0,\ l)\text{且} -x_2<-x_1.$$

由 $f(x)$在$(0,\ l)$内单调增加可得

$$f(-x_2)<f(-x_1),$$

因为 $f(x)$在$(-l,\ l)$内是奇函数，所以

$$f(-x_2)=-f(x_2),\ f(-x_1)=-f(x_1),$$

$-f(x_2)<-f(x_1)$，从而 $f(x_1)<f(x_2)$. 故 $f(x)$在$(-l,\ 0)$内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,\ l)$上的.
证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

【证】 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，即 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x)$，$g_2(x)$ 均为奇函数，即 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令

$$G(x)=g_1(x)+g_2(x),$$

则

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

【证】 设 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 均为偶函数，即 $f_1(-x)=f_1(x)$，$f_2(-x)=f_2(x)$. 令

$$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),$$

则

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(-x)=-g_1(x)$，$g_2(-x)=-g_2(x)$. 令

$$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x),$$

则

$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)\cdot g_2(-x)\\&=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]=G(x),\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=-g(x)$. 令

$$H(x)=f(x)\cdot g(x),$$

则

$$\begin{aligned}H(-x)&=f(-x)\cdot g(x)\\&=f(x)\cdot[-g(x)]\end{aligned}$$

$$= -f(x)g(x) = -H(x),$$

故 $H(x)$为奇函数.

12. 下列函数中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y = x^2(1-x^2)$;　　(2) $y = 3x^2 - x^3$;

(3) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4) $y = x(x-1)(x+1)$;

(5) $y = \sin x - \cos x + 1$;　　(6) $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$.

【解】 (1) $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2]$
$$= x^2(1-x^2) = f(x),$$

故 $f(x)$为偶函数.

(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3$,

故 $f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(3) $f(-x) = \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$,

故 $f(x)$为偶函数.

(4) $f(-x) = (-x)(-x-1)(-x+1)$
$$= -x(x+1)(x-1) = -f(x),$$

故 $f(x)$为奇函数.

(5) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1$,

故 $f(x)$既非偶函数又非奇函数.

(6) $f(-x) = \dfrac{1}{2}(a^{-x} + a^x) = f(x)$,

故 $f(x)$为偶函数.

13. 下列各函数中,哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y = \cos(x-2)$;　　(2) $y = \cos 4x$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$;　　(4) $y = x\cos x$;

(5) $y = \sin^2 x$.

【解】 (1) 是周期函数，周期为 2π.

(2) 是周期函数，周期为$\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数，周期为 2.

(4) 不是周期函数.

(5) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$，是周期函数，周期为 π.

14. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) $x=y^3-1$，反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $x=\frac{1-y}{1+y}$，反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) $x=\frac{b-dy}{cy-a}$，反函数为 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$.

(4) $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$，反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5) $x=e^{y-1}-2$，反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(6) $2^x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\frac{y}{1-y}$，反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性：已知 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，对任意 $x\in X$，取 $K=\max\{|M_1|, |M_2|\}$，则$|f(x)|\leqslant K$. 故 $f(x)$有界.

必要性：设$|f(x)|\leqslant M$ ($x\in X$，M 为常数)，则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，故 $f(x)$有上界 M，下界 $-M$.

16. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

(4) $y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

(5) $y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

【解】 (1) $y=\sin^2 x$，$y_1=\frac{1}{4}$，$y_2=\frac{3}{4}$.