面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

电动力学

第二版

蔡圣善　朱　耘　徐建军　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

电动力学

第二版

蔡圣善 朱 耘 徐建军 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材和普通高等教育“九五”国家级重点教材. 本书是在原第一版(曾获国家教委优秀教材一等奖)的基础上修订而成的. 全书系统地讲述了经典电动力学的基本概念、基本原理以及处理电磁体系的常用方法. 第一、二章阐述电动力学的基本原理和对称性质；第三章至第五章讨论静态场，着重介绍静态场问题的各种解法；从第六章开始转入讨论动态场，第六章至第十章阐述似稳场、超导电动力学、电磁波传播、波导和等离子体电动力学；第十一章讨论狭义相对论和四维形式的电动力学；第十二、十三章讲述电磁波的辐射、散射、衍射；第十四章介绍电磁场的拉格朗日函数；最后，第十五章专门介绍关于麦克斯韦理论的讨论. 为配合教学的需要，每章均附有一定数量的例题和习题.

本书可作为高等院校物理类、电子信息科学类以及电气信息类等专业的教材或参考书，也可供其他专业和社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

电动力学/蔡圣善等编著. —2版. —北京：高等教育出版社，2002.7
ISBN 7-04-010809-7

Ⅰ.电... Ⅱ.蔡... Ⅲ.电动力学-高等学校-教材 Ⅳ.O442

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第006608号

责任编辑 胡凯飞 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 郝 林
版式设计 马静如 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 宋克学

电动力学 第二版
蔡圣善 朱 耘 徐建军 编著

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	中国科学院印刷厂		
		版　　次	1984年4月第1版
			2002年7月第2版
开　　本	787×960 1/16	**印　　次**	2002年7月第1次印刷
印　　张	29		
字　　数	540 000	**定　　价**	33.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

第二版前言

本书第一版出版至今已有多年,在这期间作者陆续收到许多读者的来信,对本书的出版给予很大的支持和鼓励,1988 年,本书第一版曾获得国家教委优秀教材一等奖. 所有这些都令作者感到无比欣慰,与此同时,也有很多读者根据自己的教学实践指出了本书的不足之处. 概括起来主要表现在以下几个方面:一是本书的习题部分偏难且没有提示;二是本书的相对论部分引入了度规张量,增加了难度和复杂性;再就是本书的量大,内容偏多,很难在规定的学时内把全书的内容讲完. 这给许多读者和使用本书作为教材的同行带来不便. 针对这些情况,这次修订时我们作了较大的改进. 首先,我们调整了部分习题,把偏难和作为内容补充的习题删除,全部习题都给出了提示或解答. 其次我们重新改写了相对论部分,删去了度规张量. 作为教材,本书的内容确实偏多了一些,但作者又不愿对原书的体系作重大的改动,为此,作者除了删除个别内容外,采用了打星号的办法. 凡是打星号的章节,在课堂教学中都可以不讲,剩下的内容在 54 学时左右是可以完成的. 星号内容可以作为教师、同学的参考材料. 除此之外,其他有关部分也作了适当的改动,并尽可能把原书中的错漏之处作了修正. 尽管如此,限于作者的水平,书中难免还有不妥之处,诚恳地希望读者批评指正. 徐在新、倪光炯、贾起民、戴显熹等教授详细审阅了全部书稿并提出了许多重要的修改意见和建议,作者在此表示衷心感谢. 本书的编写和出版还得到了国家基础科学研究与教学人才培养基地的部分资助.

作　者

2001 年元月于复旦大学

第一版前言

本书是根据作者在物理系多年讲授本课程的讲义的基础上修改补充而成的．

在教学实践中我们体会到，一本好的教材不仅是一个好的“导游”，把学生带进丰富多采的物理世界的某个领域，引人入胜地向学生们叙述这个领域的“名胜古迹”，让他们从这里进一步领略大自然的奥妙和奇迹；而且它更是探索者的向导和挚友，因为它所面对的毕竟不是“游客”，而是一批充满着学习热情、求知欲极其旺盛的青年学生，更确切地说是一批兴致勃勃的未知世界的探索者．教学的目的不是让他们陶醉于已知世界的美景之中，而是保持并进一步激发起他们的热烈的求知欲望和理想，激励他们去钻研各种问题，勇敢地去思考、去探索、去追求、去创造．

诚然，担当这样的“导游”并不容易，而成为一个探索者的向导和挚友更加艰难，但无论如何这应当是我们的目标．为此，我们在本书中尽可能地介绍足够的现代物理题材，让学生多接触一些新奇的、与现代物理密切相关的概念和论题，以期引起学生的注意和兴趣．例如，在§1.9、§2.6、§2.8、§2.9等章节中，我们从电动力学的角度探讨了磁单极子及其电荷量子化；在规范变换不变性的讨论中涉及了规范场的概念，这些是现代物理中的前沿论题；与此同时对对偶场以及C、P、T守恒定律作了讨论．再如，§2.7节叙述了阿哈朗诺夫－博姆效应，对矢势 $\boldsymbol{A}$ 的物理本质作了分析，这个效应的涵义极为深刻，曾使许多人颇受震惊．电磁场角动量在一般教科书中常被忽略，其实这是个很值得讨论的题材，我们在全书的有关章节中都涉及了，并在§2.4节中，半经典地导出了光子的自旋．还譬如，我们从电动力学的角度描述了超导电动力学和等离子体电动力学这两个领域的一些基本物理规律．这两个领域在近几十年中取得了很大的进展，在应用方面前景广阔，之所以撰写这两章还出于我们希望教材能更多地联系实际的想法．凡是与实际联系较为密切的内容我们都作适当的加强．例如对第八章中电磁波传播的内容作了一定的充实；第九章波导问题本身是很实际的课题，其中我们专门讨论了多连通波导(§9.5)，谐振腔频率的漂移和 Q 值的计算方法(§9.7)，以及腔体频率微调理论(§9.8)等．再如，对切连科夫辐射我们作了详细的分析，因为这是一个极为普遍的现象，而且有着很重要的应用．电磁波的散射和衍射无论在应用物理(或实验物理)方面还是理论物理中都很重要，我们把

他单独列为一章．我们在选材方面的第三个想法是适当选取能开阔学生思路、扩展学生眼界的题材，希望学生从中受到启发，给学生留下“悬念”．为此，我们尝试地写了最后一章，即第十五章，对麦克斯韦理论作了专门讨论，以便对此理论有个全面的概括了解．在§15.6中对光子质量不为零可能引起的物理效应我们也作了讨论，以期加深学生对库仑定律的平方反比性的理解并让学生看到一种物理理论是如何与实验物理紧密相关．总之，我们希望这些内容能活跃学生的思想．

在本书内容的叙述上，我们力图把物理模型的直观性和数学工具的简洁性结合起来，充分让学生发挥他们已掌握的数学知识和技能．例如，复变函数、格林函数、特殊函数、数理方程、矩阵、张量分析等．不回避必要的数学工具，既可使叙述简洁明了又能提高学生的演绎能力和抽象思维能力，后者也许更为重要，因为从某种意义上说，这是基础理论课程应当承担的义务．为了便于学生自学和加强对概念的理解，公式的推导过程尽可能详细，每章都有一定数量的例题和习题，并且对大部分的习题给出了答案．

应当说明，我们所作的这些努力最多也只能算是一种启发性的尝试，尝试的目的在于抛砖引玉．

讲完本书的全部章节需要90个学时．但我们考虑到各方面的需求，在章节内容的安排上有一定的独立性，因此教师可根据实际情况选择有关的章节进行讲授．

本书的许多内容曾在1982年、1983年召开的全国高等师范院校电动力学讨论会上讲授过，与会的各地同事们向我们提出了宝贵意见并表达了他们对本书修改后出版的热切期望．如果本书对大家有所启发和裨益，也就了却了我们的心愿，并表达了我们的谢意．我们还要感谢参加过电动力学教学小组的同志和物理系的各届学生，他们的认真讨论和质疑使我们受益匪浅．

本书的单位制原先采用高斯制，在付印前，国务院发布统一实行法定计量单位命令后，我们立即全部改为国际单位制．由于时间仓促，加上作者水平有限，错误和不妥之处在所难免，乞望读者批评指正．

作　者

1984年4月于复旦大学

目　　录

第一章　麦克斯韦方程组

本章将从基本的电磁实验定律出发建立真空中的麦克斯韦方程组. 并从微观角度论证存在介质时的麦克斯韦方程组的形式及其电磁性质的本构关系. 继而给出麦克斯韦方程组在边界上的形式. 最后讨论方程组的完备性和电磁场的对偶性.

§1.1　库仑定律　静电场的散度和旋度

1. 库仑定律

库仑定律是描写真空中两个静止点电荷 q_1 和 q_2 之间相互作用力的定律，其数学表达式为

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{R}_{21}}{4\pi\varepsilon_0 R_{21}^3}, \tag{1.1}$$

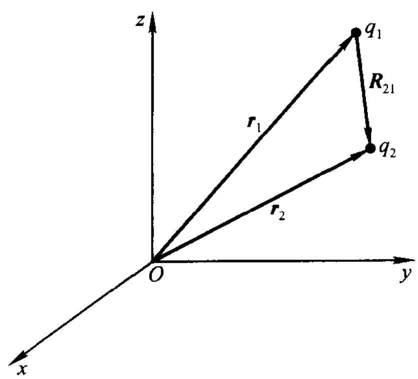

图 1.1

如图 1.1 所示,式中的符号 $\boldsymbol{R}_{21} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ 表示点电荷 q_1 到 q_2 的矢径；$\boldsymbol{F}_{21}$表示电荷 q_1 对 q_2 的作用力. 同理,q_2 对 q_1 的作用力 $\boldsymbol{F}_{12}$是

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \boldsymbol{R}_{12}}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^3} = -\boldsymbol{F}_{21}. \tag{1.2}$$

库仑定律的内容已为大家所熟知. 这里要着重指出的是:该定律在电磁学

发展史上占有重要的地位,库仑定律的发现使人们对电现象由定性的研究过渡到定量的研究,这是电学研究的转折点.特别是它的平方反比律性质,不仅是高斯定理的基础,而且隐含着光子质量为零这样一个深刻的物理意义(对这个问题我们将在第十五章专门讨论).现代实验证明*,如果库仑力正比于$\frac{1}{r^{2+\delta}}$,则δ的极限值为$(2.7\pm3.1)\times10^{-15}$.

2. 叠加原理

库仑定律所说明的只是空间存在的两个点电荷之间的相互作用.实际上往往同时存在多个电荷,这时任意两个电荷之间的相互作用的规律是什么呢?每个电荷受到多大的作用力呢?总结了更多的实验事实后人们发现,若空间存在n个电荷$q_1,q_2,\cdots,q_n$,这时任意一个电荷,例如q_j受到的其余电荷对它的作用力可表示为

$$\boldsymbol{F}_j=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_jq_i\boldsymbol{R}_{ji}}{R_{ji}^3}\quad(i\neq j).\tag{1.3}$$

(1.3)式即是电动力学中的**线性叠加原理**.这是经典电动力学中一个十分重要的原理,其重要性不仅仅在于给计算多个带电体之间的相互作用带来了方便;更重要的是,正是这一线性叠加原理,才使得真空中的麦克斯韦方程组是$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的线性方程组,电磁规律才得以像现在这样简单明了.原理是假设性的,它并不能从理论本身中产生,其可靠性需要由实践来检验.迄今为止,在经典范围内和我们可以达到的场强下还没有找到一个反例显示出线性叠加原理失效.在多电子原子的量子理论中,用势的线性叠加来处理原子核和电子之间、电子和电子之间的相互作用获得了巨大的成功,这表明在亚原子领域内,真空中的电场仍具有经典的线性特性.

实际上电荷分布是不连续的,因为电荷是量子化的,任何物体所带的电荷总是电子电荷的整数倍.但在考查物体的宏观性质时,能观察到的总是大量微观粒子的平均效应,因此常用电荷连续分布的概念来代替电荷的分立性.

定义电荷体密度为

$$\rho=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\Delta Q}{\Delta\tau},$$

其中ΔQ是空间任一体积元$\Delta\tau$中的电荷量.因此一个点电荷受到一个电荷连续分布的带电体的作用力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{q\rho\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau,\tag{1.4}$$

* E. R. Willams, J. E. Faller and H. A. Hill, Phys. Rev. Lett., 26 (1971) 721.

式中 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathrm{d}\tau$ 指向 q 的位置矢量.

同理,一个电荷连续分布的带电体受到另一个电荷连续分布的带电体的作用力为

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\rho_1\rho_2\boldsymbol{R}_{12}}{R_{12}^3}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2, \tag{1.5}$$

式中 ρ_1、ρ_2 分别表示第一个带电体和第二个带电体的电荷体密度,$\boldsymbol{R}_{12}$是体积元 $\mathrm{d}\tau_2$ 指向 $\mathrm{d}\tau_1$ 的相对位置矢量.

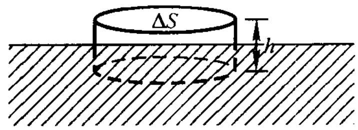

图 1.2

虽然电荷的真实分布是电荷体分布,但在实际情形中会碰到电荷集中分布在靠近物体表面的一个薄层内,此时我们常引入电荷面密度来描述这种电荷分布. 如图 1.2,若电荷分布在表面薄层 h 内,用 ΔS 代表表面上任一小面积元,则体积元 $h\Delta S$ 内的电荷量为

$$\Delta Q = \rho(h\Delta S).$$

我们把下面比值的极限值

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S} = \rho h$$

定义为**电荷面密度**. 显然理想的电荷面密度是 $h\to 0$ 的极限情形,这时只有当电荷体密度 ρ 在边界上的分布是奇异时,电荷面密度 σ 才可能是不为零的有限值. 把(1.4)和(1.5)式中的 $\rho\mathrm{d}\tau$ 改成$\sigma\mathrm{d}S$,则可得电荷以面密度形式分布时的相互作用力的表达式. 注意,我们在写出(1.4)和(1.5)式时应用了线性叠加原理.

3. 电场

从库仑定律中我们看到,在一个给定电荷分布的空间内某一点放置一个点电荷 q,此点电荷所受的力由两个因素决定:一是点电荷本身的位置及其电荷量的大小;二是给定电荷的分布和电荷量的大小. 由于放置点电荷 q 将可能会影响给定电荷的分布;或者说,原先的电荷分布将重新改变成另一种分布,因此为了使问题简单,我们在讨论电荷 q 的运动时,常把其余电荷看作保持原先的分布,即其余电荷的相对位置都是固定不变的. 于是,作用在电荷 q 上的力仅与该电荷的电荷量 q 及其位置有关,即

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是点电荷 q 所在的位置矢量,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$是 $\boldsymbol{r}$ 的某一矢量函数. 把上式与库仑定律(1.3)式比较,可以看出

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}, \tag{1.6}$$

或与(1.4)式比较得

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau',\tag{1.7}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是观察点 P 的位置矢量,$\boldsymbol{r}'$是 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$的位置矢量,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. 由(1.6)或(1.7)式可知,要讨论点电荷 q 的运动就要知道它所受到的作用力,求作用力又归结为求函数 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$,而它决定于除 q 以外空间其余电荷的分布. 这个函数称为**电场强度**.

引入 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$后,我们可清楚地看到,电荷之间的相互作用不再是“超距”的,它们之间是通过场 $\boldsymbol{E}$ 的传递才发生相互作用的;电场可以在空间的无源区域存在. 如果两个不同分布的源在空间某点上产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 相等,则在该点上放置的点电荷 q,就受到两个相等的力. 场的概念是极其重要的,是最有成效的物理概念之一,它渗透了物理学的各个领域.

4. 高斯定理

现在,我们来具体分析一下电荷分布产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的一般性质. 所谓电场其实是带电体周围的一个特殊空间,其特殊性表现在:当我们在这个空间放入一个点电荷时,点电荷就会受到作用力. 空间是由点、线、面构成的,空间的不同性质表现为这些空间的线积分、面积分的不同. 因此电场的性质也应由它的线积分和面积分来表征.

先讨论场量 $\boldsymbol{E}$ 的面积分,利用(1.6)式,对空间任一封闭曲面 S 作 $\boldsymbol{E}$ 的面积分,可得

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\sum_i\frac{q_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\oint_S\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i^3}q_i.$$

因为

$$q_i\mathrm{d}\boldsymbol{S}\cdot\frac{\boldsymbol{R}_i}{R_i^3}=q_i\cos\theta_i\frac{\mathrm{d}S}{R_i^2}=q_i\mathrm{d}\Omega_i,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是曲面 S 上 $\boldsymbol{r}$ 处的小面积元,$\mathrm{d}\Omega_i$ 是 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对 $\boldsymbol{r}_i$ 处的电荷 q_i 所张的立体角元,θ_i 是面元 $\mathrm{d}S$ 的外法线方向与 $\boldsymbol{R}_i$ 的夹角. 所以

$$\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i q_i\oint_S\mathrm{d}\Omega_i.$$

注意,$\mathrm{d}\Omega_i$ 是有正有负的,这取决于 $\boldsymbol{R}_i$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 之间夹角 θ_i 是小于$\frac{\pi}{2}$还是大于$\frac{\pi}{2}$.

因此,如果电荷 q_i 在封闭曲面 S 内,则 S 对 q_i 所张的总立体角 $\oint\mathrm{d}\Omega_i=4\pi$;如

果电荷 q_i 在封闭曲面 S 外，则 S 对 q_i 所张的总立体角 $\oint d\Omega_i = 0$. 于是我们得到

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = Q/\varepsilon_0,$$

其中 Q 仅仅是封闭曲面 S 内的总电荷. 若电荷连续分布时上式可改写成

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho d\tau, \tag{1.8}$$

其中 V 是封闭曲面 S 所包围的体积. 方程(1.8)称为**高斯定理**，它是静电场的基本方程. 利用公式 $\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int \nabla \cdot \boldsymbol{A} d\tau$，方程(1.8)变成

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\right) d\tau = 0.$$

由于曲面是任意选取的，所以被积函数为零，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{1.9}$$

(1.9)式即是高斯定理的微分形式.

注意，高斯定理不仅依赖于线性叠加原理和力的有心性质，而且是力的平方反比律的必然结果. 由万有引力定律直接推知，引力场也存在高斯定理.

【例】 考察半径为 R 的一个带电导体球壳，总电荷量为 Q. 如设静电力服从 n 次方反比律，试计算距离球心为 r 处的电场.

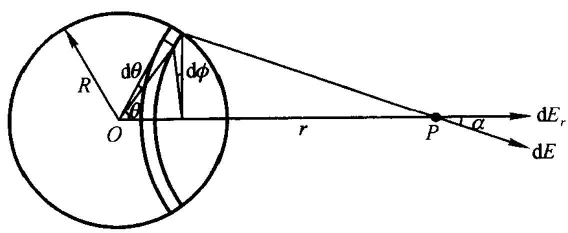

图 1.3

解　如图 1.3 所示，因为力按 n 次方反比律，所以电场是

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{n/2}}\cos\alpha,$$

式中 σ 为电荷面密度. 因为 $\cos\alpha = (r - R\cos\theta)/(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{1/2}$，故

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sigma R^2\sin\theta(r-R\cos\theta)d\phi}{(r^2+R^2-2rR\cos\theta)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

作积分变量代换，令

$$u = r^2+R^2-2rR\cos\theta, du = 2rR\sin\theta d\theta,$$

则上述积分可写成

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(r-R)^2}^{(r+R)^2} \frac{\pi\sigma R(u + r^2 - R^2)\mathrm{d}u}{2r^2 u^{(n+1)/2}},$$

于是得到

$$E_r = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\{(r+R)^{2-n}[r(2-n)-R] - (r-R)^{2-n}[r(2-n)+R]\} \quad (r > R);$$

$$E_r = \frac{2\pi\sigma R}{4\pi\varepsilon_0 r^2(3-n)(1-n)}\{(R+r)^{2-n}[r(2-n)-R] + (R-r)^{2-n}[r(2-n)+R]\} \quad (r < R).$$

我们对上述结果作一些讨论：

(1) 如果 $n=2$,则 $r<R$ 时,$E_r=0$;$r>R$ 时,$E_r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,结果与高斯定理计算结果一致.

(2) 如果 $1<n<2$,则在带电球内部 $E_r>0$. 我们不妨设想在导体内部还有一个同心导体球,两球之间用细导线连接,则可知内导体上必存在负电荷分布.

(3) 如果 $2<n<3$,则在导体球壳内 $E_r<0$,同样可以设想内导体球上将存在正的电荷分布.

由此可见,精确测量内导体球上存在的电荷量值就可以判断平方反比律的成立精度.

5. 静电场的旋度

高斯定理只确定了电场线的发散和会聚,对电场线可能存在的其他形式却不能提供任何信息. 如闭合电场线,它在空间任何地方的散度都为零. 所以,仅仅有高斯定理还不足以决定空间的性质,还必须讨论空间的线积分性质.

由静电场的表达式(1.7)式,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\boldsymbol{r}')\left(-\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}\tau'.$$

由于∇是对观察点的位置微商,所以上式可写成

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi,$$

而

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau'. \tag{1.10}$$

这样,$\boldsymbol{E}$ 的线积分可写成,

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\oint_C \nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中 C 是任意闭合曲线. 利用斯托克斯公式$\oint_C \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,上式可变为

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S(\nabla\times\nabla\varphi)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,$$

因此有