

992770

忻孝康 刘儒勋 蒋伯诚 编著

基本馆藏



# 计算流体力学

国防科技大学出版社

责任编辑 戴东宁  
封面设计 陆荣斌

ISBN 7-81024-065-x  
0·7 定价：6.70元

# 计算流体力学

忻孝康 刘儒勋 蒋伯诚 编著

国防科技大学出版社

# 前 言

本书是在中国科技大学、复旦大学和国防科技大学三校的“计算流体力学”讲义基础上，吸收近年来国内外最新研究成果和我们多年科研工作的实践，整理加工而成的。

计算流体力学，自六十年代中期成为独立的学科分支以来，随着计算机科学的发展而日新月异地向前发展。各种有关计算流体力学的文献资料，数以千计，适应各种需要的专著、教材也相继问世。这一方面是由于流体力学的应用面广，人类生活在流体世界里，许多科学技术领域都与流体力学有关；另一方面是由于流体力学问题的复杂性，采用原有的理论和实验流体力学方法往往难以解决，因而，数值模拟和计算机实验就受到人们的特别重视。基于这种形势，很有必要将计算流体力学中的各种数值方法及其应用进行系统的整理归纳，以利于进一步研究和发展。

本书试图以计算流体力学的各类数值方法为主线，深入浅出地阐述其基本原理、特点和解题技巧。书中既有模型方程的数值分析，又有实际流体力学问题的数值模拟。全书共分十一章，包括计算流体力学的特征和任务，流体力学基本方程组及其模型方程，差分格式的构造和差分方程定性理论，非线性发展方程的数值分析，可压缩和不可压缩流动的差分方法，特征线法和随机选择法，有限元和边界元法基础以及数值网格生成方法等方面的内容。

由于差分方法是计算流体动力学中应用最广、较为成熟的方法，所以，我们把差分格式的构造和差分方程定性理论作为本书的重要内容，系统地加以阐述。此外，把一些理论问题（如弱解理论，熵条件，非线性不稳定性等）和对模型方程的分析研究，集中在“非线性发展方程的数值分析”这一章中加以讨论。因此可以说，前四章是计算流体动力学的一些基础性内容。我们认为，在这些基础上多下些功夫是有益的。

针对各种流体动力学问题，建立相应的数学模型，设计和选用数值方法，模拟物理过程，反映物理现象，获得所需的各种数据和信息，通过分析研究，求得客观事物的规律性。这是计算流体动力学的基本任务。各种数值方法有其各自的特点和适用范围，希望读者能熟悉各种数值方法及其应用，从而提高解决各种流体动力学实际问题的一些技巧和能力，这就是我们撰写本书的基本目的。

在撰写本书的过程中，我们反复商讨了编著方案，分工执笔后又几经修改。但仍深感在这样一本头绪众多的著作里难免有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

全书承北京大学力学系陈耀松教授认真审阅，谨致深切的谢意。

作者

1988年3月

## 目 录

<b>第一章 引论</b> .....	1
§ 1.1 计算流体动力学的起源、形成与发展.....	1
§ 1.2 计算流体动力学与理论流体动力学及实验流 体动力学的关系.....	4
§ 1.3 计算流体动力学的任务和方向.....	7
§ 1.4 对我国计算流体动力学的回顾与展望.....	10
参考文献.....	12
<b>第二章 流体动力学方程组及其模型方程</b> .....	14
§ 2.1 描写流体运动的两种方法.....	14
§ 2.2 流体动力学的基本控制方程组.....	19
§ 2.3 方程组的无量纲形式.....	26
§ 2.4 对流-扩散方程式的导出.....	33
§ 2.5 常用的几个模型方程.....	37
参考文献.....	40
<b>第三章 有限差分法理论基础</b>	
§ 3.1 有限差分离散化方法.....	42
§ 3.2 差分格式的有效性问题.....	63
§ 3.3 差分法稳定性分析基础.....	70

# I

§ 3.4	差分格式的耗散性和色散性问题	97
§ 3.5	差分格式的单调性和单调格式的构造	117
§ 3.6	多维问题差分格式设计	134
§ 3.7	非线性方程的差分方法	149
	参考文献	158
<b>第四章</b>	<b>非线性发展方程的数值分析</b>	<b>161</b>
§ 4.1	非线性方程与线性方程的本质区别	163
§ 4.2	守恒型方程的广义解	166
§ 4.3	Burgers 方程	183
§ 4.4	KdV 方程和孤立子的数值试验	192
§ 4.5	KdV-Burgers 方程与耗散、色散效应	199
§ 4.6	谱方法	203
§ 4.7	关于非线性计算的稳定性问题	208
	参考文献	218
<b>第五章</b>	<b>不可压缩流动的差分方法</b>	<b>220</b>
§ 5.1	涡-流函数方法	221
§ 5.2	Poisson 方程解法	234
§ 5.3	壁涡公式及边界条件	251
§ 5.4	初始变量 Navier-Stokes 方程的解	270
§ 5.5	MAC 方法及其改进	277
§ 5.6	定常 Navier-Stokes 方程的人工压缩性方法	286
§ 5.7	算例	291
	参考文献	294

<b>第六章</b>	<b>可压缩流动的差分类方法</b> .....	296
§ 6.1	一维可压缩无粘流的差分方法.....	297
§ 6.2	多维可压缩无粘流的差分方法.....	331
§ 6.3	粘性可压流的差分方法.....	356
§ 6.4	定常可压流的差分方法.....	371
§ 6.5	可压缩流差分方法的定解条件.....	384
	参考文献.....	397
<b>第七章</b>	<b>特征线与拟特征线法</b> .....	400
§ 7.1	特征线的有关概念和特征线方法的数学基础 .....	402
§ 7.2	特征线方法.....	415
§ 7.3	激波装配法.....	430
§ 7.4	拟特征线方法.....	439
	参考文献.....	461
<b>第八章</b>	<b>随机选择法</b> .....	463
§ 8.1	一个简例——RCM 过程.....	464
§ 8.2	随机数问题.....	472
§ 8.3	Riemann 问题解法评述.....	483
§ 8.4	随机选择法.....	495
	参考文献.....	511
<b>第九章</b>	<b>流体流动有限元基础</b> .....	516
§ 9.1	加权残数法.....	517
§ 9.2	Galerkin有限元法的求解过程和步骤.....	524



## IV

§ 9.3	形函数和等参数变换	538
§ 9.4	不可压缩流N-S方程的有限元解	545
§ 9.5	可压缩流N-S方程的有限元解	563
§ 9.6	大雷诺数流动有限元格式的发展	567
	参考文献	577
<b>第十章</b>	<b>边界元方法基础</b>	<b>580</b>
§ 10.1	位势问题的边界积分方程	581
§ 10.2	基本解及其求法	587
§ 10.3	边界积分方程的有限元离散	598
§ 10.4	不可压缩流N-S方程的边界元法	616
§ 10.5	边界元方法的发展与评价	629
	参考文献	635
<b>第十一章</b>	<b>数值网格生成方法</b>	<b>638</b>
§ 11.1	初等变换和代数网格生成方法	639
§ 11.2	共形网格生成方法	654
§ 11.3	椭圆型方程的网格生成方法	662
§ 11.4	局部变换的网格生成方法	670
§ 11.5	自适应网格 (Adaptive Meshes)	675
	参考文献	683

# 第一章

## 引 论

计算流体力学是近代流体力学、数值数学和计算机科学相结合的产物，是一门具有强大生命力的边缘科学。它以电子计算机为工具，应用各种离散化的数值方法，对近代流体力学的各类问题进行数值试验、计算机模拟和分析研究，以解决各种实际问题，并揭示新的物理现象，开拓新的方向。虽然它还只有二十多年的历史，但却是那样生气勃勃和富有创造性，对人们的生活、生产活动和人类文明的进程产生着极其深刻的影响。

计算流体力学这门新兴学科，有其形成和发展的过程，有其特征、任务和服务对象，了解它的历史、现状和发展，以及它的基本特征与研究方向，对发展我国的计算流体力学，促进社会主义现代化建设，无疑是十分必要的。

### § 1.1 计算流体力学的 起源、形成与发展

早在本世纪初，Runge (1908)、Richardson (1910) 和 Liebmann 就提出了求解调和方程的五点差分离散格式和迭代解法。1928年，Courant, Friedrichs 和 Lewy 在他们的著名论文“论数学物理方程的偏差分方程”中，第一次提出了差分方

法的收敛性问题，并证明了对双曲型方程收敛的CFL条件，使得对差分方法的认识提到了新的高度。尽管Poincare早就指出过，离散的简单算法的逼近可以达到任意的精确；但无奈由于当时计算工具的落后，加之流体动力学面临的问题又是异常复杂（非线性和复杂几何形态），所以在当时，即使是极其简单的流体动力学模型，也难以算出满意的近似解来。

1946年，第一台电子计算机ENIAC问世，同时，Von Neumann在一份报告中预言：数值方法将可以取代解析方法去解决流体的非线性问题。尔后十多年中，迅速出现了大量的算例，有关的数值方法和理论研究也开始在多方面展开，如Crank-Nicolson (1947) 提出的算术平均隐格式，Von Neumann和Richtmyer (1950) 计算激波管问题的人为粘性法，Lax (1954) 的守恒型格式，Peaceman和Rachford (1955)，Douglas (1956) 的交替方向法，Голунов (1957) 的激波捕捉法，Жуков (1957) 的特征线装配法，Harlow等 (1957) 的格子中的质点法等等，理论研究在差分格式的相容性、收敛性和稳定性方面取得了卓有成效的进展，Lax等价性定理，Von Neumann稳定性分析法以及对人为粘性项的分析和形式上有了相当完美的结果……。并先后计算了粘性不可压缩绕流 ( $Re=10^3$ )，激波管等各种问题。尽管如此，由于受计算机功能的限制和人机对话的困难，所能实现的流体动力学模型多为理想化的，目的也多半是为理论流体动力学提供算例，或为实验流体动力学创造核对条件，换句话说，数值计算还只是作为理论研究和实验研究的辅助手段。然而，毫无疑问，这期间的工作已为计算流体动力学的形成奠定了基础。

到了六十年代，高速度、大容量、多功能计算机的制成和广泛应用，尤其是计算机科学的发展，为计算流体力学的形成

创造了条件。各种流体动力学的数值方法如雨后春笋、日新月异，如格子类方法（MAC, FLIC, CEL等），激波捕捉法和装配法，分数步法与算子分裂法，线法，谱法，随机选择法，以及有限元和边界元法。这些方法更为精细、灵活、实用，已能适应多种实际问题的需要，可以解决可压缩与不可压缩，定常与非定常，理想与粘性，单介质与多介质，化学反应流与生物流等许多复杂的流体动力学问题。与此同时，在数学模型研究和离散化方法的理论分析方面也有了深入的发展，建立了多种解析的、离散的和统计的流体动力学模型；差分方法的定性分析理论，从已有的相容性、收敛性和稳定性分析，进而到耗散性、色散性、传输性、单调性和守恒性等多方面的理论分析；而且，分析的方法也由Fourier分析发展为能量分析和余项效应分析。这些理论研究的深入，为数值方法的设计、选择和应用提供了科学的依据。

纵观这一时期的进展，最实质性的是计算机模拟、数值试验和计算机设计。今天我们已经可以在现代化的大型电子计算机上模拟爆炸、燃烧、星系旋臂、波浪破碎、大气环流和海洋污染等，并能在高清晰度的屏幕上展现出来，不仅如此，还可以通过数值模拟和计算机实验的方法，利用光笔直接在计算机上进行飞机、轮船和汽车等的选型、设计、革新，并直接控制生产。

特别应当指出，通过数值模拟和计算机实验，还发现了一些尚未被人们认识的新的物理现象。例如，1965年，Zabusky和Kruskal通过数值模拟揭示了KdV方程孤立波所呈现的守恒性和类粒子性，此后，还在许多不同领域通过数值试验相继发现孤立子的存在；又如，1968年Cambell和Mueller在计算机实验中发现了亚音速的倾斜诱导分离现象，尔后才由风洞实验所

证实。这些“质变”性的进展，使得人们再也不能把数值计算仅仅看作是理论研究和实验研究的辅助手段，而是独立于理论和实验的一种基本科学活动，可以通过数值模拟和计算机实验去寻求复杂的流体动力学问题的客观规律性。

1965年，Harlow 和 Fromm 在《Scientific American》杂志上发表了“流体动力学的计算机实验”一文，几乎同时，Macagno 在法国《La Houille Blanche》杂志上发表了“水力学模拟的某些新方面”的论文。两文第一次明确地提出计算机实验和数值模拟的新概念，人们认为，这标志着计算流体力学作为一门独立的学科正式形成。

综上所述，随着计算机科学的迅速发展，在流体力学、数值数学、计算机科学和其它有关科学工作者的共同努力下，计算流体力学正以其强大的生命力和迷人的前景蓬勃发展。它的基本特征是数值模拟和计算机实验，它已不再受数学分析工具的限制，甚至可以置经典的基本方程组于不顾，只要遵从物理定律即可。它将在很大程度上替代耗资巨大的流体动力学实验设备，不断开辟新的研究课题和研究方向，在科学研究和工程技术中产生巨大的影响，在人类开拓能源和征服宇宙等方面将发挥日益重要的作用。

## § 1.2 计算流体力学与理论流体力学及实验流体力学的关系

一、历史上，理论和实验流体力学早就含有数值计算的内容和成分，不妨也可以说，计算流体力学最初孕育于理论和实验流体力学之中。只有当近代计算技术的高度发展，数

值数学与理论和实验流体力学相结合，才使计算流体力学成为一门独立的近代边缘科学。正因为这种历史，计算流体力学也和实验流体力学一样，是以理论流体力学的结果为指导的。至今所采用的大部分数学模型仍是近代理论流体力学的产物，而且，今后仍然受近代理论流体力学发展的影响和推动。自然，计算流体力学的形成与发展给理论流体力学注入新的生机，提供了强有力的计算机实验手段，开辟着新的研究方向。另一方面，实验流体力学始终是最现实、最直接的研究流体力学现象的途径，它给计算流体力学以最生动的启示和检验，而计算机实验和数值模拟无疑使实验流体力学如虎添翼，提高了其效率，弥补了其不足。但是，不管计算流体力学发展到什么程度，数值模拟、计算机实验和计算机辅助设计达到多么完善的境地，最后的实物实验仍然是必不可少的。例如，当今设计一架飞行器，由于商业或军事上的要求，结构上的安全、可靠指数要求很高，而噪音、污染和价值指数又要求尽可能低，由亚音速向超音速加速过程要优良，加之几何形状上的多变，生产周期的压缩等等因素，使要求的设计点成倍地增长。这就必然要借助于计算机模拟、计算机设计和优化过程。也就是说，要利用日趋经济的计算机模拟吹风试验和计算机设计过程。但是，最终还是必须进行风洞吹风实验才能投入生产和应用。所以，计算流体力学与理论流体力学、实验流体力学各有其最适宜的范围、研究任务和解决问题的能力，三者是互相依存、互为补充和互相促进的。

二、计算流体力学和理论流体力学相比，它们所研究的对象虽然一致，但其研究的具体内容，采用的方法，求解能力和所达到的目标却大不相同。理论流体力学着重于流体力学现象的数学描述、简化和分析。处理的多半是线性的、局

部线化的或可化为线性的问题，规则几何问题和典型问题，采取的方法主要是解析的、渐近的或局部性的方法，这就使它的求解能力受到很大的限制。但是，它所给出的数学模型和分析，却具有典型性和一般指导意义，形式上的有限的解也很完美；然而，其所能达到的目标和活动范围有限。计算流体动力学则更多地面向非线性、非规则几何形态的问题，采用的是离散的数值方法和计算模拟实验的方法，如前所述它不受解析数学能力的制约，甚至可以不顾经典的基本方程，因而有更大的适应性和求解能力。但它能给出的结果却是离散分布的，近似的，且不可避免引入误差和人为的数值效应（如耗散、色散、振荡等），所以，可能隐含有必须予以识别和剔除的假象成分。

三、计算流体动力学和实验流体动力学相比较，有以下几方面特点。正是这些特点给了实验流体动力学以有力的补充和支持。

1. 数值模拟和计算机实验更经济、迅速。Charpman (1975)、Birkhoff (1983) 统计过，自计算机问世以来，计算机的速度和功能在以指数提高，今天的超级机已经提高了 $10^9$ 倍；而其商品价格却呈指数下降，今天仅为五十年代前的 $10^{-7}$ ！与此相反，现代各种流体动力学实验设备价格迅速上涨。例如，建一个风洞实验室至少要数百万元，甚至数千万元，且建设周期很长，能量消耗惊人。因此，目前在飞机、舰船等设计中，采用计算机实验选型设计，最后进行型机风洞试验。这样既经济有效，又缩短了研制周期。

2. 计算机实验有更大的自由度和灵活性。一般地讲，它不存在测量误差和系统误差，没有什么测试探头的干扰问题；而且可以随意选取雷诺数、马赫数和其它试验参数。

3. 计算机实验有突破能力和预测能力。前者表现在许多无法做实物实验、甚至不能做实物实验的问题，如核聚变、高坝坍塌、星体内温度场等，数值模拟和计算机实验仍可顺利进行；后者如短期的天气预报，长期的星系旋臂和演变的预测。总之，计算流体动力学表现了更大的主动性，具有更强的竞争活力。

综上所述，计算流体动力学与理论和实验流体动力学不可分割，互为补充，互相促进，但又互有区别，各具特色和功能，必须互相配合，才能使流体动力学加速发展。

### § 1.3 计算流体动力学的任务和方向

根据计算流体动力学的历史、现状和发展，它的任务和方向大致可以分为以下三个方面。

#### 一、数学模型研究

数值求解或数值模拟一个流体动力学问题，首先要建立一个刻画流场的合理而又可行的数学模型，并对这个模型进行深刻的理论分析，如特征参数和定解条件的影响效果，适定性或弱解存在唯一性问题等，使我们对它有实质的定性认识。这种模型可以是连续的，也可以是离散的，甚至是统计的。从这个意义上讲，它比理论流体动力学的模型要广义得多，又由于它立足于数值求解和数值模拟的可行性，所以它又比理论流体动力学模型要现实得多。针对各种实际问题和实验对象，人们已经建立了许多有效的数学模型，如湍流模型、爆轰模型、弹塑性流体模型、心血管流模型等，甚至已初步设计出了低速风洞的计算机实验模型。

数学模型研究是计算流体动力学的一项奠基工作，理论流



体动力学虽已提供了和不断提供着大量可用的模型，但仍然有许多特殊课题和任务，需要建立数学模型，如沸腾、多相化学反应流、高雷诺数的层流分离流等等，需要作更进一步的开创性工作。这是摆在计算流体动力学和理论流体动力学面前的共同任务。

## 二、数值方法研究

数值方法研究应包含三个方面的内容：数学模型的离散化方法研究（如果数学模型是连续的话），在计算机上求解离散化方程的数值算法研究和这两者的可靠性与有效性研究。

关于离散化方法，目前看来基本上可分为半离散化方法和全离散化方法两大类。前者包含各种解析与离散相结合的方法，如谱法、线法、变分方法，包括应用快速富氏变换（FFT）的方法；后者如有限差分法（FDM），有限元法（FEM）、特征线类方法、格子类方法、统计试验型方法等。比较而言，其中差分方法的研究比较成熟，应用最广，构造方法上也是多种多样，如显式的和隐式的、一步的和多步的、分裂的和跳点的、耗散的和反扩散的、守恒的和非守恒的……，此外，还有多重网格技术（MGT）等，可提高差分方法的效果和功能。其它方法也日益展示着它们各自的诱人前景，特别是各种离散化方法的结合和渗透，将会带来新的成果。

再就数值算法而言，尽管数值数学工作者已经作了大量的工作，给出了许多行之有效的算法，但是，仍有许多特殊的难题摆在计算流体动力学工作者面前，这是因为流体动力学问题的非定常、非线性和定解条件的复杂性，使数值算法的设计，初、边值条件或内接触条件的处理，以及计算过程的追踪、检验、调整等都有其特殊的困难和技巧；在最终结果的计算机处理、加工和输出等方面也有大量繁重的工作要做，这就使计算