普通高等工科院校基础课规划教材

复变函数与积分变换

杨巧林 主编
孙福树 刘锋 副主编

机械工业出版社
China Machine Press

复变函数与积分变换

50

普通高等工科院校基础课规划教材
扬州大学教材基金资助

复变函数与积分变换

主　编　杨巧林
副主编　孙福树　刘　锋
参　编　刘玉荣
主　审　管　平　刘金林

机械工业出版社

本书是普通高等工科院校基础课程规划教材，内容包括高等教育工科各专业所需要的复变函数和积分变换的基础知识．主要有复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，级数，留数，保角映射，傅里叶变换和拉普拉斯变换等．每章末附有小结和自测题，以便于读者自我学习时能够抓住重点和检查自己对本章学习的基本情况．书末附有习题答案和参考书目．

本书在编写过程中力求做到条理清楚、重点突出，注重解题方法的训练和思维能力的培养．本书可以作为高等教育工科各专业该课程的教材，亦可作为其他专业学习这门课程的教学参考书．本书使用学时建议为 48～64 学时．

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/杨巧林主编．—北京：机械工业出版社，2002．7

普通高等工科院校基础课规划教材

ISBN 7-111-10364-5

Ⅰ．复…　Ⅱ．杨…　Ⅲ①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ．017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 039214 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：高文龙　版式设计：张世琴　责任校对：姚培新

封面设计：陈　沛　责任印制：闫　焱

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 7 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·9 印张·299 千字

0 001－4 000 册

定价：20.00 元

序

人类已经满怀激情地跨入了充满机遇与挑战的21世纪.这个世纪要求高等教育培养的人才必须具有高尚的思想道德,明确的历史责任感和社会使命感,较强的创新精神、创新能力和实践能力,宽广的知识面和扎实的基础.基础知识水平的高低直接影响到人才的素质及能力,关系到我国未来科学、技术的发展水平及在世界上的竞争力.由于基础学科本身的特点,以及某些短期功利思想的影响,不少人对大学基础教育的认识相当偏颇,我们有必要在历史的回眸中求前车之鉴,在未来的展望中创革新之路.我们必须认真转变教育思想,坚持以邓小平同志提出的"三个面向"和江泽民同志提出的"三个代表"为指导,以培养新世纪高素质人才为宗旨,以提高人才培养质量为主线,以转变教育思想观念为先导,以深化教学改革为动力,以全面推进素质教育和改革人才培养模式为重点,以构建新的教学内容和课程体系、加大教学方法和手段改革为核心,努力培养素质高、应用能力与实践能力强、富有创新精神和特色的应用性的复合型人才.

基于上述考虑,中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅(原江苏省教委)和江苏省及省外部分高等工科院校成立了教材编审委员会,组织编写了大学基础课程系列教材.

这套教材力求具有以下特点:

(1)科学定位.本套教材主要用于应用性本科人才的培养.

(2)综合考虑、整体优化,体现"适、宽、精、新、用".所谓"适",就是要深浅适度;所谓"宽",就是知识面要宽些;所谓

“精”,就是要少而精;所谓“新”,就是要跟踪应用学科前沿,推陈出新,反映时代要求;所谓“用”,就是要理论联系实际,学以致用.

(3)强调特色.就是要体现一般工科院校的特点,符合一般工科院校基础课教学的实际要求.

(4)以学生为本.本套教材应尽量体现以学生为本,以学生为中心的教育思想,不为教而教.注重培养学生自学能力和扩展、发展知识能力,为学生今后持续创造性学习打好基础.

尽管本套教材设想以新思想、新体系、新面孔出现在读者面前,但由于是一种新的探索,难免有这样那样的缺点甚至错误,敬请广大读者不吝指教,以便再版时修正和完善.

本套教材的编写和出版得到了中国机械工业教育协会、机械工业出版社、江苏省教育厅以及各主审、主编和参编学校的大力支持与配合,在此,一并表示衷心感谢.

普通高等工科院校基础课规划教材编审委员会

主任　殷翔文

2002年3月

前　言

本教材内容主要包括:复变函数和积分变换两大部分.本教材是按照《工程数学教学大纲》中复变函数和积分变换部分的要求,并根据近年来的教改实践经验和工科部分专业课程内容改革的要求编写的.

《复变函数与积分变换》的数学基础是《高等数学》,作为高等数学的后续课程,我们在编写过程中注意到了与高等数学的衔接,在内容上力求概念形式和叙述的连续、延伸,同时更注意其中的创新和发展,这样使读者既感到内容的深化和展拓,又不会感到陌生而易于学习.为了适应新的工科专业培养计划和课程设置,便于学生课外学习,编写中我们注意尽可能简化烦琐复杂的论证,同时也保留了一些对培养学生数学思维有益的经典定理的证明.注意内容体系的内在联系和前后呼应,注意数学创新能力的培养,注意适应工科专业特点的内容安排,力求易讲易学.希望经过该课程的学习,学习者能初步掌握利用复变函数方法和积分变换技巧处理一些专业课程中的理论知识和实际问题,从而有一个较好的数学应用基础.

本书由杨巧林主编,孙福树、刘锋任副主编.第 1、2、3 章由杨巧林、刘玉荣编写,第 4、5、6 章由刘锋编写,第 7、8 章及附录由孙福树编写.全书由全国高校工科数学课程教学指导委员会委员、东南大学管平教授和扬州大学刘金林副教授担任主审.福州大学王传荣教授十分关心本教材的编写工作,提出了许多宝贵的意见.左健民、施步洲、陈小兵、陈洪、刘重应、李刚、刘祖汉、林平健、周友明等教授和领导在教材编写过程中给予了充分指

导和大力支持,在此一并表示由衷的谢意.由于编者才疏学浅,书中缺点错误在所难免,敬请广大读者和专家学者赐教.

本教材编写过程中参考了国内许多优秀教材,我们在书末列出,以供读者学习时参阅.

本教材得到了扬州大学教材出版基金资助.

编者

2002年2月

目　录

第 1 章　复数与复变函数

复变函数研究的对象是复数变量之间的函数关系.关于复数,在中学代数中已有论述,但为了今后讨论问题方便,这里我们先介绍复数的概念、性质及其四则运算,然后再进一步介绍复变函数以及复变函数的极限和连续的概念.

1.1　复数的概念与运算

1.1.1　复数的概念

由于解代数方程的需要,在 16 世纪中叶,意大利数学家 Cardan 把复数引进了数学.18 世纪时,数学家 Euler 首先引入记号 i,以后复数研究有了迅速的发展,数学研究从实数领域扩展到复数领域.

二次方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内显然无根,想象有一个新的数 i 满足 $x^2+1=0$,这个数 i 称为虚数单位,并有 $i^2=-1$,或记为 $i=\sqrt{-1}$.这样,方程 $x^2+1=0$ 就也有两个根 i 和 $-i$.

我们把形如 $x+iy$ 的数称为复数,记为

$$z=x+iy$$

其中 x 和 y 是任意实数,分别称为 z 的实部与虚部,分别记为

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{I}m(z)$$

当 $x=0$ 时,$z=iy$ 称为纯虚数;当 $y=0$ 时,$z=x$ 是实数;当 $x=y=0$ 时,$z=0+0i=0$ 既是纯虚数,又是实数.

全体复数组成的集合称为复数集,记作 $\boldsymbol{C}$,即

$$\boldsymbol{C}=\{x+iy\mid x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

此处 $\boldsymbol{R}$ 表示全体实数构成的集合(实数集).

对于两个复数 $z_1=x_1+iy_1,z_2=x_2+iy_2$,当且仅当 $x_1=x_2$,且 $y_1=y_2$ 时,才称 z_1 和 z_2 相等,记为 $z_1=z_2$.

要注意的是,两个实数可以比较大小,因而实数是有序的.而两个复数不能比较大小,因而是无序的.

1.1.2　复数的代数运算

由于实数是复数的特例,因此规定复数的运算时,必须注意到复数的

代数运算应该满足实数代数运算的一些基本要求.

1.复数的加(减)法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的和(差)作如下规定:

$$z_1\pm z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \qquad (1-1)$$

即复数相加(减)就是将它们的实部和虚部分别相加(减).

不难验证复数的加法满足:

$$z_1+z_2=z_2+z_1 \qquad (交换律)$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3) \qquad (结合律)$$

例1 计算(1) $(4+\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})$;(2) $(3-\mathrm{i})-(5+2\mathrm{i})$.

【解】 (1) $(4+\mathrm{i})+(-2+3\mathrm{i})=(4-2)+(1+3)\mathrm{i}=2+4\mathrm{i}$.

(2) $(3-\mathrm{i})-(5+2\mathrm{i})=(3-5)+(-1-2)\mathrm{i}=-2-3\mathrm{i}$.

2.复数的乘法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的乘积规定为

$$\begin{aligned} z_1z_2 &=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1) \qquad (1-2)\end{aligned}$$

即在求两个复数相乘的积时,可视为两个二项式相乘并按其乘法法则进行,只要把所得结果中的 i^2 换成 -1 即可.

也不难验证复数的乘法满足:

$$z_1z_2=z_2z_1 \qquad (交换律)$$

$$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3 \qquad (结合律)$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3 \qquad (分配律)$$

例2 计算(1) $(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})$;(2) $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})$.

【解】 (1) $(3-4\mathrm{i})(-1+2\mathrm{i})=(-3+8)+\mathrm{i}(4+6)=5+10\mathrm{i}$.

(2) $(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})=(9+16)+\mathrm{i}(-12+12)=25$.

更一般的,$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2$.

3.复数的除法

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$($z_2\neq 0$)相除的商规定为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \qquad (1-3)$$

例3 计算(1) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$;(2) $\dfrac{2+5\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}$

【解】(1) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}=\dfrac{(1+2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}=\dfrac{(3-8)+\mathrm{i}(4+6)}{25}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

(2) $\dfrac{2+5i}{3i}=\dfrac{(2+5i)i}{3i\cdot i}=\dfrac{2i-5}{-3}=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}i$

4. 共轭复数

我们把实部相同而虚部为相反数的两个复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为一对**共轭复数**，与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$，所以 $z=x+iy$ 与 $\bar{z}=x-iy$ 共轭.显然共轭复数的概念是相互的，即 $\bar{\bar{z}}=z$.

因为 0 的相反数仍是 0，从而得到：$z=\bar{z}$ 的重要条件是 z 为实数.

利用共轭复数可以得到：

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},\operatorname{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

容易验证以下关于共轭复数的运算公式

$$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2},\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$$

$z\cdot\bar{z}=[\operatorname{Re}(z)]^2+[\operatorname{Im}(z)]^2$

例 4 设 $z=\dfrac{2+i}{i}-\dfrac{2i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re}(z)$，$\operatorname{Im}(z)$，$z\cdot\bar{z}$.

【解】：
$$z=\frac{2+i}{i}-\frac{2i}{1-i}=\frac{(2+i)(-i)}{i(-i)}-\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=-2i+1-\frac{2i(1+i)}{2}=-2i+1-i+1=2-3i$$

所以
$$\operatorname{Re}(z)=2,\operatorname{Im}(z)=-3$$
$$z\cdot\bar{z}=(2-3i)(2+3i)=2^2+3^2=13$$

例 5 设 z_1、z_2 是两个任意复数，证明 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

【证明】 $z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_2}}=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\cdot\overline{z_2}}=2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

1.1.3 复数的几何表示

考察一个复数的组成，可以看出一个复数 $z=x+iy$ 实际上是由一对有序的实数 x 和 y 构成的，这与平面直角坐标系中点 (x,y) 的表示在本质上是一致的，所以一个复数 $z=x+iy$ 可以用平面直角坐标系中的点 (x,y) 来表示.这样，在复数集 $\boldsymbol{C}$ 和平面点集之间就建立了一一对应的关系，这时复数 $z=x+iy$ 的几何表示是以 x 为横坐标，y 为纵坐标的点，而把 $z=x+iy$ 称为复数的直角坐标表达式，由于实数 $x(y=0)$ 对应于横坐标轴上的点，纯虚数 $iy(x=0)$ 对应于纵坐标轴上的点.故将平面直角坐标系中的横坐标轴改称为实轴，而将纵坐标轴改称为虚轴，并称这个平面为复数平面，简称复平面，或

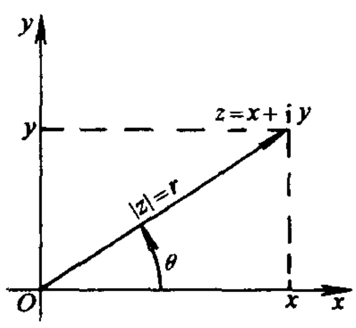

图 1-1

Z 平面.以后我们用点 z 来代替数 z.

如果把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部 x 和虚部 y 作为平面向量在两坐标轴上的投影,则复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用平面向量 $\overrightarrow{Oz}=\{x,y\}$ 表示.向量本身不定义大小关系,与复数不定义大小关系是一样的.

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的模称为复数 z 的模或绝对值,记为

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$$

它是点 z 到原点的距离,也是向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度.显然有:$|x|\leqslant|z|$,$|y|\leqslant|z|$,$|z|\leqslant|x|+|y|$,

$$z\bar{z}=|z|^2=|z^2|$$

当 $z\neq0$ 时,复数 z 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**,记为 $\mathrm{Arg}z$

$$\mathrm{Arg}z=\theta$$

显然我们有 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,所以

$$\tan(\mathrm{Arg}z)=\tan\theta=\frac{y}{x}$$

需要指出,任何一个复数 $z\neq0$ 有无穷多个辐角,如 θ_1 是辐角中的一个,则有

$$\mathrm{Arg}z=\theta_1+2k\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1-4}$$

式(1-4)表示 z 的全部辐角,其中满足 $-\pi<\theta_0\leqslant z$ 的辐角 θ_0 称为**辐角 Argz 的主值**.记为 $\theta_0=\arg z$.

当 $z=0$ 时,显然 $|z|=0$,辐角不确定,如同零向量的方向可以任意选定一样.

当 $z\neq0$ 时,$z=x+\mathrm{i}y$ 可表示为

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta+\mathrm{i}\cdot r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ &=|z|[\cos(\mathrm{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Arg}z)] \end{aligned} \tag{1-5}$$

称为复数 z 的**三角表示式**.

复数的加减运算与两个向量的加减运算是完全一致的,也可以用平行四边形(或三角形法则求出(见图 1-2).

从上述图形里不难看出

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1-6}$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2|| \tag{1-7}$$

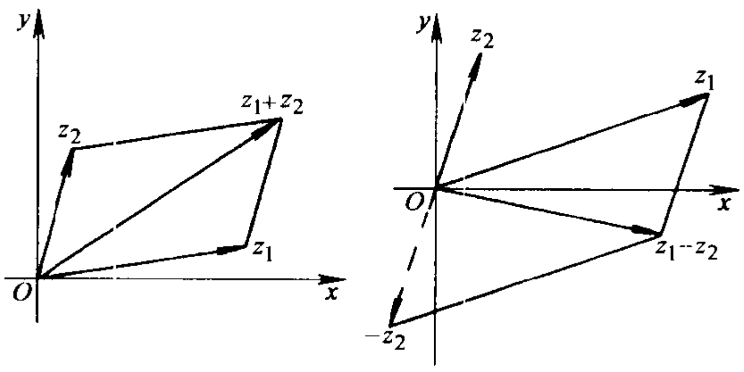

图　1-2

若有两个复数 z_1, z_2，且 $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$，则我们可以推知它们相等的充要条件是 $|z_1| = |z_2|, \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{Arg}z_2$.

对后一式子应该理解为 $\mathrm{Arg}z_1$ 和 $\mathrm{Arg}z_2$ 这两个量中的任何一个取定一值后，另一个量可以从它的无穷多个值中寻找一个与之相等的值，因此等式两端可取的值在全体上相等. 今后，我们遇到类似等式时都这样理解.

利用欧拉(Euler)公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，我们可以把一复数 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 表示为

$$z = re^{i\theta}$$

这种形式称为复数的**指数表示式**.

复数的各种形式可以互相转化，以在讨论不同问题时使用起来更为方便.

例6　将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化为三角表示式和指数表示式.

【解】：$r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$

$$\tan(\mathrm{Arg}z) = \tan\theta = y/x = \sqrt{3}/3$$

由于 z 在第三象限，所以 $\theta_0 = -\frac{5}{6}\pi$

z 的三角表示式是

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 4\left(\cos\frac{5}{6}\pi - i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

z 的指数表示式是 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$

很多平面图形用复数形式表其方程或不等式往往显得特别简洁.

例7　求下列方程所表示的曲线：

(1) $|z + i| = 2$;

(2) $|z - 2i| = |z + 4|$;