

分析基础

艾·蘭道著

443

高等教育出版社

分 析 基 础

(整数、有理数、无理数、复数的运算)

微积分学补充教材

艾·蘭 道 著
刘 絨 堂 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据德国数学家艾·蘭道(Edmund Landau)所著‘分析基础’(Grundlagen der Analysis)一書譯出。書中从自然数的五个皮亞諾公理出發,逐步推引出各类数(直到复数)的概念及其全部运算法則,是以公理方法講述分析基础的一本經典著作。

凡是願意講究严格分析基础的讀者,無論是教师,工程师或高等学校学生,都可以拿本書作为一本很好的补充讀物。但对一般的初学者,我們并不特別推荐這本書,也不認為教师可以成功地根据本書的方式去教初学者。

分 析 基 础

艾·蘭道 著

刘綏堂 譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010·463 開本850×1168¹/₃₂ 印張4²/₁₆ 字數106,000 印數0001—4,500
1958年8月第1版 1958年8月北京第1次印刷 定價(10)¥0.70

給学生写的序

1. 請不要讀后面給教师写的序！

2. 我只要求讀者有邏輯思考与閱讀語文的能力,并不要求他事先懂得中学数学,更不要要求他懂得什么高等数学。

为了避免爭論:一个数,無一数,兩種情形,一个給定的整体中的一切元素等等,都是平常語言中完全不容誤解的詞彙。定理 1, 定理 2, ..., 定理 301 (对于公理、定义、章、节也是一样),或用来区别各种情形的 1), 2) 等等,只是区别各定理、公理和各种情形的標記,只是为了在引証时,比用淡藍定理,深藍定理等等的說法更便利些而已。事实上,如果只引入从 1 到“301”为止的所謂正整数,这是毫無困难的。第一个难点(在第一章中所解决的),在于引入全部正整数

1, ...

这在逗号后用一系列神秘的点子表示的一批数(在第一章中称为自然数),在于給出它們的算术运算的定义,并在于証明有关定理。

我依次闡明各类数中一切类似的問題;第一章中講自然数,第二章中講正分数和正有理数,第三章中講正(有理和無理)数,第四章中講实数(正数,負数和零),第五章中講复数。因此,我仅談到你在中学时已經遇見過的那些数。

在这样的了解下:

3. 請忘掉你在中学里学过的一切;因为你还没有真正学懂它們。

請随时想到中学課程中的相应部分;因为你还没有真正把它們忘掉。

4. 这書中沒有九九表,甚至沒有定理

$$2 \cdot 2 = 4,$$

但我希望你自已来定义 $2 = 1 + 1,$

$$4 = ((1 + 1) + 1) + 1,$$

并利用它来証明这定理,作为第一章 § 4 的一个習題。

5. 請原諒我这样称“你”而不称“您”,这不仅是因为習慣于对讀者采用命令式的語气,并由于我写这書的部分目的是供 *usum delphi narum*^① 的; 因为大家都知道(参閱 E. Landau, 数論講义第一卷第五頁),我的女兒們虽已讀了几学期大学(化学),自認為在中学已經学过微积分,但在今天还是不知道为什么

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

柏林,1929 年 12 月 28 日。

艾·蘭道

① 此系拉丁文,意思是“王太子用”。

給教師写的序

我的一些(不幸是大多数的)同事在下列問題上不同意我的观点,这小册子是我对他們所作的讓步。

自然,不能期望在中学里严格而完备地闡明初等数学。但高等学校的数学課,不仅应使听者熟習題材和結果,且应使他們熟習証法。即使那主要为在物理和其它科学上应用而学数学的人,不得不只憑自己的体会来解釋輔助性的数学定理,但是如果他沒有学会如何开步走,也就是如果他不能辨別假和真,猜想和証明(或严格的和不严格的証明,如一般所說的),他就不能在他所选定的道路上稳步前进。

因此,我認为正确的是(我的一些老师和同事,我取材于他們的著作的一些作者,以及我的大多数学生,也都这样認識):大学生在第一学期就應該学习,数学分析是完备地建立在哪些(被承認作公理的)基本事实上的,以及如何才能建立起来的。大家都知道,这些公理可用各种方式选择,但若有人把許多普通运算法則对实数的应用以及把后文中的戴特金(Dedekind)基本定理 205 都作为公理,那末,虽然我并不因此認为这种作法是錯誤的,却認为这和我个人的观点几乎恰好是相反的。我固然不来証明皮亞諾(Peano)五个公理的無矛盾(因为我們知道这是不能証明的),但其中每一公理显然不能由别的公理推出。另一方面,如果我們像上文所說的那样采用了很多公理,学生会立即提出这样的問題,即其中是不是有很多公理能用别的公理来証明(或者被别的公理所駁倒,思想銳敏的人还会进一步这样問)。因为所有这些增添的公理,几十年来就知道是能証明的,所以如果讓学生在入学之初就学习这

些(完全是很容易的)証明,那對他們確是做了好事。

我不願在這裡多說:常有人甚至不用戴特金基本定理(或和它等价的,以基本叙列建立實數的理論)作為基礎,以至如微分學的中值定理,以及根據中值定理而來的、在某區間內導數為零的函數在這區間內是常數這一定理,或如單調遞減有界叙列有極限這一定理,在引入時都未加任何証明,或更壞的是,作一種實際並非證明的所謂証明。但是我認為,持這種極端不同觀點的代表人數,不僅是在單調遞減,而且這個人數所趨的極限(依上述定理來說是存在的)竟可能是零。

很少人從論證自然數開始。我也承認,雖然我從來還沒有不依據戴特金來講實數的理論,我以前開的課卻假設了整數和有理數的性質。但在最近三次,我却寧願從整數講起。下一學期(也像過去有一次那樣)為了照顧那些希望立即學微分法、或在第一學期竟不要學(甚或尽可能根本不學)數的概念的全部解釋的听课生,我把我的課分為同時開的兩門課程,其中一門課程稱為“分析基礎”。在這門課程中,我從自然數的皮亞諾公理開始,一直講到實數和復數的理論。听课生雖在第一學期還不需要用復數,但復數的引入十分簡單,并且易于安排。

在所有文獻中,還沒有這樣的一本教材,是僅以論證(在上述意義下的)數的運算這件起碼工作為其目標的。而在那些厚本的著作中,它們的作者雖然在開始的几章中這樣作了,但他們却(自覺地或不自覺地)留下不少須待讀者自己去搞通的問題。

對於任何一位在教學法上見解不同的同事(因而他是不講究基礎的),這本書(如果他認為它過得去的話)至少總提供他一個機會,為學生指出這樣一本參考書,把他所缺少的、也僅是他所缺少的題材作了完備的處理。如果有人在中學里已熟悉了這些結果(情形正是如此)并已讀通了抽象的前四五頁,這本書是十分容易

的。

我对發表这著作是感到犹豫的,因为,如果發表它,我就是在自己沒有新見解[除卡勒瑪尔(Kalmár)先生口头告訴我的外]的範圍內發表著作;但又沒有別人担任我的这项工作,其中有一部分是使人厭倦的。

一件具体的意外事件却对我冒險發表这著作加以决定性的推动。

另一派人常認為,学生在以后的學習过程中,总会通过某些課程或文献学会这些东西。但是,在我尊敬的朋友和与我有敌对意見的人中,沒有人怀疑,一切必要的內容都包含在我的講課中。我也相信是这样的。但我現在却遇見这样一件怕人的怪事。我从前的助手和亲爱的同事,講師格蘭約特(Grandjot)博士(現任聖地亞哥大学教授),根据我的講稿講分析基础,而在寄还我的原稿时告訴我說,他認為在講授过程中必須用其它公理来补充皮亞諾公理,因为据說我所遵循的講授方法是有一定的缺陷的。在我逐点說明之前,我要首先指出:

1. 格蘭約特的意見是合理的。
2. 有些公理不能列在最前面(因為它們牽涉到以後的概念)是很遺憾的。
3. 格蘭約特的公理都可以証明(像我們已能从戴特金学到的那样),故一切还是以皮亞諾公理为基础(見这書的全文)。

意見發生在三处:

- I. 在于自然数的 $x+y$ 的定义。
- II. 在于自然数的 $x \cdot y$ 的定义。
- III. 在于已有任一数域的 $x+y$ 和 $x \cdot y$ 之后,

$$\sum_{n=1}^m x_n \text{ 和 } \prod_{n=1}^m x_n \text{ 的定义。}$$

因为三处的情况都类似,我在这里仅談到自然数 x, y 的 $x+y$ 。譬如在某次的数論課中,我这样証明关于自然数的某定理,我首先証明它对 1 的正确性,再从它对 x 的正确性証明它对 $x+1$ 的正确性。可能偶尔有一学生会提出意見,說我没有預先証明对 x 的断言。这意見是不合理的,但是情有可原;因为这学生正是从来没有听过归納公理。格蘭約特的意見似乎类似,区别仅在于它是合理的;因此,我也不得不对它加以原諒。皮亞諾以他的五个公理为基础,当 x 固定时,对一切 y 定义 $x+y$ 如下:

$$x+1=x',$$

$$x+y'=(x+y)'.$$

于是他和他的繼承者都認為, $x+y$ 是一般地定义了; 因为, $x+y$ 有定义时的那些 y 的集合包含 1, 并且当它包含 y 时, 它也就包含 y' 。

但这里沒有直接定义 $x+y$ 。

如果有了概念“数 $\leq y$ ”(但这不是皮亞諾的方法, 因为“序”恰好是在加法后面引入的), 又如果能談到那些 y 的集合, 对于这些 y , 存在一 $f(z)$, 对 $z \leq y$ 有定义的, 具有下列性質:

$$f(1)=x',$$

$$f(z')=(f(z))', \quad \text{当 } z < y,$$

那末, 一切就安排好了。戴特金的論証路綫就是这样的。在我的同事馮·諾依曼 (von Neumann) (普林斯敦大学) 的友誼的帮助下, 我本已根据先引入“序”这一概念的办法来写这小册子 (这对讀者似乎有些不方便)。但是, 在定稿的最后时刻, 塞格德城的卡勒瑪尔博士告訴我一个簡單得多的証明。現在, 事情显得这样地簡單, 且証明显得和第一章的其它証明这样地类似, 如果我不像上文所述那样詳細地承認我的“罪与罰”, 縱使是內行, 也不会觉察出

这一点。类似的簡單証明对 $x \cdot y$ 也适用。 $\sum_{n=1}^m x_n$ 和 $\prod_{n=1}^m x_n$ 則無論

如何仅能用戴特金的程序。但是,从第一章 § 3 起,我們已經有了 $z \leq y$ 的集合。

为了尽可能使这書易为讀者接受,我在有几章中,有时在所有各章中,重复了某些(不很長的)詞句。对于內行來說,这样的重复自然是不必要的。例如我只要在定理 16 和 17 的証明中,这样指出一次就够:对于定义了符号 $<$ 和 $=$,并具有前述某些性質的每一类数,这論証有效。这样再三重复的論証,出現于必須在有关各章給出的那些定理,因为这些定理以后將會用到。但

$\sum_{n=1}^m a_n$ 和 $\prod_{n=1}^m a_n$ 仅須在最后一章引入,使它們也能应用于以前各

种类型的数。因此,我一直等到講复数时才引入 $\sum_{n=1}^m a_n$ 和 $\prod_{n=1}^m a_n$ 。

关于减法和除法的定理,我也是这样作的;例如,对于自然数,自然仅当被减数大于减数时减法定理才有效,又例如,对于自然数,也仅在能除尽的一切除法中,除法定理才有效。

我的書中沒有附注,它是写成硬性的电报式的(“公理”,“定义”,“定理”,“証”,仅偶尔有“提示”;不屬於这五項标题的文字很少)。对于像这样容易的題材,这样写是适当的。

在准备了几十年之久以后,我希望这書已写得能使一个普通大学生在兩天內把它讀完,在这以后(因为他在中学已經知道形式上的規則),他甚至可忘掉除归納公理和戴特金基本定理以外的全部內容。

虽然如此,如果有某一位持不同观点的同事,觉得这些內容竟是这样容易,以至(用我在本書中所采用的方式,或其他任何方式)

把这些內容列入他為初學者所開的課中，那我就達到我所不敢奢望的目的了。

柏林，1929 年 12 月 28 日。

艾·蘭道

目 录

給学生写的序	v
給教师写的序	vii
第一章 自然数	1
§ 1. 公理	1
§ 2. 加法	2
§ 3. 序	8
§ 4. 乘法	13
第二章 分数	18
§ 1. 定义和等价	18
§ 2. 序	19
§ 3. 加法	24
§ 4. 乘法	29
§ 5. 有理数和整数	33
第三章 分割	43
§ 1. 定义	43
§ 2. 序	44
§ 3. 加法	47
§ 4. 乘法	53
§ 5. 有理分割和整分割	60
第四章 实数	69
§ 1. 定义	69
§ 2. 序	69
§ 3. 加法	74
§ 4. 乘法	83
§ 5. 戴特金基本定理	87
第五章 复数	91
§ 1. 定义	91
§ 2. 加法	91
§ 3. 乘法	94
§ 4. 减法	98

§ 5. 除法	99
§ 6. 共轭数	103
§ 7. 绝对值	105
§ 8. 和与积	108
§ 9. 幂	126
§ 10. 将实数编排在复数系统中	130

第一章 自然数

§ 1. 公理

假設我們知道:

称为自然数的那些对象的一集合(即整体), 它們具有下列性質, 这些性質称为公理。

叙述公理之前, 我們首先把將要使用的符号 $=$ 和 $\neq$ 略加說明。

若無其它声明时, 小写拉丁字母在这書中都表自然数。

設 x 是已知, y 是已知, 則有下列兩情形:

或是 x 和 y 是同一的数, 这可記为

$$x=y$$

($=$ 讀为“等于”);

或是 x 和 y 不是相同的数, 这可記为

$$x\neq y$$

($\neq$ 讀为“不等于”)。

准此, 根据純粹邏輯, 下列各項成立:

1) 对每一 x , $x=x$.

2) 設 $x=y$,

則 $y=x$.

3) 設 $x=y, y=z$,

則 $x=z$.

$$a=b \text{ 且 } b=c \text{ 则 } a=c$$

之类的写法, 表面上虽仅指

$$a=b, b=c, c=d,$$

但它还有其它含义,例如

$$a=c, a=d, b=d.$$

(以后各章中仿此。)

现在假设自然数集合具有下列性质:

公理 1 1 是自然数。

即自然数集合不是空集合,它含有一对象,这对象称为 1 (读为“一”)。

公理 2 对每一 x , 恰有一自然数称为 x 的后邻, 记为 x' 。

对于复杂的自然数 x , 为了写出它的后邻, 我们应先把这数放在括号内, 否则可能发生混淆。对于 $x+y$, xy , $x-y$, $-x$, x^y 等等, 在全书中也都是这样处理。

根据这公理, 设 $x=y$,

则 $x'=y'$ 。

公理 3 恒有 $x' \neq 1$ 。

即无一数的后邻是 1。

公理 4 设 $x'=y'$,

则 $x=y$ 。

即对每一已知数, 或是无一数以它为后邻, 或是恰有一数以它为后邻。

公理 5 (归纳公理) 设 $\mathfrak{M}$ 是自然数的一集合, 它具有下列性质:

I) 1 属于 $\mathfrak{M}$ 。

II) 设 x 属于 $\mathfrak{M}$, 则 x' 属于 $\mathfrak{M}$ 。

则 $\mathfrak{M}$ 包含一切自然数。

§ 2. 加法

定理 1 设 $x \neq y$,

則

$$x' \neq y'.$$

証 假使

$$x' = y',$$

則依公理 4, 將有

$$x = y.$$

定理 2

$$x' \neq x.$$

証 設 $\mathfrak{M}$ 是使这式成立的那些 x 的集合。

I) 依公理 1 和公理 3, 有

$$1' \neq 1;$$

故 1 屬於 $\mathfrak{M}$ 。

II) 設 x 屬於 $\mathfrak{M}$, 則

$$x' \neq x.$$

故依定理 1,

$$(x')' \neq x',$$

从而 x' 屬於 $\mathfrak{M}$ 。

因此, 依公理 5, $\mathfrak{M}$ 包含一切自然数, 即对每一 x , 有

$$x' \neq x.$$

定理 3 設

$$x \neq 1,$$

則有一 u (从而依公理 4, 恰有一 u) 存在, 使得

$$x = u'.$$

証 設 $\mathfrak{M}$ 是一集合, 它包含数 1, 并包含存在一这样的 u 的一切 x (依公理 3, 自然每一 $x \neq 1$)。

I) 1 屬於 $\mathfrak{M}$ 。

II) 設 x 屬於 $\mathfrak{M}$, 則以 u 表数 x 时, 有

$$x' = u'.$$

故 x' 屬於 $\mathfrak{M}$ 。

因此, 依公理 5, $\mathfrak{M}$ 包含一切自然数; 从而对每一

$$x \neq 1,$$

有一 u 存在, 使得

$$x = u'.$$

定理 4 兼定义 1 对每一数偶 x, y , 恰有一种方式可規定

一自然数称为 $x+y$ (+ 讀为“加”), 使

$$1) \text{ 对每一 } x, \quad x+1=x',$$

$$2) \text{ 对每一 } x \text{ 和每一 } y,$$

$$x+y'=(x+y)'.$$

$x+y$ 称为 x 和 y 的和, 或加 y 于 x 所得的数。

証 A) 首先証明, 对每一固定的 x , 至多有一可能性对一切 y 定义 $x+y$, 使

$$x+1=x',$$

$$\text{并对每一 } y, \quad x+y'=(x+y)'.$$

設 a_y 和 b_y 对一切 y 有定义, 且具有性質:

$$a_1=x', \quad b_1=x',$$

$$\text{又对每一 } y, \quad a_{y'}=(a_y)', \quad b_{y'}=(b_y)'.$$

設 $\mathfrak{M}$ 是

$$a_y=b_y$$

时的 y 的集合。

$$I) \quad a_1=x'=b_1.$$

故 1 属于 $\mathfrak{M}$ 。

II) 設 y 属于 $\mathfrak{M}$, 則

$$a_y=b_y.$$

$$\text{故依公理 2,} \quad (a_y)'=(b_y)',$$

$$\text{从而} \quad a_{y'}=(a_y)'=(b_y)'=b_{y'}.$$

故 y' 属于 $\mathfrak{M}$ 。

因此, $\mathfrak{M}$ 是一切自然数的集合, 即对每一 y , 有

$$a_y=b_y.$$

B) 現在証明, 对每一 x , 有一可能性对一切 y 定义 $x+y$, 使

$$x+1=x',$$

$$\text{并对每一 } y, \quad x+y'=(x+y)'.$$

設 $\mathfrak{M}$ 是具有一这样的可能性[从而依 A), 仅有一这样的可能