电磁定理和原理及其应用

>> 杨儒贵

西南交通大学出版社

电磁定理和原理及其应用

杨儒贵

西南交通大学出版社

·成都·

图书在版编目（CIP）数据

电磁定理和原理及其应用 / 杨儒贵主编. 一成都：西南交通大学出版社，2001.12

ISBN 7-81057-624-0

Ⅰ. 电… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 电磁学 Ⅳ. 0441

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 087699 号

电磁定理和原理及其应用

杨儒贵

*

出 版 人 宋绍南

责任编辑 唐 晴

封面设计 肖 勤

西南交通大学出版社出版发行

(成都二环路北一段 111 号 邮政编码：610031 发行科电话：7600564)

http: //press.swjtu.edu.cn

E-mail: cbs@center2.swjtu.edu.cn

成都飞机工业公司印刷厂印刷

*

开本：850 mm × 1168 mm 1/32 印张：4.9375

字数：88 千字 印数：1—1 000 册

2002 年 2 月第 1 版 2002 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 7-81057-624-0/O · 035

定价：10.00 元

内 容 简 介

本专著首次全面系统地论述了电磁理论中涉及的各种定理和原理，是作者多年电磁理论教学与科研工作的心得和体会。这些定理及原理包括 Green 定理、唯一性定理、Helmholtz 定理、镜像原理、互易原理、等效源原理、Huygens 原理、几何光学原理、Babinet 原理及二重性原理等。对于各种定理和原理，不仅给出了翔实的物理描述和严格的数学证明，同时还列举了典型范例及其应用准则。书末有参考文献及数个附录。

本书可供从事“电磁学”、“天线理论及设计”、“电波传播”、“微波技术”、“卫星通信”及“移动通信”等相关学科的大学教师、研究人员、工程技术人员及研究生阅读。

目　　录

绪　论 ………………………………………………………… 1
第 1 章　Maxwell 方程 ………………………………………… 5
1-1　Maxwell 方程 ………………………………………… 5
1-2　媒质的电磁特性 ……………………………………… 8
1-3　边界条件 ……………………………………………… 11
1-4　电磁能量与能流 ……………………………………… 12
1-5　磁荷与磁流 …………………………………………… 15
1-6　对偶原理及其应用 …………………………………… 17
1-7　波动方程 ……………………………………………… 18

第 2 章　Green 定理 …………………………………………… 23
2-1　第一标量 Green 定理 ………………………………… 23
2-2　第二标量 Green 定理 ………………………………… 24
2-3　第一矢量 Green 定理 ………………………………… 25
2-4　第二矢量 Green 定理 ………………………………… 25
2-5　Green 定理的应用 …………………………………… 26

第 3 章　唯一性定理 ………………………………………… 35
3-1　矢量场的唯一性定理 ………………………………… 35
3-2　时变电磁场的唯一性定理 …………………………… 38
3-3　正弦电磁场的唯一性定理 …………………………… 41
3-4　唯一性定理的应用 …………………………………… 43

第 4 章　Helmholtz 定理 …………………………………… 45
4-1　定理内容 ……………………………………………… 45
4-2　定理证明 ……………………………………………… 46
4-3　Helmholtz 定理的应用 ……………………………… 50

第5章　镜像原理 ……53
5-1　原理内容 ……53
5-2　镜像原理证明及应用 ……54

第6章　互易原理 ……61
6-1　互易原理的微分形式和积分形式 ……61
6-2　Lorentz 互易原理 ……63
6-3　Carson 互易原理 ……64
6-4　互易原理的应用 ……65

第7章　等效源原理 ……75
7-1　面等效源原理 ……75
7-2　感应原理 ……81
7-3　体等效源原理 ……83
7-4　等效源原理的应用 ……87

第8章　Huygens 原理 ……93
8-1　原理内容 ……93
8-2　标量绕射公式 ……94
8-3　矢量绕射公式 ……95
8-4　并矢绕射公式 ……100
8-5　Huygens 原理的应用 ……101

第9章　几何光学原理 ……111
9-1　几何光学场 ……111
9-2　零波长的电磁场为几何光学场 ……113
9-3　射线方程 ……115
9-4　强度定律 ……117
9-5　等光程原理 ……119

9-6 Fermat 原理 …………………………………… 119
9-7 几何光学原理的应用 ……………………………… 120

第 10 章 Babinet 原理 …………………………………… 123
10-1 光学 Babinet 原理 ……………………………… 123
10-2 电磁场 Babinet 原理 …………………………… 124
10-3 Babinet 原理的应用 …………………………… 127

附录 1 矢量分析 …………………………………… 129
附录 2 并矢分析 …………………………………… 132
附录 3 Bessel 函数 ………………………………… 135
附录 4 修正 Bessel 函数 …………………………… 139
附录 5 球 Bessel 函数 ……………………………… 141
附录 6 Legendre 函数 ……………………………… 144
附录 7 连带 Legendre 函数 ………………………… 146

参考论著 ……………………………………………… 148

绪　　论

电磁理论中包括了很多定理和原理，它们深刻地揭示了电磁场与波的内在特性和规律。任何电磁理论书籍都不可能不涉及这些原理和定理，但是系统完整地描述及论证这些电磁原理和定理的专著至今未见。有些电磁理论书籍甚至未加任何严格论证，仅给出定理和原理的结论，至于其应用举例更少。作者经过多年的电磁理论教学和研究，深刻地体会到精通这些定理和原理的严格论证，且掌握他们的工程应用，不仅有助于理解这些定理和原理的精髓及内涵，同时也有利于提高分析和解决电磁理论问题的能力。

电磁理论中涉及的定理和原理大致可分为四大类：第一类来源于矢量分析。由于电磁场是一种矢量场，因此，一切描述矢量场特性的公式和定理原则上均可适用于电磁场。尤其是描述有界区域中两种矢量场之间关系的Green定理，描述矢量场求解的唯一性定理，描述矢量场的散度和旋度特性的Helmholtz定理，以及描述矢量场边界特性的镜像原理，在电磁理论中获得广泛应用。第二类来源于光学。因为光波本质上是一种电磁波，因此，很多光学原理可以移植到电磁学。例如，描述光波波动特性的Huygens原理以及描述光波射线特性的几何光学原理同样符合电磁波的特性。可以证明，统治电磁理论的著名Maxwell方程在零波长情况下的解即是几何光学场。电磁场的Huygens原理还有多

种严格的数学表示。此外，电磁场中也有类似于光学中的Babinet原理。第三类来源于电路理论。例如，线性媒质中的电磁场也具有线性电路中描述因果关系的互易原理。电磁场的互易原理描述了两种同频场及源之间的互易关系，在电磁理论中处于非常重要的地位。第四类来源于电磁场与波的本身特性。例如，由矢量场唯一性定理演变的时变电磁场唯一性定理，由Huygens原理派生的等效源原理及感应原理。描述电荷及电流产生的电磁场与假想的磁荷及磁流产生的电磁场之间对应关系的二重性原理或称为对偶原理。

由上简述，读者也许已经初步体会到这些定理和原理不仅具有丰富的物理内涵，同时也有严格的数学描述。作者 1992 年撰写的《电磁理论中的辅助函数》专著为这些定理和原理的描述及论证提供了强有力的数学工具[37]。因此，本书亦可作为该专著的姐妹篇。建议读者两书结合，共同研读，一定更富成效。此外，读者应该注意“原理”和“定理”之间的异同。原理通常注重对客观规律物理概念的定性描述，而定理着重对客观规律数学公式的定量表示。有些客观规律既有明确的物理概念，又有严格的数学表示，这种客观规律的描述可称为原理或定理。例如，电磁理论中的互易原理描述了线性媒质中两种同频电磁场的源及场之间的关系，而且能用严格的数学公式表示，因此又可称为互易定理。不过，电磁理论中的 Huygens 原理虽然具有严格的数学表示，但人们沿袭光学术语，仍然称作 Huygens 原理。应该指出，无

论定理或原理均不同于公理，他们是在一定条件下才成立的，不是放之四海皆对的真理。因此，我们在应用这些定理或原理求解电磁理论问题时，必须注意它们的适用条件。

全书共分 10 章，分别论述 Maxwell 方程、Green 定理、唯一性定理、Helmholtz 定理、镜像原理、互易原理、等效源原理、Huygens 原理、几何光学原理、Babinet 原理等。对于各种定理和原理，不仅给出了翔实的物理描述和严格的数学证明，同时还列举了实例及其应用准则。由于这些定理和原理在电磁理论中获得了广泛应用，实例不胜枚举，这里仅给出几个典型范例，相信读者可以触类旁通，举一反三。

本书采用 $e^{j\omega t}$ 时间因子，SI 单位制。

最后，应该特别提出的是，作者最敬重的，已故的西安交通大学黄席椿教授撰写的“高等电磁理论专题”讲稿是本书的重要参考资料。此外，还应感谢西南交通大学任朗教授和西安交通大学汪文秉教授在撰写本书的过程中给予的鼓励与指导。在本书出版过程中，西南交通大学出版社编辑为本书出版作了大量的工作，作者表示由衷的感谢。

本书荣获西南交通大学出版基金的赞助，作者表示深切的谢意。

作者

2000 年春于西南交通大学

第 1 章

Maxwell 方程

1-1 Maxwell 方程

英国物理学家 James Clerk Maxwell（1831—1879）根据已发现的电磁感应定律，再提出位移电流的假设，从而总结出下列四个电磁场方程式

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_s \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-1-1}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_s \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-1-2}$$

$$\oint_s \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{1-1-3}$$

$$\oint_s \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_v \rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}v \tag{1-1-4}$$

式中，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$为磁场强度；$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$为电场强度；$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$为磁感应强度；$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$为电位移矢量；$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$为电流密度；$\rho(\boldsymbol{r},t)$为电荷密度。这些物理量都是空间及时间的函数。通常，式（1-1-1）称为广义 Aperil 定律；式（1-1-2）称为电磁感应定律；式（1-1-3）称

为磁场 Gauss 定律；式（1-1-4）称为电场 Gauss 定律。上述四个方程式总称为 Maxwell 方程的积分形式。利用矢量分析中的 Gauss 定理及 Stokes 定理，由上述四式分别可以导出下列 Maxwell 方程的微分形式

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1-1-5}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1-1-6}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{1-1-7}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-8}$$

值得指出，式（1-1-1）及式（1-1-5）中的电流密度$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$应包括三个部分，即 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}^{i}+\boldsymbol{J}^{c}+\boldsymbol{J}^{v}$，这里 $\boldsymbol{J}^{i}$为产生电磁场的外源；$\boldsymbol{J}^{c}$为媒质中的传导电流；$\boldsymbol{J}^{v}$为媒质中存在的运流电流或称为徙动电流。

Maxwell 方程的积分形式应理解为试验结果，它在场量不连续处仍然成立。但是，微分方程只能适用于场量连续的区域。

对式（1-1-5）两边取散度，同时考虑到矢量恒等式 $\nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=0$，再利用式（1-1-8）即可导出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1-1-9}$$

该式称为电荷守恒定律，它表明某点电流密度的散度等于该点电荷密度时间变化率的负值。式（1-1-9）的积分形式不难导出如下

$$\oint_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho(\boldsymbol{r},t)\mathrm{d}v \tag{1-1-10}$$

显然，该式表明时变电荷与时变电流是同时存在、不可分割的，只有静止的电荷及恒定的电流才能单独存在。电荷守恒定律也应作为试验结果，它是 Maxwell 方程的一个组成部分。为了 Maxwell 方程的完备性，还应包括下列三个媒质特性方程或称为结构方程，即

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\varepsilon(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-11}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mu(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-12}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\sigma(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-1-13}$$

上述方程中ε为媒质介电常数；μ为媒质导磁率；σ为媒质电导率。这里略去了外源$\boldsymbol{J}'$及运流电流$\boldsymbol{J}^{\mathrm{v}}$，式（1-1-13）中$\boldsymbol{J}$仅代表传导电流$\boldsymbol{J}^{\mathrm{c}}$。

对于随着时间按正弦函数变化的正弦电磁场（又称为时谐场），由于场与源具有相同频率，那么，这些频率相同的正弦量可以采用复量表示。本书以$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$及$\rho(\boldsymbol{r})$分别表示各自复量的有效值。这样，上述 Maxwell 方程、媒质特性方程及电荷守恒定律可用复数形式表示如下

$$\oint_l \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-1-14}$$

$$\oint_l \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-1-15}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = 0 \tag{1-1-16}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}v \tag{1-1-17}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-18}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-19}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{1-1-20}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-21}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-22}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-23}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-24}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{j}\omega\rho(\boldsymbol{r}) \tag{1-1-25}$$

式中，ω为角频率。

1-2　媒质的电磁特性

前节我们给出了媒质的电磁特性方程：式（1-1-11）、式（1-1-12）及式（1-1-13），式中ε，μ，σ为媒质的电磁参数，它们分别描述了媒质中 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 以及 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系。本节将详细讨论这些参数如何描述媒质具有的电磁特性。

如果媒质参数ε，μ，σ与时间无关，则这种媒质称为静止媒质，否则称为运动媒质。若这些参数与空间位置无关，即它们在

空间各点具有同一数值，这种媒质称为均匀媒质，反之，称为非均匀媒质。如果媒质参数与场量大小无关，则 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 以及 $\boldsymbol{J}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 之间为正比关系，这种媒质称为线性媒质，否则称为非线性媒质。

有些媒质的介电常数ε及导磁率μ与外加场强的方向有关，当外加场强的方向改变时，ε及μ的数值也发生变化。为了描述媒质这种特性，引入张量介电常数$\bar{\bar{\varepsilon}}$和张量导磁率$\bar{\bar{\mu}}$，则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-1}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\mu}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-2}$$

式中，$\bar{\bar{\varepsilon}}$及$\bar{\bar{\mu}}$分别具有九个分量，即

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{vmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{vmatrix} \tag{1-2-3}$$

$$\bar{\bar{\mu}}=\begin{vmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23}\\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33}\end{vmatrix} \tag{1-2-4}$$

具有张量介电常数$\bar{\bar{\varepsilon}}$的媒质称为电各向异性媒质；具有张量导磁率$\bar{\bar{\mu}}$的媒质称为磁各向异性媒质。具有前述标量介电常数及导磁率的媒质称为各向同性媒质。

还有一些媒质，其电磁特性方程可以表示为下列方程

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\bar{\varepsilon}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\bar{\xi}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{1-2-5}$$

$$B(r,t)=\bar{\bar{\mu}}(r,t)\cdot H(r,t)+\bar{\bar{\zeta}}(r,t)\cdot E(r,t) \tag{1-2-6}$$

式中，$\bar{\bar{\xi}}$ 及 $\bar{\bar{\eta}}$ 称为电磁张量。显然，两式表明媒质的极化特性与磁化特性之间存在一定的耦合关系，这种媒质称为双各向异性媒质[31]。若上两式中 $\bar{\bar{\varepsilon}}$，$\bar{\bar{\mu}}$，$\bar{\bar{\xi}}$，$\bar{\bar{\eta}}$ 均为实标量时，即

$$D(r,t)=\varepsilon(r,t)E(r,t)+\xi(r,t)H(r,t) \tag{1-2-7}$$

$$B(r,t)=\mu(r,t)H(r,t)+\zeta(r,t)E(r,t) \tag{1-2-8}$$

这种媒质称为双各向同性媒质。

本书仅涉及各向同性媒质。几种常见的各向同性媒质值得提出，电导率 $\sigma=0$ 的媒质称为理想介质；电导率 $\sigma\to\infty$ 的媒质称为理想导电体；电导率界于两者之间的媒质称为导电媒质。还应指出，在微波波段，媒质参数具有明显的频率特性。此外，当频率足够高时，由于存在极化损耗与磁化损耗，媒质介电常数及导磁率均变为复数，即 $\varepsilon=\varepsilon'-\mathrm{j}\varepsilon''$，$\mu=\mu'-\mathrm{j}\mu''$，，其中虚部代表能量损耗。若频率足够高时，由于媒质的极化和磁化的滞后作用，任何媒质均可当作真空处理。实际中经常应用相对值，分别称为相对介电常数 ε_r 和相对导磁率 μ_r，它们是实际值与真空中的数值之比，即 $\varepsilon_r=\varepsilon/\varepsilon_0$，$\mu_r=\mu/\mu_0$，式中，$\varepsilon_0$、$\mu_0$ 为真空电磁参数：

$$\varepsilon_0=8.854187817\cdots\times10^{-12}\approx\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\quad(\mathrm{F/m})$$

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\quad(\mathrm{H/m})$$