陆全康 丁荣源 陈国荣 编

数学物理方法自学辅导

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是与陆全康编《数学物理方法》配合使用的自学辅导书，章节安排与该书一致，用上习题课的形式编写．每章之首扼要总结该章内容，指出重点与难点；再按节列表总结主要内容及解题的基本方法，讲解典型例题；最后给出该书各章习题的题解．

本书可作理工科大学、师范院校有关专业数学物理方法课程习题课的教学参考书，也是适合自学者使用的参考书．

数学物理方法自学辅导

陆全康 丁荣源 陈国荣 编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 22.875　字数 510,000

1989 年 2 月第 1 版　1989 年 2 月第 1 次印刷

印数 1—4,5000

ISBN 7-5323-0329-2/O·21

定价：9.95 元

序

拙著《数学物理方法》(上、下册)由上海科学技术出版社1983年出版以来，收到了读者大量的来信，其中有大专院校的教师学生，以及自学者，他们热切期望能够出版本书的习题题解以及指导学习和强化解题训练的书籍．这里特别要提到的是拙著出版后，受到了钱临照教授的极大鼓励，他在来信中同样建议编写与《数学物理方法》配套的学习辅导书．

我国大学教学中，基础课一般都没有相应的习题课教材，而国外很多著名的大学同样重视习题课教材的建设．日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的《工科の数学》，全书五册，每册都编有相应的习题集，并与课本内容紧密结合，配合使用，教学效果显著．

1985年，国家教育委员会推荐拙著《数学物理方法》为高等教育自学考试物理专业"数学物理方法"课程考试大纲的主要参考教材后，觉得确有必要编写一本与之配套的学习指导书，以满足广大读者，特别是广大自学者的需要．

鉴于上述诸因素，毅然动笔，编写了这本《数学物理方法自学辅导》．愿本书对广大读者学习"数学物理方法"课程能有所启发和裨益．

本书以上习题课的形式编写．每章之首，扼要地总结该章的内容，相应指出该章的重点与难点；然后按节总结主要内容和解题的基本方法，为了便于读者前后比较、总结、掌握和

记忆，一般以表格的形式列出主要内容，并总结解题规律及其解题分类；每章中按节讲解典型例题，从中可领会解题的思考方法和基本步骤和技巧．最后，为了广大自学者鉴定解题正误的需要，给出拙著《数学物理方法》各章习题的题解．

我从 1960 年开始在复旦大学物理类各专业承担“数学物理方法”习题课教学任务．1962 年讲授该课程后，同时担任习题课教学和指导．历年来积累的教学资料，作为本书的素材．应当指出，本书吸收了各位习题课任课教师的教学和解题经验；吸取了同学们的学习心得和创造性的学习成果．在编写过程中还借鉴了国内外先期出版的有关书籍．

丁荣源协助我编写了本书(包括完成了部分题解的工作)，陈国荣协助我完成了部分题解的工作．

陈虹担任习题课教学时对本书部分内容提出了宝贵的意见，上海科学技术出版社为本书的顺利出版做了大量工作，在此一并致谢．

在本书问世的时候，谨向建议、关心和期望早日编写出版本书的各方人士，表示衷心感谢，他们的鼓励和期望，是我们编写本书的巨大力量．

由于水平有限，本书错误和不足之处在所难免，乞望读者多加指正．

陆全康

1987 年 3 月于复旦大学

目　录

序
第一章　复变函数和解析函数 ……1
第二章　对复自变量的积分……29
第三章　级数……45
第四章　孤立奇点与无限远点……67
第五章　留数……76
第六章　保角变换 ……101
第七章　解析延拓与里曼面 ……123
第八章　拉普拉斯变换 ……144
第九章　数学物理方程的导出和定解问题 ……165
第十章　分离变量法 ……182
第十一章　正交曲面坐标系　圆形域中的调和函数 ……205
第十二章　积分变换法 ……225
第十三章　δ函数 ……245
第十四章　基本解(无界问题的格林函数) ……261
第十五章　边值问题的格林函数 ……278
第十六章　勒让德多项式和球函数 ……293
第十七章　贝塞耳函数 ……318
第十八章　数学物理方程的分类 ……352
习题解答 ……363
第一章(364)　第二章(395)　第三章(407)　第四章(425)　第五章

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(449) 第六章(474) 第七章(487) 第八章(498) 第九章(512) 第十章(527) 第十一章(584) 第十二章(610) 第十三章(633) 第十四章(640) 第十五章(647) 第十六章(664) 第十七章(697) 第十八章(720)

第一章

复变函数和解析函数

本章首先给出复数的定义与其代数运算规则；然后引入复变函数的分析性质中的三个主要概念：极限、连续与导数；最后讨论复变函数论的核心，即解析的概念.

复变函数论的学习效果与读者的微积分学基础有密切的关系. 当循序学习复变函数导论的各章时，希望读者抓住时机，回忆和复习有关微积分学中的相应要点. 这样，学完复变函数论后. 读者的数学分析水平将会提高；也只有这样，才能把复变函数真正学到手.

本章共有六节，重点内容：§1. 复数和它的运算、§2. 复变函数、§4. 导数、§5. 解析；一般内容：§3. 极限与连续、§6. 解析函数与调和函数的关系.

读者学习的重点：复数的代数运算、复变函数的解析性质以及科希-里曼条件.

§1. 复数和它的运算

主要内容

表 1.1 复数的定义

复数的表示形式	笛卡儿坐标表示形式	$z=x+\mathrm{i}y$ 实部 $x=\mathrm{Re}\,z$; 虚部 $y=\mathrm{Im}\,z$; 虚数单位 i
	三角函数形式	$z=\rho\cos\varphi+\mathrm{i}\rho\sin\varphi$ 幅角 $\varphi=\mathrm{arc\,tg}\,y/x$; 模 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$
	指数形式	$z=\rho\exp\mathrm{i}\varphi$ $=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}$
相等		当 $x_1=x_2$; $y_1=y_2$, 则称 $z_1=z_2$
共轭		当 $x_1=x_2$; $y_1=-y_2$, 则称 $z_1=\bar{z}_2$ 或 $\bar{z}_1=z_2$
运算规则	加法	$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)$
	乘法	$z=z_1z_2=\begin{cases}\rho_1\rho_2\exp[\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)] & 或\\ (x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)\end{cases}$

学习要点

1. 本节是学习复变函数导论的基础. 复变函数的自变量(宗量)与因变量(函数)都是复数. 表 1.1 列出了复数的定义, 它包括复数的表示形式、相等与共轭、运算规则. 复数运算规则就是加法规则与乘法规则. 有了这些定义, 就能导出复数的减法、除法、乘方和开方等一系列运算方法.

2. 本节中讲述复数的球面表示, 主要是为了说明无限远点是一点. 这个概念在复数的几何性质中起重要作用, 在保角变换(第六章)中将采用这一观念. 只要记住在复数平面上

亦将无限远理解成一点，此后将仅采用复数平面来描述复数的几何性质.

3. 本节主要内容，部分读者可能已在早期课程中学过，因而往往会受到轻视. 我们在正课讲授中，把这节的教学时数安排为两节(讲授全部复变函数导论仅有三十学时左右)，以示重视. 严格掌握概念，熟悉基本代数运算规则，灵活运用各种运算方法和技巧是本节学习的根本要求.

本节的复习例题是全书最多的一节，每个例题最好自己先做，然后再查看答案.

例题

1. 如何用符号表示复数 z 的实部与虚部?

解 x 称作复数 z 的实部，记作 $\mathrm{Re}\, z$ (Re 是英文 Real Component 的缩写)；y 称作复数 z 的虚部，记作 $\mathrm{Im}\, z$(Im 是英文 Imaginary Component 的缩写).

2. 复数的相等是否需要加以定义?

解 复数的相等是需要加以定义的，在数学中每引进一种新数都需要规定相等的定义. 例如，在实数论中学习过整数后，引入分数. 两个分数 p_1/q_1 与 p_2/q_2 的相等规定为：它们都是既约分数，且当 $p_1=p_2$ 与 $q_1=q_2$ 时，则有

$$p_1/q_1=p_2/q_2.$$

复数的相等定义成：当两个复数的实部相等和虚部相等时，两个复数相等.

3. 复数的虚数单位是什么?

解 复数 $z=x+iy$ 中，x 与 y 均是实数，而 i 是一个符号，称作虚数单位.

注意这里 i 是虚数单位，并没有规定 $i=\sqrt{-1}$.

4. $i=\sqrt{-1}$ 是怎样确定的?

解 根据乘法定义:

$$i\cdot i=e^{i\pi/2}\cdot e^{i\pi/2}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1,$$

这表明, $i^2=-1$. -1 的平方根有两个: $e^{i\pi/2}$ 与 $e^{-i\pi/2}$, 即 $\sqrt{-1}$ 与 $-\sqrt{-1}$. 于是, 可确定 $i=\sqrt{-1}$.

5. 复数可用复平面上的矢量来表示, 复矢量是自由矢量, 这是什么意思?

解 自由矢量是指: 经过平移后重合的两个矢量可看成是同一个矢量.

复矢量是自由矢量. 例如, 由复数加法定义 $(z=z_1+z_2)$, 这三个矢量 z_1、z_2 与 z 符合平行四边形法则(图 1.1a), 也符合三角形法则(图 1.1b). 把图 1.1a 中的复矢量 z_2, 经过平移后就得到图 1.1b 表示的情形.

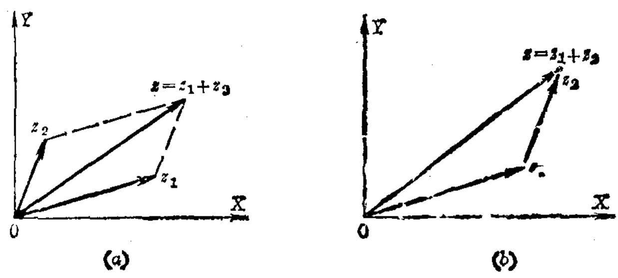

图 1.1

6. 任意复数的 n 次根都位于以原点 O 为中心的圆周上 (n 为正整数), 试说明这一点.

解 $z=\rho e^{i\varphi}=\rho e^{i(\varphi+2k\pi)}$,

$$z^{1/n}=\rho^{1/n}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$$
$$=\rho^{1/n}e^{i\varphi/n}e^{i2k\pi/n}\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

这表明 z 的 n 次根位于以原点 O 为中心，$\rho^{1/n}$ 为半径的圆周上，与 $k=0$ 相应的根的幅角为 φ/n，每两个根与原点 O 构成的圆心角是 $2\pi/n$(图 1.2)。

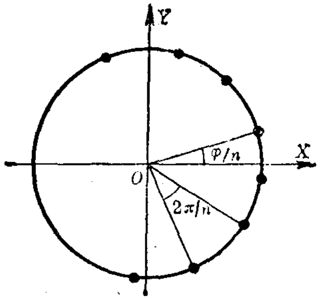

图 1.2

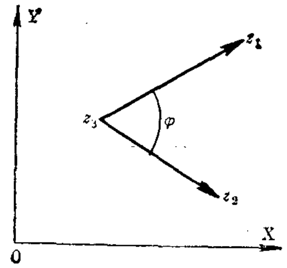

图 1.3

7. 试证明 z_1、z_2 与 z_3 在一条直线上的条件是：$(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 为实数.

解 如图 1.3 所示，线段 z_3z_1 的幅角为 $\arg(z_1-z_3)$；线段 z_3z_2 的幅角为 $\arg(z_2-z_3)$，两线段的夹角为

$$\varphi=\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

两线段为直线的条件为 $\varphi=\pi$. 令

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\rho e^{i\varphi},$$

由于 $e^{i\varphi}=e^{i\pi}=-1$，这就证明了 $(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 为实数。

8. 如果 $|z|=1$，对于任意复常数 a 与 b，求证：

$$\left|\frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}z}\right|=1.$$

解 由于 $|z|=1$，所以 $z=1/\bar{z}$. 可见

$$\left|\frac{az+b}{\bar{a}+\bar{b}/\bar{z}}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}\right||z|=\left|\frac{az+b}{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}\right|=1.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

9. 书中用几何意义阐明了两个重要的不等式:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \quad 与 \quad |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

这两个不等式称作三角不等式,试用代数方法证明之。

解　(1) 由

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2,\end{aligned}$$

利用　$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\leqslant2|z_1\bar{z}_2|=2|z_1||z_2|$,

于是

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=z_1\bar{z}_1+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2,\end{aligned}$$

这就得到　$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

(2) 由

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}\\&=z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2\\&=|z_1|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_2|^2\\&\geqslant|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|-|z_2|)^2,\end{aligned}$$

这就得到　$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$.

10. 证明 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$ 是复矢量 z_1 与 z_2 正交的充要条件.

解　如图 1.4 所示, (1) 如果复矢量 z_1 与 z_2 正交, 就有

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2.$$

此外, 有等式

$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$
$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

于是 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$。

(2) 当 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$ 时，就有

$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$,

于是复矢量 z_1 与 z_2 正交.

这就证明了 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=0$ 是复矢量 z_1 与 z_2 正交的充要条件.

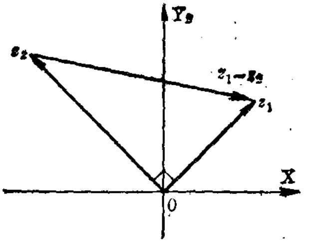

图 1.4

11. 试证明当 $|z_1|\neq|z_2|$ 时，$\left|\dfrac{z_3}{z_1+z_2}\right|\leqslant\dfrac{|z_3|}{\big||z_1|-|z_2|\big|}$.

解 利用三角不等式(参看本节例题 8)

$$|z_1+z_2|=|z_1-(-z_2)|\geqslant\big||z_1|-|-z_2|\big|$$
$$=\big||z_1|-|z_2|\big|,$$

就有
$$\frac{1}{|z_1+z_2|}\leqslant\frac{1}{\big||z_1|-|z_2|\big|}.$$

上式两边同乘 $|z_3|$ 就得到

$$\left|\frac{z_3}{z_1+z_2}\right|\leqslant\frac{|z_3|}{\big||z_1|-|z_2|\big|}.$$

12. 求证 $|z|\geqslant\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$.

解 $z=x+iy$，对于任意的 x 与 y 有

$$(|x|-|y|)^2\geqslant0,$$

即
$$|x|^2+|y|^2\geqslant2|x||y|.$$

上式两端加上 $|x|^2+|y|^2$，得到

$$2(|x|^2+|y|^2)\geqslant(|x|+|y|)^2.$$

开方后得到　　$$\sqrt{|x|^2+|y|^2}\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}},$$

于是　　$$|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}.$$

13. 如果 $z_1+z_2+z_3=0$ 与 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，试证明 z_1、z_2、z_3 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个等边三角形的三个顶点.

解　由 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，可知 z_1、z_2、z_3 位于单位圆 $|z|=1$ 上. 单位圆内的内接等边三角形的每条边长为 $\sqrt{3}$，为此需要证明 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$. 我们先证明 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. 由

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2),\end{aligned}$$

利用条件 $z_1+z_2+z_3=0$，得到

$$|z_1+z_2|=-|z_3|,$$

于是　　$$|z_1+z_2|^2=|z_3|^2=1.$$

因而

$$\begin{aligned}1&=|z_1+z_2|^2\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2\\&=1+1+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2.\end{aligned}$$

由此得出　　$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1.$$

这样

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)\\&=1+1-(-1)=3.\end{aligned}$$

我们就证明了 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. 类似可以证明

$$|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}.$$

14. 求 1 的立方根.

解 $1=e^{i0}=e^{i(0+2k\pi)}$,

于是 $$1^{1/3}=e^{i2k\pi/3} \quad (k=0,\ 1,\ 2).$$

设 1 的三个立方根为 z_1、z_2 与 z_3, 则

$$z_1=e^{i0}=1;$$

$$z_2=e^{i2\pi/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2};$$

$$z_3=e^{i4\pi/3}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

这就是 1 的三个立方根.

读者可把本题与 12 题比较. 由

$$|z_1|=|1|=1;$$
$$|z_2|=|e^{i2\pi/3}|=1;$$
$$|z_3|=|e^{i4\pi/3}|=1;$$

与 $$z_1+z_2+z_3=1+\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=0,$$

可见 1 的三个立方根 z_1、z_2 与 z_3 都位于单位圆上, 它们分别是等边三角形的三个顶点, 符合 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ 与 $z_1+z_2+z_3=0$.

§2. 复变函数

主要内容

表 1.2 区域与复变函数

区　域	具备: (i) 开集性; (ii) 连通性. 符合上述两个性质的复平面上的点集称为区域
复变函数	当复变数 z 在复平面上变动时, 如果复数 w 的值随复数 z 的值而定, 就称 w 为 z 的函数, 记作 $w=f(z)$

学习要点

1．必须掌握“开集性”与“连通性”两个概念，认真学习点 a 的 ε 邻域、内点、境界点和外点的定义，领会区域与闭区域，这是学好复变函数论的基础．解析、积分、级数和保角变换等内容都与区域或闭区域有关．

2．复变函数 $w=f(z)$ 的定义形式和实变函数 $y=f(x)$ 的定义形式类似，只要把其中的“复数”两字换成“实数”．此外，复变函数 $w=f(z)$ 还可化成一对二元实变函数：

$$u=u(x, y) \quad 与 \quad v=v(x, y).$$

学习复变函数论要注意两点：一是既要充分利用复变函数与实变函数的类似性；二是更要注意到复变函数本身的特点．

3．熟悉各个具体复变函数的表示式和简单的映射性质．

例题

1．点 a 的 ε 邻域是否有各种取法？

解 书中介绍了一种取法：以复数 a 为圆心，任意小的正实数 ε 为半径的一个开圆，即符合 $|z-a|<\varepsilon$ 的那些点的集合称作点 a 的 ε 邻域．

但是，点 a 的 ε 邻域可以有各种取法，例如可取符合

$$|\operatorname{Re} z-\operatorname{Re} a|+|\operatorname{Im} z-\operatorname{Im} a|<\varepsilon$$

的那些点的集合作为点 a 的 ε 邻域(图 1.5)．

显然，采用书中所采的圆形的 ε 邻域比上述正方形的 ε 邻域要方便，通常都采用圆形的 ε 邻域．

2．画出下列区域：

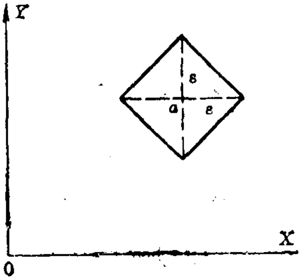

图 1.5 点 a 的 ε 邻域:
$|\mathrm{Re}\, z-\mathrm{Re}\, a|+|\mathrm{Im}\, z-\mathrm{Im}\, a|<\varepsilon$

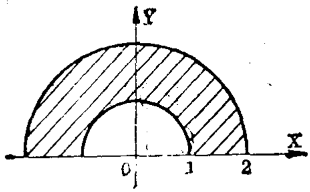

图 1.6

$$\begin{cases}1<|z|<2\\ 0<\mathrm{Im}\, z.\end{cases}$$

解 $1<|z|<2$ 表示以原点为圆心、半径分别为 1 和 2 的两个同心圆间区域，$0<\mathrm{Im}\, z$ 表示上半平面. 显然，同时符合这两个条件的区域是图1.6上画斜线的区域(不包括边界线)。

3. $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1$ 表示复平面上的什么区域?

解 $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|=\left|\dfrac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right|=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}<1,$

即 $$\sqrt{(x-1)^2+y^2}<\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

将上式两边平方后得到

$$x^2-2x+1+y^2<x^2+2x+1+y^2,$$

$$-2x<2x,$$

$$0<4x,$$

即 $$0<x.$$

这表示虚轴(Y 轴)右边的半平面(不包括虚轴)。

4. $|z+1||z-1|<1$ 表示哪些区域? 在复平面上画出这些区域。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com