罗增儒数学奥林匹克丛书

LUO ZENG RU SHU XUE AO LIN PI KE CONG SHU

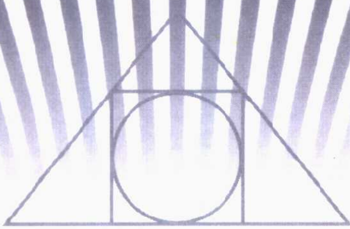
新世纪版

高中数学奥林匹克

同步辅导 专题讲练 激发兴趣 拓展思维

一年级

罗增儒 主编



陕西师范大学出版社

罗增儒数学奥林匹克丛书

高中数学奥林匹克

一 年 级

主　编　罗增儒
副主编　李元中
　　　　文　锐
　　　　魏暹荪

陕西师范大学出版社

图书代号:JF185200

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克·一年级/罗增儒主编. －西安:陕西师范大学出版社,2001.7

ISBN 7－5613－0663－6

Ⅰ.高… Ⅱ.罗… Ⅲ.数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第15597号

责任编辑	朱永庚
封面设计	徐　明
责任校对	郭健娇
出版发行	陕西师范大学出版社
社　　址	西安市陕西师大120信箱(邮政编码:710062)
网　　址	http://www.snuph.com
经　　销	新华书店
印　　制	潼关县印刷厂
开　　本	850×1168　1/32
印　　张	7.25
字　　数	160千
版　　次	2001年7月第1版
印　　次	2003年5月第4次
定　　价	7.50元

开户行:光大银行西安南郊支行　账号:0303070－00330004695

读者购书、书店添货或发现印装问题,请与本社营销中心联系、调换。

电　话:(029)5307864　5233753　5251046(传真)

E－mail:　if－centre@snuph.com

让中学生更加聪明——写在前面

本书是在《高中数学奥林匹克系列教材》(1992年出版)的基础上,根据高中数学教学新大纲和第二课堂发展新需要而修订重组的,内容已作了充实,结构也作了调整.但是,我们对数学竞赛的认识始终如一,编写的指导思想也坚定如初.所以,我们仍保留"让中学生更加聪明"作为本书的前言.

一、数学竞赛的认识

把数学竞赛看成"解难题的竞赛"是一种浅薄的误解,把数学竞赛培训看成"数学工作者的预科教育"是一种不恰当的愿望,我们对数学竞赛的基本看法是:

1.较高层次的基础教育

数学竞赛活动在本质上是一种基础教育,但更强调素质的培养和能力的发展.如果说,日常教学已经从"一纲一本"的封闭中走了出来,开始踏上"一纲多本"的大道,那么数学竞赛所体现的教育,实质上已突进到"多纲多本"的前哨.从而为学有余力的学生提供了自由发展和充分表现的机会.种种情况表明,许多学生的数学功底是在第一课堂准备的,而思维潜能却常常在第二课堂才爆发出来.

2.数学文化的生动普及

历史已经昭示,未来将进一步证实,高科技的本质是一种数学技术;扫除"数学盲"的任务必将代替扫除"文盲"的工作;数学不仅是一门科学、一项艺术,而且也是一种文化.因此,数学竞赛最深刻的历史

作用，不在于选拔出几个数学尖子，而在于普及了数学文化.中学教材所提供的，基本上是历史的数学或数学的历史，而数学竞赛则可以渗透今天的数学或数学的今天.许多体现现代思想和高等背景的“活数学”正是通过竞赛的桥梁传播到中学校园的.虽然大量的选手将来并不以数学为职业，但他们从数学竞赛的文化熏陶中所获得的洞察力和创造机智，将受益终生.

3. 自由灵活的愉快教学

数学竞赛培训与日常教学相比，特点是有较多的自由度和较大的灵活性.教师可以根据反馈随时调节信息的速度、强度和顺序.每个学生不仅可以听，可以讨论，而且也可以写作小论文.总之，这是一个开放的系统，十分有利于实施愉快的教与学.

所有这一切可以归结到一点，数学竞赛将使中学生更加聪明.

二、写作安排的特点

本着“让中学生更加聪明”的精神，我们依据自己长期从事各级数学竞赛辅导的经验，挑选了一批有较高训练价值的素材，让同学们通过课外的、自由活泼的学习，将朴素的数学兴趣上升为真诚的科学热忱，将潜在的数学功底优化为闪光的数学才华.

在编排上，我们按照“高中数学竞赛大纲”的内容，组织成7大知识块：平面几何、立体几何、解析几何、代数、数论基础、组合初步和奥林匹克方法，并细分为46个小专题，然后，按照各年级的知识水平分成3册，各册既相对独立又前后呼应，结构成一个有机的整体.其整体性的特点主要有：

1. 立足高考　着眼竞赛

过去的许多竞赛辅导材料，一上来就立足于竞赛，师生曾有反映：吃不消.我们在实践中也感到，应该在课堂学习与数学竞赛之间加一个“中途点”.因此，我们的教材设计原则是，分两步走，先从高处接近高考，再从低处接近竞赛.就是说，以教材的加深加宽为基础，先进行高观点下的高考型的思维训练，然后再逐步加强竞赛的重点和

热点，到高三篇才将竞赛的内容推向高潮．这其中，自始至终强调数学方法的训练和策略意识的培养．有两方面的事实顺便提起．

(1)1997 年全国高中数学联赛推出了一个改革意见，将原来的一试、二试分成两个层次的考试，一试定名为“全国高中数学联赛”，命题范围以现行高中数学教学大纲为准，试题难度大体相当于普通高考中档、高档的试题．二试才以现行高中数学竞赛大纲为准．

这个改革意见与我们当初的写作思想不谋而合．对于参加培训的学生来说，这也是一个万全之策，退可站稳高考脚跟，进可迈向竞赛高台．

(2)读者通告我们，《高中数学奥林匹克系列教材》自 1992 年出版以来，仅第一册就有好几道题目成为正式高考(或竞赛)题的背景与原型(参看原书 P·18，P·70，P·106，P·115 等处，当中不难对照出 1996 年的两道高考解答题)，这种偶然的巧合，说明我们“立足高考，着眼竞赛”是认真的．

2．同步安排　系统跟踪

我们把 7 大知识块分成 46 个小专题后，不是再按原知识点合并，而是与教学同步地分到各年级分册．比如“平面几何”这一知识块，我们一方面与立体几何互相渗透，另一方面又设“向量方法”、“平面几何的著名定理”、“几何中的运动”、“趣味平面图形”、“等周问题”等多个小专题渐次安排到高一、高二、高三分册．对于数学解题的重要方法，除在各讲各例中尽量体现外，还专门组织了“反证法”、“数学归纳法”、“构造法”、“解析法”、“抽屉原理”、“数学奥林匹克的技巧”(一)、(二)、(三)等众多专题，由少到多地穿插到三个年级．

3．立体设计　螺旋提升

就是说，把各种因素、各种关系、各种要求都尽可能考虑进去，并从整体上协调起来，使得学生便于学习，教师便于辅导，既综合教育功能强又适应面广．

在编排上，高一分册以中学教材的加深加宽为主，高二分册加强

了高考的重点和竞赛的热点，高三分册突出竞赛、达到高中联赛第二试甚至接近冬令营的水平.

在每一专题的写作中，既注意知识点的数量、典型性和训练价值，又注意直接从中学课本中寻找生长点.例题的编排，通常都有较低的起点、较高的落点、较宽的跨度，教学中不必求齐求全.习题的配备，既注意到类型又注意到数量，既为学生准备较多的练习机会又为教师提供更大的选择余地.

在结构上，我们交叉安排，纵有7大知识块作经线，横有课本、高考、竞赛3个思维层次作纬线.代数，几何，数论，组合这4个数学竞赛的支柱都明显地在各年级中循环，其中也有从初中到高中的循环，但都不是简单重复，而是巩固深化、拾级登高的螺旋上升.

三、新旧教材的交接

新的高中教学大纲已经颁布，新教材正在一些省市试用，我们这本书是按新教材体系安排的，但在例题、习题的配备上考虑到新旧教材并存的需要.各地在使用本书时可根据自己的实际调整前后次序和增删例题、习题.比如，立体几何内容，原来安排在高一，现已移到高二下学期，而在高一增添了向量；相应的，数列和不等式也移到了高一，这对使用旧教材的地方就显得不方便了.但是总体上来说，仍不失其同步性.

作为前言的最后，谨向帮助、支持本书出版的有关人士表示由衷的感谢，也向关心本书将提出批评指正意见的读者提前表示欢迎与谢意.

罗增儒

2001年4月

目　录

（详细解答请参看罗增儒主编的《高中数学奥林匹克题解》）

第一讲

技巧方程

中学课本中的常规方程已经有成熟的常规解法."技巧方程"将从两个方面作补充:其一是对常规方程提供一些非常规的解法;其二是对非常规的方程提供一些常规或非常规的技巧.总的目的是从方法技巧的角度去提高分析问题、解决问题的能力.所涉及的内容,基本上是初中的知识.

一、观察

观察是发现的基础,我们首先要直观地看出要证明的东西,进而去证明直观地看出来的东西.

【例 1】 观察,找出方程的实数解

$$x+\sqrt{x-2}=4+\sqrt{2}.$$

解 观察方程两边的结构,取

$$\begin{cases}x=4,\\ \sqrt{x-2}=\sqrt{2},\end{cases}\quad 得\ x=4.$$

【评注】 观察法解方程的缺点是会减根,不能肯定已找到了全体根.但本例不难完善.将原方程变为

$$(\sqrt{x-2})^2+\sqrt{x-2}-(2+\sqrt{2})=0.$$

则关于 $y=\sqrt{x-2}$ 的方程

$$y^2+y-(2+\sqrt{2})=0$$

有两个异号的实根,从而有唯一的非负根.

【例 2】 解方程

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}.$$

解 观察易见,方程 $x=\sqrt{2+x}$ 必是原方程的解,因为用 $x=\sqrt{2+x}$ 代入根号内的 x 时,有

$$\begin{aligned}x&=\sqrt{2+x}=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}\\&=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}.\end{aligned} \tag{1}$$

解 $x=\sqrt{2+x}$ 得 $x=2$. 下面说明,此外再无解.

若存在 $x=x_0$ 为原方程的解,则

(1)当 $x_0>2$ 时,$x_0>\sqrt{2x_0}=\sqrt{x_0+x_0}>\sqrt{2+x_0}$,进而(类似于①的迭代过程)有

$$\begin{aligned}x_0&>\sqrt{2+x_0}>\sqrt{2+\sqrt{2+x_0}}>\cdots\\&>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x_0}}}},\end{aligned}$$

与方程根的定义矛盾.

(2)当 $x_0<2$ 时,有 $x_0<\sqrt{2+x_0}$,同样推出矛盾

$$x_0<\sqrt{2+x_0}<\cdots<\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x_0}}}}.$$

所以,原方程只有根 $x=2$.

【评注】 本例还有两个换元解法.

(1)设 $y=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}$,代入原方程可转化为方程组

$$\begin{cases}x=\sqrt{2+\sqrt{2+y}},\\y=\sqrt{2+\sqrt{2+x}}.\end{cases}$$

(2)设 $x=2\cos\theta$，$0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ$，原方程可化为

$$\cos\theta=\cos\frac{\theta}{2^4}\Rightarrow\theta=0^\circ.$$

二、配方

通过配方来解题是一个十分基本、非常具体的数学技巧.它在因式分解、二次方程、二次函数和不等式等各方面都有广泛的应用.解方程中的配方，一方面是为开方(降次)作准备，另一方面也直接应用其产生非负数的功能.[①]

【例 3】 解方程 $\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$.

解法 1 显然 $x\geqslant 1$.方程两边乘以 2 后，移项配方，有

$$\begin{aligned}0&=2x-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}-2\sqrt{1-\frac{1}{x}}\\&=\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\sqrt{x-\frac{1}{x}}+1\right]+\left[(x-1)-2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right]\\&=\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2+\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2.\end{aligned}$$

由非负数的性质，得

$$\begin{cases}\sqrt{x-\frac{1}{x}}=1,\\ \sqrt{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}.\end{cases}$$

平方后均有

$$x^2-x-1=0. \qquad ①$$

解之，取不小于 1 的根，得 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

检验知，这是原方程的解.

① 配方法的详细研究请参见罗增儒著《数学解题学引论》第 5 章第 3 节.

【评注】 这里是先配方,后平方,反过来也可先平方,后配方.

解法 2 原式即

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x-\sqrt{1-\frac{1}{x}},$$

平方 $$x(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}+1=0,$$

配方 $$\left[\sqrt{x(x-1)}-1\right]^2=0,$$

开方,移项,再平方,仍转化为方程①.

【例 4】 解方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$.

解 显然 $x>1$,将原方程两边平方得

$$\frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1225}{144}.$$

两边加 1,配方得

$$\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)^2=\frac{1369}{144},$$

开方取正值,得

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+1=\frac{37}{12},$$

有 $$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}. \qquad ①$$

即 $$\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{4}{3}+\frac{3}{4},$$

得 $$\sqrt{x^2-1}=\frac{4}{3},\text{或}\sqrt{x^2-1}=\frac{3}{4}.$$

分别解得 $x_1=\dfrac{5}{3}$,$x_2=\dfrac{5}{4}$(舍去不大于 1 的解).

检验知,均为原方程的解.

【评注】 本例常用三角换元 $x=\dfrac{1}{\sin\theta}$,$0^\circ<\theta<90^\circ$,化为

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{35}{12}.$$

或设 $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$，转化为方程组 $\begin{cases}x+y=\frac{35}{12},\\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1.\end{cases}$

三、换元

解方程中的换元技巧，具有消元、降次、有理化、整式化等多种功能. 例 2、例 4 已出现过.

【例 5】 解方程 $\frac{\sqrt{16+\sqrt{x}}}{16}+\frac{\sqrt{16+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{\frac{x}{16}}.$

解 二重根号(开 4 次方)不好处理，作换元 $y=\sqrt{x}$，原方程可变为

$$\frac{\sqrt{16+y}}{16}+\frac{\sqrt{16+y}}{y}=\frac{\sqrt{y}}{2},$$

即
$$\frac{\sqrt{16+y}(y+16)}{16y}=\frac{\sqrt{y}}{2},$$

亦即
$$\sqrt{\left(\frac{16+y}{y}\right)^3}=8,$$

得
$$\frac{16+y}{y}=4,$$

解得 $y=\frac{16}{3}$，从而 $x=y^2=\frac{256}{9}=28\frac{4}{9}$.

检验知这是原方程的解.

【例 6】 解方程 $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6.$

解 方程即

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72,$$

设 $y=6x+7$，有

$$y^2(y+1)(y-1)=72,$$

即
$$y^4-y^2-72=0,$$

得　　　　　　　　$y^2=9$(舍去负值).

就是　　　　　　　　$6x+7=\pm 3$,

得　　$x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-\frac{5}{3}$.

四、常数代换

【例 7】 解关于 x 的方程

$$x^2-m(3x-2m+n)-n^2=0.$$

解 正规的解法是整理成关于 x 的方程

$$x^2-3mx+(2m^2-mn-n^2)=0. \quad ①$$

但也可以整理为 n(或 m)的方程

$$n^2+mn-(x^2-3mx+2m^2)=0, \quad ②$$

即　　$n^2+mn-(x-m)(x-2m)=0$,

分解　　$(n+x-m)(n-x+2m)=0$,

分别有　　$n+x-m=0, n-x+2m=0$,

得　　$x_1=m-n, x_2=2m+n$.

【评注】 本例取自初中代数第 3 册 P_{15}例 5. 当中方程②与方程①难度相当,下例的常数代换有较明显的好处.

【例 8】 解方程　$x^3+2\sqrt{11}x^2+11x+\sqrt{11}+1=0$.

解 没有学过 3 次方程的一般解法,解 x 有困难,若视 x(显然 $x\neq 0$)为方程的系数,$y=\sqrt{11}$是方程

$$x^3+2yx^2+y^2x+y+1=0. \quad ①$$

的一个解,问题便转化为关于 y 的二次方程

$$xy^2+(2x^2+1)y+(x^3+1)=0,$$

的研究. 因式分解或代入求根公式都可得

$$y=-x-1, y=\frac{-x^2+x-1}{x}, (x\neq 0)$$

分别解得　　$x_1=-1-y=-1-\sqrt{11}$,

$$x_{2,3}=\frac{1-y\pm\sqrt{y^2-2y-3}}{2}=\frac{1-\sqrt{11}\pm\sqrt{8-2\sqrt{11}}}{2}.$$

【评注】 此处的常数代换，本质上是逆用方程解的定义，这种逆用有很广阔的用场(参见例 12).

五、韦达定理解法

其基本形式是逆用韦达定理. 若两个代数式 x,y 满足 $x+y=p,xy=q$，则 x,y 是二次方程 $t^2-pt+q=0$ 的两个根.

【例 9】 解方程 $\sqrt{5-x}+\sqrt{2+x}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$. ①

解 原方程平方得

$$\sqrt{5-x}\sqrt{2+x}=\sqrt{10}. \quad ②$$

①,②表明，$\sqrt{5-x}$，$\sqrt{2+x}$ 是二次方程

$$t^2-(\sqrt{5}+\sqrt{2})t+\sqrt{10}=0$$

的两个根，有

$$\begin{cases}\sqrt{5-x}=\sqrt{5},\\ \sqrt{2+x}=\sqrt{2}.\end{cases} \text{得} \quad x=0. \quad ③$$

或

$$\begin{cases}\sqrt{5-x}=\sqrt{2},\\ \sqrt{2+x}=\sqrt{5}.\end{cases} \text{得} \quad x=3. \quad ④$$

【评注】 用观察法很容易得出③，细致一点也能得出④. 但还不敢肯定原方程恰有两解.

【例 10】 解方程 $(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$.

解 由已知有

$$(3x^2-2x+1)(7+2x-3x^2)=12,$$

配对 $(3x^2-2x+1)+(7+2x-3x^2)=8.$

这表明 $(3x^2-2x+1)$，$(7+2x-3x^2)$ 是二次方程

$$y^2-8y+12=0$$

的两个根，有

$$\begin{cases}3x^2-2x+1=2,\\7+2x-3x^2=6;\end{cases}\text{或}\begin{cases}3x^2-2x+1=6,\\7+2x-3x^2=2.\end{cases}$$

即 $\quad 3x^2-2x-1=0$,或 $3x^2-2x-5=0$.

分别解得 $x_1=1, x_2=-\dfrac{1}{3}, x_3=-1, x_4=\dfrac{5}{3}$.

【评注】 本例还可作换元

$$y=3x^2-2x+1,$$

或

$$t=3x^2-2x-3;$$

将原方程分别变为

$$y^2-8y+12=0,$$

或

$$t^2-4=0.$$

六、方程的方程组解法

其基本思路是增加方程的个数,在例 2、例 3、例 4 中已经见过.

【例 11】 解方程 $\sqrt{\dfrac{3-x}{1+x}}=\dfrac{3-x^2}{x^2+1}$.

解 作自身变换

$$y=\frac{3-x^2}{x^2+1}=\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\geqslant 0,$$

有

$$yx^2+x^2+y-3=0,$$
$$xy^2+y^2+x-3=0;$$

相减

$$(x-y)(xy+x+y-1)=0,$$

分别有

$$\begin{cases}x-y=0,\\yx^2+x^2+y-3=0;\end{cases}\qquad ①$$

$$\begin{cases}xy+x+y-1=0,\\yx^2+x^2+y-3=0.\end{cases}\qquad ②$$

由①消去 y,得

$$(x-1)(x^2+2x+3)=0,$$

实根为 $x_1=1$.

由②有，

$$\begin{cases} y=\dfrac{1-x}{1+x}\geqslant 0, \\ yx^2+x^2+y-3=0. \end{cases}$$

消去 y，得

$$\begin{cases} x^2-2x-1=0, \\ -1<x\leqslant 1. \end{cases}$$

解得 $x_2=1-\sqrt{2}$.

【评注】 对于方程组 $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ F(y,x)=0, \end{cases}$ 常可相减设法分解出 $x-y$ 的因式来.

七、方程组的方程解法

【例 12】 解方程组

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 x+\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)y+1=0, \\ \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 x+\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)y+1=0. \end{cases}$$

解 已知表明 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ 是二次方程

$$xt^2+yt+1=0$$

的两个根（t 为未知数），由韦达定理，得

$$-\frac{y}{x}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=1,\ \frac{1}{x}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

从而 $x=-2$，$y=2$.

【评注】 有时数字未必那么现成，需要作一些变形，如方程组

$$\begin{cases} x+3y+27=0, \\ 3x+7y+49=0. \end{cases}$$

需先变为 $\begin{cases} 81+9y+3x=0, \\ 49+7y+3x=0. \end{cases}$