面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

工程数学

内容、方法与技巧

COLLEGE MATHEMATICS

张学元 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

工程数学内容、方法与技巧

张学元 编

湖南大学出版社

2003年·长沙

内容简介

本书分3篇10章.第一篇线性代数.内容包括行列式与矩阵、线性方程组、方阵的对角化与二次型.第二篇概率论,内容有概率的基本概念及计算、随机变量、随机变量的数字特征、几个极限定理.第三篇数理统计,内容有数理统计的基本概念、参数估计、假设检验和回归分析.每章配有复习思考题评析和习题选解以及历届考研真题解析、同步自测题,便于读者同步学习.

本书适于作高等工科院校各专业本科生、专科生学习《工程数学》课程时同步的辅导教材,也可作为考研时的强化辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学内容、方法与技巧/张学元编著.—长沙:湖南大学出版社,2003.1

(面向21世纪高等学校数学系列辅导教材)

ISBN 7-81053-554-4

Ⅰ.工… Ⅱ.张… Ⅲ.工程数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第086093号

工程数学内容、方法与技巧

Gongcheng Shuxue Neirong Fangfa yu Jiqiao

张学元 编

□责任编辑 李立鹏 俞 涛

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 长沙环境保护学校印刷厂

□开本 850×1168 1/32 □印张 16.5 □字数 427千字

□版次 2003年1月第1版 □2003年1月第1次印刷

□印数 1～5 000册

□书号 ISBN 7-81053-554-4/O·42

□定价 20.00元

前　言

工程数学是继高等数学之后的又一门重要的数学课程，不但理工学科、经济学科、管理学科各专业对工程数学的要求越来越高，而且在历届的考研试题中工程数学（线性代数、概率论、数理统计）的比重和难度都有所增加．如果单靠一本教材、有限的60个课时和课后少量的练习是难以掌握好工程数学的基本内容和方法的．鉴于此，我们选择了张有方等编的工程数学教材为脉络，编写了这本与高等学校《工程数学》课程紧密配套的辅导教材．

全书分3篇10章，对每一章我们先归纳了该章的知识点与解题方法、技巧；其次，对该章的复习思考题作了评析．在“评注”里指出其思维方法，并作适当的引申，揭示一般规律；第三，对每章的典型习题作了选解；在每章的后面，我们列出了历届理工类的考研真题，便于考研的同学参考和借鉴．最后给出了自测复习题，作完后可参看书末的答案以评判掌握的情况．

本书适合作高等学校理工学科、经济学科和管理学科各专业的学生在学习工程数学课程时同步的辅导教材，也可作为报考硕士研究生的考生复习时的参考书．

限于编者水平，书中不妥之处，恳请读者指正．

张学元

2002年8月

目　　次

第一篇　线性代数

第一章　行列式与矩阵

§1.1　基本要求与内容、方法归纳

一、基本要求与重点

1. 理解 n 阶行列式的定义.

2. 掌握 n 阶行列式的 8 个基本性质，并能熟练地利用这些性质计算行列式.

3. 熟练掌握 n 阶行列式按行(列)的展开定理，并能用于计算行列式.

4. 理解矩阵的定义，熟练掌握矩阵的加法、减法、数乘和乘法的运算规则.

5. 了解矩阵分块的原则，会利用分块矩阵法简化矩阵的运算.

6. 理解可逆矩阵的概念，会用伴随矩阵法求可逆阵的逆.

7. 了解初等矩阵的概念及其与矩阵初等变换的关系，熟练掌握用矩阵的初等变换法求逆阵.

8. 掌握克兰姆(Cramer)法则，熟练掌握用增广矩阵的初等变换法求矩阵方程的解.

9. 理解矩阵秩的概念及求法.

重点

1. n 阶行列式的计算方法.

2. 矩阵的运算规则及运算律.

3. 逆矩阵的求法.

二、内容、方法归纳

A 行列式

1. 排列的逆序数及求法

定义 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**. 在一个排列中的两个数,如果排在前面的数大于排在它后面的数,则称这两个数构成一个**逆序**. 一个排列中逆序的总数称为此排列的**逆序数**.

求法. 一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$,由定义知

$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=$ (j_1 后面比 j_1 小的数的个数) + (j_2 后面比 j_2 小的数的个数) + $\cdots$ + (j_{n-1} 后面比 j_{n-1} 小的数的个数).

这就是说,求一个排列的逆序数的方法是:由此排列的左边起,依次算出每个元素后面比它小的数的个数,然后相加即得.

2. n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数,其定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

即它是所有取自不同的行和不同的列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和. 这里列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列, $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是这个排列的逆序数.

3. n 阶行列式的基本性质

性质 1 行列式 $|A|$ 转置后其值不变. 即 $|A| = |A|^{\mathrm{T}}$.

性质 2 互换行列式中任意两行(列),行列式的值仅改变符号.

性质 3 若行列式有两行(列)元素全同,则行列式的值为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)中所有元素有公因子 k,则可将此公因子 k 提到行列式记号的外面. 或者说,以数 k 乘行列式的某一行(列)中的所有元素,就等于用 k 去乘此行列式.

性质 5 若行列式中有一行(列)的元素全为零,则此行列式的值等于零.

性质 6 若行列式中有两行(列)元素成比例,则此行列式的值等于零.

性质 7 行列式具有分行(列)相加性. 即若行列式中的某一行(列)是两组数之和,则此行列式等于两个行列式之和. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 8 若在行列式的某一行(列)元素加上另一行的对应元素的 k 倍,则行列式的值不变. 例如

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{R_i + kR_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

4. n 阶行列式按行(列)的展开定理.

(1) 造零展开定理

若在 n 阶行列式 $|A|$ 的第 i 行中,除元素 a_{ij} 外,其余元素都等于零,则 $|A| = a_{ij}A_{ij}$. 其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 按一行(列)展开定理

(i) n 阶行列式 $|A|$ 的值等于其任一行(列)中各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 即

$$
|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} (i = 1,2,\cdots,n)
$$

或者

$$
|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} (j = 1,2,\cdots,n).
$$

(ii) n 阶行列式 $|A|$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0\ (i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0\ (i\neq j).$$

(i)(ii) 可综述为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}|A| & (i=j);\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}\tag{1.2}$$

(3) 按某 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 展开定理(Laplace 展开)

设在 n 阶行列式 $|A|$ 中任取 k 行(列)$(k<n)$，则由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式与它所对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 $|A|$ 的值.

即
$$|A|=M_1N_1+M_2N_2+\cdots+M_tN_t,\tag{1.3}$$
其中 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 为在 $|A|$ 中取定 k 行后所得的一切 k 阶子式，$N_1,N_2,\cdots,N_t$ 为它们所对应的代数余子式，

$$t=C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5. 几个特殊行列式的值

(1) 三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 若将 n 阶行列式 $|A|$ 按逆时针方向或顺时针方向旋转 $90°$

所得之行列式记为 $|\boldsymbol{B}|$，则 $|\boldsymbol{B}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}|\boldsymbol{A}|$. 特别地，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{旋转 }90^\circ]{\text{按逆时针方向}} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} a_{1n} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{1\,n-1} & a_{2\,n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n-1\,2} & 0 \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n-1\,1} & a_{n1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}.$$

（3）范德蒙（Vandermonde）行列式

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \\ &\quad \times (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2) \times \cdots \times (x_n - x_{n-1}) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i). \end{aligned}$$

6. 计算 n 阶行列式的常用方法和技巧

计算 n 阶行列式的值是本章的重点之一，总的思路是根据行列式元素分布的特点，灵活地应用行列式的基本性质，逐一地对行列式作等值变形，直到求出行列式的值.

求 n 阶行列式的值的基本方法有：

（1）化为三角形行列式求值法

技巧:若行列式的每一行(列)元素的和相同则在第1列元素上加上其余各列相应的元素,提出第1列的公因子,再利用性质8化成三角形行列式.

(2) 造零降阶法

技巧:在行列式中选一零元素较多的行(列),利用行列式的性质8将该行(列)化为只有一个非零元.然后按该行(列)展开.

(3) 按一行(列)展开法

技巧:先利用行列式的性质8将行列式中的某一行(列)的元素尽可能较多地消成零,再按该行(列)展开.

(4) 按某$k(k<n)$行(列)展开法

技巧:若行列式中有某k行有较多的零元素,则对这k行用拉普拉斯展开定理.

B **矩阵**

1. 矩阵与n元向量的概念

由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成$m$行$n$列的表称为$m\times n$**矩阵**.简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$或$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.若$\boldsymbol{A}$的元素全为零,则称它为零矩阵,记为$0_{m\times n}$.一个$n$阶方阵$\boldsymbol{A}$,除主对角线元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$外,其余元素都等于零,则称方阵$\boldsymbol{A}$为**$n$阶对角矩阵**.记为$\mathrm{diag}[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.主对角线上元素全为1的$n$阶对角矩阵称为**$n$阶单位矩阵**,记为$\boldsymbol{E}$.

$1\times n$矩阵$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**n元行向量**;$n\times 1$矩阵$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$称为**$n$元列向量**.

2. 矩阵的运算规则及运算律

(1) 矩阵的加(减)与数量乘法

定义 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$具有相同的行数和相同的列数(称$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为同型矩阵),定义

加法：$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

减法：$A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

数量乘积：$kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}$（$k$ 是常数）.

即矩阵的加（减）法是两个矩阵的对应元素相加（减）后所得之矩阵，数乘以矩阵是用该数去乘矩阵的每一个元素后所得之矩阵. 这些都与行列式的基本性质绝然不同.

运算律　设 A、B、C 是同型矩阵，k_1,k_2 是数，则

$$A+B=B+A,\qquad \text{（交换律）}$$

$$(A+B)+C=A+(B+C),\qquad \text{（结合律）}$$

$$(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A,$$

$$(k_1k_2)A=k_1(k_2A).$$

（2）矩阵的乘法

定义　设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$. 定义

$$AB=C=(c_{ij})_{m\times n},$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），即矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素等于左矩阵 A 的第 i 行元素与右矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积之和. 并非任意两个矩阵的乘积都存在，只有当左矩阵 A 的列数等于右矩阵 B 的行数时，AB 才存在，这时乘积 $A_{m\times s}B_{s\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵.

运算律　设 A、B、C 是适当阶数的矩阵，k 是数，则

$$(AB)C=A(BC),\qquad \text{（结合律）}$$

$$A(B+C)=AB+AC,\qquad \text{（分配律）}$$

$$(B+C)A=BA+CA,\qquad \text{（分配律）}$$

$$k(AB)=(kA)B=A(kB).$$

注意

1°）矩阵的乘法不满足交换律（即 $AB\neq BA$）. 但对单位矩阵 E 有

$$A_{m\times n}E_n = E_m A_{m\times n} = A_{m\times n}.$$

2°）矩阵的乘法不满足消去律. 即不能由 $AB = 0$ 推出 $A = 0$ 或 $B = 0$；也不能从 $AB = AC$ 推出 $B = C$.

3°）n 元行向量 · n 元列向量 = 一个数；n 元列向量 · n 元行向量 = n 阶方阵.

（3）方阵的幂

定义　设 A 是 n 阶方阵，定义

$$A^0 = E, A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{个}}(k \text{ 为正整数})$$

为 A 的 k **次方幂**.

运算律　设 k,i 为正整数或零，则

$$A^k A^i = A^{k+i};(A^k)^i = A^{ki}.$$

但一般来说，$(AB)^k \neq A^k B^k$.

（4）矩阵的转置

定义　设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，把 A 的行与列互换，即第 1 行换为第 1 列，第 2 行换为第 2 列，…，第 m 行换为第 m 列得到的矩阵，称为 **A 的转置**，记为 A^T.

若 A 为 n 阶方阵，且 $A^T = A$（即有 $a_{ji} = a_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,n$），则称 A 为**对称矩阵**. 若 $A^T = -A$，则称 A 为**反对称矩阵**.

运算律

$$(A^T)^T = A,\quad (A+B)^T = A^T + B^T,$$

$$(kA)^T = kA^T(k \text{ 是数}),\quad (AB)^T = B^T A^T,$$

$$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T A_{n-1}^T \cdots A_1^T.$$

（5）方阵的行列式

定义　由 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的全部元素所确定的 n 阶行列式称为**方阵 A 的行列式**，记为 $|A|$ 或 $\det A$.

运算律

$$|A^T| = |A|, |kA| = k^n|A|\ (k \text{ 是数}), |AB| = |A||B|,$$

$$|A_1 A_2 \cdots A_n| = |A_1||A_2|\cdots|A_n|.$$

必须注意，$|kA| \neq k|A|$，$|A+B| \neq |A|+|B|$，

$$|A-B| \neq |A|-|B|.$$

（6）矩阵的分块运算

用一些纵横虚线把矩阵 A 分成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的子块，以子块为元素的矩阵称为**分块矩阵**

把所给高阶矩阵进行分块后再运算是一种有用的技巧. 通过适当的分块后，可以把小块看作"数"来处理，使高阶矩阵的运算化为低阶矩阵的运算. 例如

（i）分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s \times n$ 矩阵，可把 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pt} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tq} \end{bmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 是 $p \times t$ 的分块矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $t \times q$ 的分块矩阵，且 $\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数相等（即 $\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$ 有意义），则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1q} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pq} \end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{t}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}(i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,q).$$

（ii）分块矩阵的转置

设有分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix}, \text{则 } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}} & \vdots & A_{p1}^{\mathrm{T}} \\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}} & \vdots & A_{p2}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1q}^{\mathrm{T}} & A_{2q}^{\mathrm{T}} & \vdots & A_{pq}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$