三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

幾何學

C. П. 菲尼可夫等著

科學出版社

三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

幾何學

С. П. 菲尼可夫
П. К. 拉錫夫斯基
А. Д. 亞力山大洛夫　著
С. С. 比油什格恩斯
А. А. 格拉果列夫

蘇步青　谷超豪　譯

科學出版社

1956

內 容 提 要

本書是譯自"三十年來的蘇聯數學"中的"幾何學",包含三維空間微分幾何學、張量的微分幾何學、"整體"幾何學、綜合幾何學等四部分。第一部分敘述了曲面變形論以及線匯論;第二部分講述在蘇聯一個以應用張量方法為基本特徵的微分幾何學派的產生和發展;第三部分內容包括了"整體"幾何學在莫斯科拓撲學派的基礎上的發展和在列寧格勒初等幾何學派的基本源泉中的成就;第四部分講述公理法作為非歐幾何學創造人Н.И. 羅巴切夫斯基的遺產的研究與發展,並敘述多值對應、點的線性列、三次曲線、三角形與四面體幾何學等方面的著作。

幾 何 學

ГЕОМЕТРИЯ

原文載"三十年來的蘇聯數學"
"МАТЕМАТИКА В СССР ЗА 30 ЛЕТ"

Гостехиздат, 1948

原著者	С. П. Фиников　С.С. Бюшгенс П.К.Рашевский　А.А. Глаголев А.Д.Александров
翻譯者	蘇步青　谷超豪
出版者	科學出版社 北京朝陽門大街117號 北京市書刊出版業營業許可證出字第061號
印刷者	上海中科藝文聯合印刷廠
總經售	新華書店

1956年10月第一版　書號:0569　印張:6 4/5
1956年10月第一次印刷　開本:787×1092 1/25
(滬)0001—8160　字數:139,000

定價:(10) 1.00元

目　　錄

三維空間微分幾何學

C. П. 菲尼可夫

在所論述的時期內，微分幾何學方面的著作呈現了非凡的多樣方向．雖然如此，還是可以指出一些曾經引起研究者更大注意的主題．最初這樣的主題曾經是曲面的變形，首先是在主要基礎線上的變形．其次，線叢的射影微分理論，特別是可分層線叢偶的理論，有了很大的發展．此地被建立起來的不僅有射影的理論而且也有量度的理論．近年來微分幾何學的發展是在從高斯·達爾部的古典方法過渡到嘉當的外形式和活動標形法的標誌下進行着的．由於這樣，所提出的問題的方面已經成爲更多樣了．

§ 1. 量度幾何學

1. 在主要基礎線上的變形 在所論述的時期最初 C.C. 比油什格恩斯[1]和 C.П. 菲尼可夫[1]發表了關於曲面在主要基礎線上的變形的兩篇學位論文．自從莫斯科數學會創立人之一，K.M. 彼傑爾松導入作爲相互變形的曲面偶上的共同共軛曲線系統的變形基礎線，和作爲曲面在連續變形中保留着的共軛系統的主要基礎線等概念以來，在主要基礎線上的變形理論渡過了一時作爲最優秀幾何學家的注意中心的時代．K.M. 彼傑爾松曾經證明了，凡保留着共軛系統而變形的曲面的性能僅與這共軛系統藉助於平行法線對應到球面上時的映像有關．比安基和科塞拉把這球面映像和當時最有趣的理論即與黎保姑爾的圓系統以及附屬於無限小變形中的比安基曲面結合起來．

當時完全未曾涉及關於決定曲面上所有主要基礎線的問題，或者甚至在具有已知線素的所有曲面全體中決定其任何一個的主要基

礎線的問題，兩篇學位論文的第一個問題，就是構成曲面或線素的主要基礎線的方程系統.

C.C. 比油什格恩斯運用他所獲得的方程，以決定與旋轉面互爲變形的曲面上的主要基礎線。除了具有 ∞^1 主要基礎線族的一些曲面的場合而外，著者無需積分這方程且幾乎不用計算而做了完全的分類，甚至還描述了可能的變形. 他所預測的福斯的主要基礎線(帶着兩系測地線)直到很晚 (1931) 才爲 B. 甘姆必哀用直接計算獲得.

С.П. 菲尼可夫最初應用自己的方程去決定二次曲面上的主要基礎線. 此地容易把方程系統積分起來且得着曲面上的爲 K.M. 彼傑爾松及以後 Б.К. 姆羅傑葉夫斯基所發現的那些主要基礎線. 所獲得的一般解表明，所得着的基礎線窮盡了二次曲面的一切主要基礎線，更有趣的是，一般公式的另一應用：具有最大自由度的主要基礎線的曲面的研究. 技巧的方法導向唯一的實曲面(極小螺旋面)；它具有主要基礎線的二參數族. 後來 Б. 甘姆必哀更補充了第二個虛的極小螺旋面；它也具有 ∞^2 主要基礎線.

H.H. 盧金[1,2]對這理論做了主要的補充；他做出了沒有主要基礎線的曲面的切實造法，並且證明了，凡容許在主要基礎線上的變形的曲面乃是比較稀罕的例外.

這情況引起了在主要基礎線的各別變形的特別有價值的研究. K.M. 彼傑爾松曾經研究過這個問題而且他業已指出在主要基礎線上的變形的著名類型中的最主要者，即包含錐線(外切錐面的接觸曲線)的基礎線. 所有的這種基礎線的決定又在 1904,1911 年爲 Б.К. 姆羅傑葉夫斯基(具有二錐線族的基礎線)和 Д.Ф. 葉果洛夫(具有一錐線族的基礎線)所實現. 現時這方向的最卓越的代表者是 A.Ф. 馬士羅夫. 他利用 Д.Ф. 葉果洛夫和 A. 杜慕陵獨立地提出的二次解方法. 他們證明了，爲決定在主要基礎線上的變形，只須找尋姆塔兒方程

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = M\theta, \quad M = f(u,v)$$

的三個解 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$，使它們適合於條件

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=\varphi(u)+\varphi(v).$$

問題歸到容納二次解的函數 M 的決定和解本身的找尋.

А.Ф. 馬士羅夫給出了關於正整數 n 的尤拉方程 $E(n)$ 的二次解的一般逐次求法,這裏 $E(n)$ 是具有函數 M

$$M=\frac{n(n+1)}{(u+v)^2}$$

的姆堵兒方程. 可惜所獲得的解可能導向可展曲面,而這時問題失去意義. 這著者所獲得的最有趣的結果,要算他關於 Б.К. 姆羅傑葉夫斯基所決定的二錐線族的主要基礎線的重要補充,此地 А.Ф. 馬士羅夫[1] 的一般方法輕易地揭露了在主要基礎線上的變形的新場合,而這在 Б.К. 姆羅傑葉夫斯基的相當複雜計算裏是難以看出的.

1928 年在瓦蕭爾的學位論文裏所舉出的 Д.Ф. 葉果洛夫著作的修正較少成功. 他揭露了達爾部的想法中的錯誤,而這錯誤也反映在 Д.Ф. 葉果洛夫的結果上;他提出,當外切錐面的頂點的幾何軌跡是二重曲率曲線的時候,具有一族錐線的基礎線的場合是值得懷疑的. 瓦蕭爾和其師甘姆必哀沒有能够解決自已的疑問,而一直到 В.В. 雷儒可夫[1] 證實了 Д.Ф. 葉果洛夫的結果且闡明了頂點曲線的非零撓率的假定會導向矛盾這事實之後,問題才得到解決.

黎保姑爾的經典著作出來之後,在比安基・達爾部時代的微分幾何裏已確定線彙變形的稱呼. 它是線彙的這樣的變換,使當每一光線在空間變更時,常與某一變形的曲面 S 的切平面相銜接而且密切聯繫着. 如果採用這術語,那末不難指出,曲面在主要基礎線上的變形按照它的定義是聯繫於特殊的線彙變形,使在它之下線彙的可展曲面仍舊不變,即在線彙變形之下,它的可展曲面受到變形而仍爲可展曲面. 爲闡明這個聯繫,只須指出,線彙的可展曲面對應於焦曲面上的焦網,而這網是共軛的. 因而,對於焦曲面在以焦網曲線爲主要基礎線的變形,這網曲線的二切線彙都是具有不變的可展曲面而變形着的.

在 С.П. 菲尼可夫的論文[1,16]裏提出了關於具有不變可展曲面的

線汇變形的一般問題． 在一般場合他導引到更一般樣式的曲面變形；這時被變形的曲面的第二二次形式的各係數滿足非齊次的線性方程，而這方程的各係數則僅與曲面的線素有關． 這個變形以後在另一篇論文[7]以在運動學地共軛基礎線上的變形名稱下，為著者所研究． 當線汇的光線關於所聯繫的曲面的切平面有特殊配置時，這曲面是在主要基礎線上變形的． 這樣一來，重新出現 ∞^2 黎保姑爾圓的軸線汇，並且每一軸上攜帶着分配在同一球（以軸為其直徑）上的 ∞^1 圓系． 對於曲面在主要基礎線上的變形線汇的光線轉移而固定聯繫在與它垂直的曲面的切平面．這時候可展曲面對於變形仍為可展曲面且經常對應於變形的基礎線． 線汇仍為圓式的，而攜帶那些圓的各球則或擴大或縮小，保留其中心於線汇的光線上，使得這球和曲面的切平面的交線仍舊不改變．

在 1935—1939 年裏 C.Д. 洛新斯基返回到這課題上．在很多著作裏[5,8,9,11–20]他細密地考察了線汇的變形，使它保留着線汇直紋面的主要配分系統和其他特殊系統． 最有趣的是迷向線汇的變形（C.Д. 洛新斯基[5,6,7,10]，這種線汇的光線垂直於附加的某曲面 S 的切平面且線汇對於曲面 S 在主要基礎線上的變形仍舊是迷向的．

誘導變形的曲面 S 是任意的極小曲面；主要基礎線是由極小曲面上共軛的零長的曲線組成的；變形着的曲面 S 仍舊是極小曲面．因為迷向線汇的中點包絡面也是極小曲面，所以這樣藉助於迷向線汇就建立起極小曲面的變換．例如，恩納伯曲面對應於海納堡曲面．

2. 變形的各種課題 C.B. 巴赫瓦羅夫[5]考察了法線汇的特殊變形． 著者把線汇的每一光線聯繫到曲面 S 上它所通過的那一點，並且要求對於曲面 S 的變形光線的各焦點到其與曲面 S 的交點的距離不改變． 課題有兩個明顯的解答：1)任何法線汇對於其一焦曲面上的變形仍舊是法線汇，且保留焦點間的距離不變（作為線汇光線所包絡的正交測地線的測地曲率半徑）和 2)極小曲面的法線汇，當這曲面變形時仍為法線汇且保留光線上的各焦點不動（因為不改變曲面的主曲率半徑）． 把這些場合留在一邊，還有二種可能性：1)曲面

S 是線彙的中點曲面，而不垂直於光線；它屬於曲面的特殊類，即與旋轉面互爲變形的曲面類；2)若曲面 S 不均分每一光線的焦點距離，那末存在第二曲面 $\bar{S}$，使它和第一曲面 S 調和分割光線的二焦點且對於 S 在運動學的基礎線上的變形它本身同時變形；根據二焦點的不動性這曲面 $\bar{S}$ 的點密切聯繫於曲面 S 的對應三面體．

上述課題本身有很大的興趣，而且分別爲 C.B. 巴赫瓦羅夫[8]所考察．他把另一特殊變形問題表述爲下列方式：對於曲面 S 的每一切平面有二點 M_1 和 M_2 和它密切聯系着，使這二點畫成互爲變形的一對曲面 S_1 和 S_2．曲面 S 變形着；二曲面 S_1 和 S_2 同時變換着．我們要求 S_1 常與 S_2 互爲變形． 本問題有非平凡解；著者詳細地予以研究．

C.C. 比油什格恩斯[10]考察了比安基曲面的變形． H.И. 阿力克錫葉夫研究了曲面變形，使曲面受到變形之後仍舊是匯格爾丁曲面．除了常數高斯曲率的曲面有很明顯的變形而外，沒有一個曲面對於所有的變形能保持其爲匯格爾丁曲面．但是在主要基礎線上變形而不越出匯格爾丁曲面類的曲面却存在．除了極小曲面的變形和保留曲率線的蒙儒曲面的變形等平凡的場合而外，著者還找出了福斯曲面的一類(二參數的族)，其中各曲面同時是旋轉面，對於保留測地線共軛系統的變形仍不失其爲匯格爾丁曲面．

C.П. 菲尼可夫的關於迴轉線彙（這線彙的光線聯繫於某曲面 S 的點，使它對於 S 的變形在空間轉移而且當曲面 S 變形到某一曲面 S_0 時，一切都合而爲一，於是線彙縮小爲一直線）的著作[5,10]對變形問題有間接的關係．

另一有趣的問題(C. П. 菲尼可夫[12])和曲面變形問題也有聯繫，由平面和在其上的一點(原素的心)集合所成的圖形稱爲平原素．對某曲面 S 的每一點 M 要聯繫着 ∞^1 平原素，使其心在曲面 S 的切平面上，而且其平面通過切點 M．如果存在 ∞^1 曲面 Σ，各曲面是系統的心所畫成的且以系統的平面，即在這平面所屬的原素的中心的每一平面做切平面，那末這樣的 ∞^3 平原素的系統是可分層的．在這些

條件下問題可表述如次：求曲面 S 和其聯繫的 ∞^2 平面素系統，使對於曲面 S 的所有變形系統仍舊是可分層的，若平面素系統是由 ∞^1 法線彙的焦點和焦平面所構成的，且各線彙以曲面 S 爲其第一焦曲面，那末問題有很明顯的解答．把這解放在一邊，我們僅到達於一種作法：曲面 S 和所有曲面 Σ 是和同一個二次曲面互爲變形的，而且每一對曲面 Σ 與曲面 S 是由 W 線彙聯繫起來的；這線彙也建立了關於二次曲面的變形曲面的比安基變換．

現在轉到量度幾何中不能納入關於曲面變形的工作軌道的那些問題． 第一步必須提出 Д. Н. 夕里格爾關於複素直線幾何的著作[1,2,3]．這些著作發端於 A.П. 科鐵利尼可夫的碩士論文“螺旋計算法及其在幾何和力學的應用”(1895)並且以“直線的複素幾何的基本公式”爲總的標題，分別叙述於 1897，1908 和 1928 年的三篇出版物裏．只有最後論文[2]和單印本[3]屬於所論述的時期． 根據這個獨創方法，直線形象的研究是以新的複素數論爲基礎的；這新複素數是 A.П. 科鐵利尼可夫和 E. 斯都第獨立發現，而具有適合條件 $\omega^2 = 0$ 的虛單位 ω．一直線是決定於複素向量 $\bar{r}_0 + \omega\bar{r}_1$ 的，此處 $\bar{r}_0$ 是直線的方向向量而 $\bar{r}_1$ 則是它關於坐標原點的力矩． 像 W. 柏拉須凱一樣，但和他無關地且在許多場合更早地，Д.Н. 夕里格爾不但創造二次直紋面、線性線彙和線叢的解析幾何，而且給出直紋面和直線彙的微分幾何中的基本事項．

大部份已在 1917 年前完成的另外一個大方向，是在 Д.М. 辛作夫關於發甫方程的積分曲線(連絡理論)的著作中提出來的．關於這方向的更新著作，將與C.C. 比油什格恩斯的最後論文相結合而討論．

至於 Д.М. 辛作夫的古典工作，我們僅能介紹讀者看文集“十五年來的蘇聯數學”中的論文“幾何學”，117 頁．

從較細碎的著作應當指出關於具有二個及更多個共軛平錐線網的曲面的 Я.П. 伯蘭克的有趣的報導[1,2,3]，此地著者把具有某些母線的移動曲面理論推廣到 K.M. 彼傑爾松的曲面上． 這問題重新叙述在 H.Г. 切波塔留夫的三篇論文裏[2,3,4]，此地不但得着關於移動曲面

的問題的優美解答，而且也推廣到任何維數的空間和任何連續變換羣.

Н.Г. 都嘉諾夫[1]創造了伯爾脫朗曲線的有趣的拓廣. 他考察曲面上的曲線，於是聯繫在曲線的切線和曲面的法線上所作的正交三面體來代替佛勒涅三面體；採取法曲率和測地撓率來代替曲率和撓率. 在這樣的代換下，伯爾脫朗定理仍舊生效：若測地撓率 $1/T_g$ 和法曲率 ν 滿足常數係數的一次方程

$$\frac{\cot\psi}{T_g} - \nu = \frac{1}{d}, \tag{1}$$

則必存在共軛於第一曲線的第二曲線，位於與第一曲面平行的第二曲面上；$d=$ const. 是雙方曲面的對應點間的共同法線線段，而 $\psi=$ const. 是二共軛曲線的切線間的角度，對於常數 ψ 和 d 的任何值，任意曲面 S 必帶有曲線(1)的二族，它們相互構成角度 $\pi/2-\psi$. 它們的法曲率爲關係式

$$\nu_1+\nu_2 = J\cos^2\psi - \frac{2\sin^2\psi}{d}, \quad \nu_1\nu_2 = K\cos^2\psi + \frac{\sin^2\psi}{d^2}$$

所聯繫着，其中 J 和 K 是曲面的均曲率和全曲率. 如果把平行曲面偶換做一線彙的焦曲面偶，使線彙的光線是共軛曲線偶的共同法線，也可以得出類似的結構. 這時候法曲率爲測地曲率所替換.

3. 勢的曲面 Л. Н. 斯勒騰斯基[3]貢獻自己的論著於特殊的曲面論(具有平曲率線的勢的曲面). 勢的曲面是在 Д.Ф. 葉果洛夫的博士論文裏(1901)從特殊的運動學條件被導引到科學裏的. 對於曲面上已知曲線，u,v 的直交網，保留網中曲線的曲面上的點變換的單項連續羣是由方程

$$u_1 = u + t, \quad v_1 = v + t$$

定義起來的，其處 t 是羣的參數. 如果把這些方程看做曲面上(一般是可壓縮的)流體運動方程的話，那末可以提出問題：什麼時候這運動會有速度的勢呢？ 若一曲面關於其曲率線有速度的勢，則稱爲勢的曲面. Л.Н. 斯勒騰斯基找尋具有平曲率線的勢的曲面. 它們組

成了和三個任意單變數函數有關的曲面族．積分可做到最後，且有簡單的幾何構造．

Д. Ф. 葉果洛夫[2] 曾經把新觀念帶到曲面的研究中去．我們業已談過，曲面可以看做平原素的二維集合，著者將曲面看作 ∞^1 個單維的平原素集合的全體；每一集合他稱爲“線形” F. 比較遲得多，伯拉須凱又稱之爲曲面帶(Streife)．Д.Ф. 葉果洛夫提出問題：能不能從同一族“線形” F 組成新曲面呢？任何曲面 S 必容納這樣的變換：曲面 S 在空間的任意 ∞^1 位置的全體必有包絡面 $\bar{S}$；它沿特徵線切於每一曲面 S，因而和曲面 S 有中心在這特徵線上的 ∞^1 共同平原素，即共同的“線形” F．因爲包絡面 $\bar{S}$ 是特徵線的幾何軌跡，而且所有的“線形” F 屬於同一曲面 S，而僅有不同的位置，所以顯而易見，曲面 $\bar{S}$ 是從曲面 S 用“線形” F 族的配置組成起來的．但是，如果曲面 S 是完全任意的話，那末就談不到“線形” F 族了．著者證明，一個“線形”的平原素的法線(曲面 S 的法線)屬於線性叢．因爲平原素 F 集合的中心線的測地曲率在曲面 S 上和在所論原素的所有 ∞^1 平面所切的曲面 $\bar{S}$ 上是相同的，所以 F 的測地線或主切曲線，或曲率線在配置到新曲面 $\bar{S}$ 上去之後也保留着這性質．著者在其論文所提出的問題是如此多樣性的，其原因即在於此．

將這個觀念應用於線彙論 Д.Ф. 葉果洛夫[3]得到具有二直紋焦曲面的 W 線彙的雅緻構造．按照定義，這線彙的光線和二焦曲面的對應母線相交，而組成二次的直紋面．著者採用 ∞^1 二次曲面 Q 的一族．特徵線乃是四次空間曲線．但是，如果每一個二次曲面 Q 本身是 ∞^1 線性叢的族的特徵，就是在直線的勃履格坐標 p 之下決定於方程

$$\Sigma V_i p_i = 0,\ \Sigma V'_i p_i = 0,\ \Sigma V''_i p_i = 0,\ i = 1,2,\cdots,6, \quad (2)$$

但 $V_i = f_i(v)$, $V'_i = \dfrac{dV_i}{dv}$, $V''_i = \dfrac{d^2V_i}{dv^2}$，且 v 是族的參數，那末曲面 Q 的特徵線分解做四直線，而這四直線組成斜四邊形．它的一對對邊畫成二直紋焦曲面，而和它們相交的曲面 Q 的母線是所求的 W

彙. 因而,它是決定於在勃履格坐標下的方程(2)的.

從此得知,每一個這樣的線彙必有同一類的另一線彙和它聯繫:後者是由同一曲面 Q 的第二系母線組成的且其焦曲面是由四邊形 H 的第二對對邊所畫成的. 若聯繫的焦曲面退化為直線,即所有的斜四邊形 H 有一對的對邊在二直線上,那末第一線彙的焦曲面有共同的直準線偶,所有的拉勃拉斯變換是具有同一對準線的直紋面且線彙是具有直紋焦曲面的最一般線彙 R(С.П. 菲尼可夫[24]).

§ 2. 射影微分幾何學

Д.Ф. 葉果洛夫[3]的最後著作在結果上和在方法上純係古典的而有關於射影微分幾何學的. 克來因派的幾何如仿射、射影微分等等幾何的發展是作為現代微分幾何的特點並且和張量分析一樣,它是無疑地為愛因斯坦的廣泛思想所喚起的,而在我們的祖國獲得了生動的響應.

М.П. 切爾惹葉夫[8-6,10] 在一連串論文裏討論曲線和仿射球的仿射微分幾何按伯拉須凱精神的各種問題. Г.Ф. 拉勃切夫和 Т.А. 蘇里曼在 n 維仿射空間的微分幾何裏做工作.

關於射影微分幾何還有更豐富的研究. 蘇聯幾何學家們的工作在某些部門中,在世界文獻裏佔優勢. 線彙論,特別是可分層偶的理論應歸入這些部門裏. 可分層偶的射影理論在頗大程度內是在莫斯科創造的,而其量度的理論是整個地由莫斯科幾何學家建立起來的.

1. 線彙的可分層偶 線彙的可分層偶的概念是 G. 福比尼(1924)作為 ∞^3 平面原素系統可分層性觀念的應用而導入於科學裏的. 設已知線彙偶,其光線 d 和 d' 之間已建立了一對一的對應. 若對於光線 d 的每一點取通過這點和光線 d' 的平面和它聯繫,那末對於每一光線 d 就有 ∞^1 平面原素和它聯繫,而且對於線彙(d)就有 ∞^3 平面原素的系統和它聯繫. 如果在這構成裏對調光線 d 和 d' 的位置,那末獲得第二系統. 若這雙方系統是可分層的,那末線彙偶是可分層的. G. 福比尼證明,二光線 d 和 d' 的焦點相互對應,使連接光線上

的對應焦點的二直線 d_1 和 d_2 都切於這些焦曲面. 因此,得着斜四邊形所畫成的線彙四個一組,而四邊形的各邊都切於其頂點所構成的曲面;後來它由 С.П. 菲尼可夫[26]詳細加以研究,且在構圖(T)的名稱下進入了科學之中.

G. 福比尼爲了"有用於曲面論的"願望造出了可分層偶的概念;後來他的學生和"射影微分幾何學"合著者捷克(1926)應用它到曲面論上去.

從 1927 年蘇維埃數學家在這範疇裏開始了工作,他們提出了的研究構圖本身的問題. С.П. 菲尼可夫[11,15]證明了,列入於可分層偶的線彙不是任意的. 可分層的線彙集合和一個雙變數函數有關. 例如,在線彙 W 中僅存在三個類型的可分層線彙,即和適當選擇的線彙可能構成可分層偶的線彙,就是:1)線彙 R 和同一類型的線彙構成可分層偶,這些(共軛)偶也是 G. 福比尼所考察的. 偶中的雙方線彙的可展曲面相互對應,並且在分層這個或另一個平原素系統(即在平原素的中心切於原素平面的)的每一曲面上刻下共軛網. 每一線彙 R 構成和五個任意常數有關的可分層偶集合. 2)線性叢的線彙和同一叢的線彙構成可分層偶,這定理後來爲 M. 科濟明[1]予以綜合的證明. 最後,具有直紋焦曲面的線彙 W 和它本身構成可分層偶.

很久以後,在 1947 年 Г.М. 班·夕利可維奇在研究什麼時候已知的可分層線彙比普通情況有更多的可分層偶這個問題的時候,獲得了所有的這些可分層偶. 因爲他已經用新方法(嘉當的外形式方法)做了工作,所以他容易地解決了另一問題,即關於可分層線彙的焦曲面的自由度問題,無論對於任意已給的曲面 S,總是可以找出帶有單變數的四個任何函數的可分層線彙,使以 S 爲其焦曲面.

偶的分層曲面組成很可注目的構圖,A. 德拉赤尼稱它爲比安基系統. 按照其本身的構造,它們在平原素中心切於原素的平面;因而在第一族的各曲面 Σ 和直線 d 的交點所引的切平面通過對應的光線 d',反過來,通過光線 d 的平面在直線 d' 的點上切於第二族的曲面 Σ'. 由此得知,每對曲面 Σ,Σ' 乃是以這些曲面的對應點的連線做光

線的線彙的焦曲面. 同時,在所有的曲面 Σ 和 Σ' 上主切曲線互相對應. 因而,所有這 ∞^2 線彙全部是線彙 W, 且每組四曲面 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_1', \Sigma_2'$ 組成比安基關於主切變換可對調性的著名定理中的構圖.

2. 拋物式的可分層線彙 以上所提的始終是有關於具備不同的焦曲面的線彙,可是含有拋物線彙的可分層偶必存在,且在這樣的場合下,偶的雙方線彙都是拋物式的(C.П. 菲尼可夫[28,33]). 每一個拋物式的可分層線彙是由任意線彙 R_0 的主切線所畫成的. 在曲面 R 的各種性質之中,最可注目的或許是為它所僅有的射影地變形的可能性. 若對於二曲面的每一對對應點可以聯繫空間的一個射影變換,使其一曲面變到在所定的點偶和另一曲面做成第二階接觸的曲面. 那末二曲面互為射影變形. 如果二曲面在已知的點偶有第二階接觸的話,那末一定存在接觸階數可以提高的方向. 在我們的場合,這四方向一組除了二主切線外,還含有共軛方向偶. 在曲面上處處切於這些方向而且是變形基礎線的共軛曲線網稱為網 R. 這網的一族和另一族曲線的切線都畫成線彙 W. 凡網 R 的二族曲線合成一族,因而變成主切曲線的曲面 R 稱為曲面 R_0. 可分層的拋物線彙是由這些主切曲線 R 的切線所畫成的.

無論類型 R_0 的曲面 (X) 是怎樣,總可以聯帶同類型 R_0 的五個參數自由度的曲面 (Y), 使其主切曲線 R 的切線畫成可分層的拋物偶. 同時,連接雙方曲面上的對應點的直線 xy 切於它們且畫成以 $(X),(Y)$ 為焦曲面的線彙 W. 若固定曲面 (Y), 那末可以尋覓三個任意常數在內的曲面 (Y'), 使它是作為曲面 (X) 的主切變換的曲面 R_0 並且雙方曲面 (Y) 和 (Y') 的主切線 R 要在某點 T 相交. 於是這點畫成新曲面 R_0, 其主切曲線對應於曲面 (X) 的主切曲線,而主切線 R 通過點 X. 直線 YY' 在其上還帶着 ∞^1 點,而各點畫成與 (Y') 同類的新曲面. 這直線和曲面 (X) 的主切線在點 Z 相交,而且這點 Z 重新畫成曲面 R_0, 對應於曲面 (X) 的主切曲線且以直線 YY' 為其切線 R.

因此,四曲面 $(X),(Y),(Z)$ 和 (T) 一組構成閉環; 所有的曲面以其主切曲線做對應,且每一曲面的切線 R_0 通過其次一個的對應點.

回到雙曲式線束的可分層偶，必須指出：每對這樣的線束也把四個線束引進觀察，而這些自然地是按照每對中的二線束分解做二群的．首先，得着二線束，使它們和可分層偶一起構成構圖(T)；其次得着由以構圖(T)為基礎的四邊形的二對角線所畫成的另外二線束．很自然地可以提出問題：什麼時候這些線束本身會組成可分層偶呢？(C.П. 菲尼可夫[15])，關於對角線所畫成的線束，解答是非常簡單：在且僅在於原來的偶是共軛的時候．

3. 線束的可分層的拼四小組 構圖(T)的兩偶線束互相間的聯繫要密切得多，所以有一定根據可稱一個構圖(T)的二可分層偶為拼四小組．這個聯繫的詳細研究是 C.П. 菲尼可夫[15]所做的． 主切曲線在全部四族的分層曲面 $\Sigma,\Sigma',\Sigma_1,\Sigma_2$ 上做成對應．凡連接曲面 Σ,Σ_1 上的對應點的直線 r 或其切平面的交線 ρ 所畫成的線束，全部以其可展曲面做成對應．它們是共軛或調和於曲面 Σ,Σ_1 等等． 若可分層的拼四小組含有一個線束 W，那末全部四個也都是線束 W，不僅如此，全部四個都是線束 R (曲面 R 的系統 R 的切線束)；在這場合，二偶都是共軛的，並且對角線束是同一類的． 潘塔夕指出了共軛的拼四小組的三個特出類型：

1) 共軛拼四小組的第一類型和主切曲線屬於線性叢的曲面 S 有關． C.П. 菲尼可夫[32,30]證明了，只有這樣的曲面能使其第一和第二維爾清斯基準線為 ∞^1 曲面的二族所共有；因而，使其準線的束偶成為共軛的可分層偶． 更早些 G. 福比尼證明了，根據線束 W 可以把每一曲面 S 用兩樣方法變換到二次曲面 Q． 蘇步青(1935, 1936)闡明了，它是雙重地被變換到二次曲面 Q 的．潘塔夕(1934,1935)補足了這共軛偶使成為共軛的拼四小組．曲面 Q 二度進入拼四小組的可分層曲面的每一串裏． C.П. 菲尼可夫[41]建立了，各焦曲面也是類型 S 的曲面，畫成拼四小組的斜四邊形的對角線是它的維爾清斯基準線．另一方面，拼四小組的可分層曲面每四個容易相互聯結起來，使得連結它們的線束組成新的共軛拼四小組．它們全部和同一個二次曲面 Q 相聯繫着，而這曲面 Q 是它們全部的李氏曲面的包絡且其