全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

微积分
（经济类）

主　编　刘书田
编著者　刘书田　冯翠莲

北京大学出版社

S

Gaozhi Jiaoyu

微积分

（经济类）

全国高职、高专教育高等数学系列教材

微 积 分

（经济类）

主　编　刘书田
编著者　刘书田　冯翠莲

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分(经济类)/刘书田；冯翠莲编著. —北京：北京大学出版社，2002.11

(全国高职高专教育高等数学系列教材)

ISBN 7-301-05979-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘… ②冯… Ⅲ.微积分-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 087025 号

书 名：微积分(经济类)

著作责任者：刘书田 冯翠莲 编著

责 任 编 辑：刘 勇

标 准 书 号：ISBN 7-301-05979 5/O·0556

出 版 者：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址：http://cbs.pku.edu.cn

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021

电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者：北京大学印刷厂

发 行 者：北京大学出版社

经 销 者：新华书店

850×1168 32 开本 9.75 印张 240 千字

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

印 数：0001—5000 册

定 价：13.50 元

前　言

为了适应我国高等职业、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职、高专教育经济数学基础课程教学上的需要，我们依照教育部最新颁布的高等职业教育“经济数学基础课程教学基本要求”，为高职、高专经济类、管理类学生编写了教材《微积分》及配套辅导教材《微积分学习辅导》，《微积分》供一年级学生一个学期使用，讲授约 64～72 学时.

编写本套教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，按照“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，力求教材内容“涵盖大纲、易学、实用”.因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类经济数学课程教学要求，系统介绍了微积分的基本理论、方法及其应用. 本套教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣“教学基本要求”，慎重选择教材内容，强化概念，注重应用. 既考虑到经济管理类微积分本学科的科学性，又能针对经济类、管理类高职、高专班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到“学以致用”的目的.

2. 为了使学生掌握和应用所学知识，教材中每节配有适量习题. 习题按 A 组、B 组配置，每章配有总习题. A 组习题以基本题为主，B 组习题以综合题、提高题为主. 书后附有全书习题的参考答案与解法提示. 另外，每节的 B 组习题和各章的总习题有较详细的解题过程，这部分内容编排在本教材的配套辅导教材《微积分

学习辅导》一书中，供教师和学生使用.

3. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了与教材配套的辅导教材《微积分学习辅导》，主教材与辅导教材同步使用，但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容解析与解题指导、各节B组习题及每章总习题解答、自测题与参考解答四部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解的知识点；内容解析把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出进一步解释和分析，解题指导是通过典型例题归纳总结解题思路、解题方法，并指出初学者易犯的错误；自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，目的是检测学生在理解本章内容解析与解题指导的基础上，独立解题的能力.

4. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨.

本套教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助；在本书的编写过程中，参加讨论和审稿的有李平和葛作维等专家和教授，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2002年8月于北京

目　录

第一章　函数·极限·连续

函数、极限和连续都是微积分学的基本概念.函数是微积分学研究的对象;函数的极限和连续性的基本知识是研究微分学和积分学所必须具备的.

本章讲述函数概念、函数的特性和初等函数;介绍极限概念及其运算;讨论函数连续性概念和连续函数的性质.

§1.1　函　　数

一、函数概念

1. 函数定义

在我们的周围,变化无处不在.我们所看到的事物都在变化.其中,有一些变化着的现象中存在着两个变化的量,简称**变量**.这两个变化着的量不是彼此孤立的,而是相互联系、相互制约的.当其中一个量在某数集内取值时,按一定的规则,另一个量有惟一确定的值与之对应.变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的**非空数集**.若对于每一个数 $x\in D$,按照某一确定的**对应法则** f,变量 y 总有惟一确定的数值与之对应,则称 **y 是 x 的函数**,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围,也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集.由此,若 x 取数值 $x_0\in D$ 时,则称该函数在 x_0 **有定义**,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**,记作

$$f(x_0) \quad 或 \quad y|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为该函数的**值域**. 若 $x_0 \overline{\in} D$，则称该函数在点 x_0 没有定义.

由函数的定义可知，决定一个函数有**三个因素**：定义域 D，对应法则 f 和值域 Z. 注意到每一个函数值都可由一个 $x \in D$ 通过 f 而惟一确定，于是给定 D 和 f，Z 就相应地被确定了；从而 D 和 f 就是决定一个函数的**两个要素**. 当两个函数用不同的解析式表示时，这两个函数相等的充要条件是定义域相同且对应法则相同.

通过下面的例题来理解函数定义和函数的表示方法.

例 1 圆的面积 A 由圆的半径 r 决定. 只要 r 取定一个正数值，面积 A 就有一个确定的值与之对应，且 A 与 r 之间有关系式

$$A = \pi r^2 \quad (r > 0).$$

上述公式表明了变量 r 和 A 之间的函数关系.

这种用一个数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法称为**公式法**或**解析法**.

例 2 在气象观测站，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1-1 所示的曲线. 曲线上某一点 $P_0(t_0, \theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0. 观察这条曲线，可以知道在这一天内，时间 t 从 0 点到 24 点气温 θ 的变化情形. 时间 t 和气温 θ 都是变量，这两个变量之间的函数关系是由一条曲线确定的.

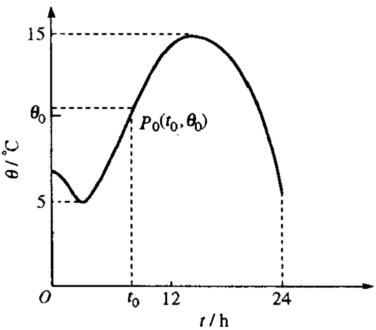

图 1-1

这种用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法，称为**图形法**.

例 3 为了预测某种商品的市场销售情况，调查了该商品 1～6 月份的销售数量，列表如下：

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 Q(千件)	100	105	110	115	111	120

上表表示了月份 t 与销量 Q 之间的函数关系. t 每取定表中列出的一个值，就有惟一确定的 Q 值与之对应，这种用表格表示两个变量之间函数关系的方法，称为**列表法**.

若用公式法表示函数，且仅给出一个数学式子，没给出自变量的取值范围，而要求确定该函数的定义域，这时，应考虑两种情况：其一是，确定使这一式子有意义的自变量取值的全体；其二是，对实际问题还应根据问题的实际意义来确定.

例 4 求函数 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}+\ln(x+2)$ 的定义域.

解 该函数由两项和构成，其定义域应是各项自变量取值范围的公共部分，每项分别讨论.

第一项是分式，其分子 x 可取任意值；对分母 $\sqrt{9-x^2}$，因偶次根的根底式应非负，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，又注意到分母不能为零，所以，只能有 $9-x^2>0$，即

$$-3<x<3,$$

写成区间则是 $(-3,3)$.

第二项 $\ln(x+2)$，因对数符号下的式子应为正，所以有

$$x+2>0,\quad 即\ x>-2,$$

写成区间则是 $(-2,+\infty)$.

上述两个区间之交是区间 $(-2,3)$，这就是所求函数的定义域.

例 5 设 $y=f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(1)$，$f(0)$，$f(-1)$，$f(x_0)$，

$f(-x), f(f(x))$.

解 这是已知函数的表达式，求函数在指定点的函数值. 易看出该函数对 x 取任何数值都有意义.

$f(1)$是当自变量 x 取 1 时函数 $f(x)$的函数值. 为求 $f(1)$，需将 $f(x)$的表示式中的 x 换为数值 1，得

$$f(1)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$f(1)$也可记作

$$y|_{x=1}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=1}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

同理可得

$$f(0)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=0 \quad 或 \quad y|_{x=0}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=0}=0,$$

$$f(-1)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

或

$$y|_{x=-1}=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

为求 $f(x_0)$，需将 $f(x)$的表示式中的 x 换为 x_0，得

$$f(x_0)=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|_{x=x_0}=\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}.$$

同理，将 x 换为$-x$，得

$$f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

将 $f(x)$的表示式中的 x 换为 $f(x)$的表示式，得

$$f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

2. 分段函数

两个变量之间的函数关系有的要用两个或多于两个的数学式子来表达,即对一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达,称为**分段函数**.

例 6 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2^x, & x>0,\end{cases}$ 按下列各项求:

(1) 定义域; (2) $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$.

解 这是分段函数,因为是用三个数学式子表示一个函数,$x=0$ 是分段函数的分段点.

(1) 分段函数的定义域是各段自变量取值范围之总和,依题设是$[-1,+\infty)$.

(2) 该函数的对应法则是:若自变量 x 在区间$[-1,0)$内取值,则相对应的函数值用 $y=x-1$ 计算;若 x 取 0,则对应的函数值是 $y=0$;若 x 在$(0,+\infty)$内取值,则对应的函数值用 $y=2^x$ 计算(图 1-2).由上述对应法则,所以

$$f(-1)=(x-1)\big|_{x=-1}=-2,$$
$$f(0)=0,\quad f(1)=2^x\big|_{x=1}=2.$$

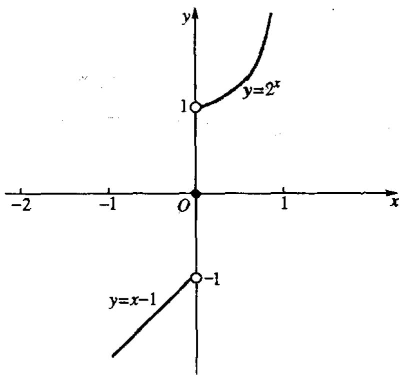

图 1-2

二、函数的几何特性

1. 函数的奇偶性

由图 1-3 看到，曲线 $y=x^3$ 关于坐标原点对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的一对函数值也恰是相反数，这时称 $y=x^3$ 为奇函数. 图 1-4 表明，曲线 $y=x^2$ 关于 y 轴对称，即自变量取一对相反的数值时，相对应的函数值却相等，这时，称 $y=x^2$ 为偶函数.

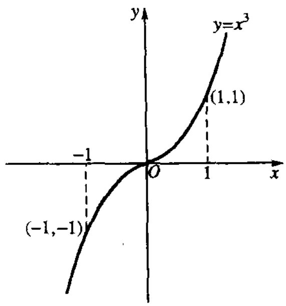

图 1-3

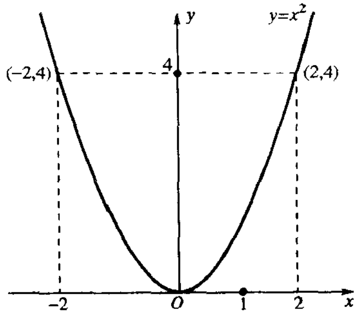

图 1-4

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于**原点对称**，若对任意 $x\in D$，有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形关于**坐标原点对称**；偶函数的图形**关于 y 轴对称**.

例 7 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^4+3x^2+1$；　　(2) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $f(x)=x^3+\cos x$.

解 用奇偶函数的定义判断函数的奇偶性，应先算出 $f(-x)$，然后与 $f(x)$ 对照.