高等学校教材

理论物理简明教程

第一册

理论力学

许崇桂 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

理论物理简明教程

第一册

理论力学

许崇桂 编

高等教育出版社

内容简介

本教程共分四册出版，各册分别为理论力学、电动力学，量子力学，热力学和统计物理学．为了在内容上做到少而精，全书对理论物理的各个部分作了通盘考虑，并在体系和阐述方法上做了一些尝试，全部内容可用 122 课时讲完．

本册在编排系统、内容选择和阐述方法上对现行力学教材体系做了一些尝试性变动，对力学基本原理着重于分析力学表述．内容包括：拉格朗日方程、小振动、有心力、刚体绕定点的转动、哈密顿方程．所需时间约为 23 课时．

本书经国家教委应用物理教材委员会审查推荐作为理工科大学应用物理专业试用教材，也可供相关专业及科技人员参考．

高等学校教材

理论物理简明教程

第一册

理论力学

许崇桂 编

*

高等教育出版社出版

高等教育出版社照排中心照排

新华书店北京发行所发行

北京制本总厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.125 字数 130 000

1989 年 9 月第 1 版 1989 年 9 月第 1 次印刷

印数 0 001 — 1 760

ISBN7－04－002322－9/O · 790

定价 1.25 元

总　序

本书是根据国家教委高等学校应用物理教材委员会的教材规划，结合作者多年来的教学实践编写的．按照各校的实际情况和教材规划的要求，《理论物理简明教程》的授课时间约为130学时．据此，我们对课程内容做了比较大的调整，着重阐明基本的物理概念、原理、方法及其应用，给理工科大学生和科技人员准备必要的理论物理基础，为他们掌握新的科学技术提供有利条件．

为此目的，我们想在内容选择，编排系统和阐述方法上做些尝试．希望在内容的选择上能做到少而精；在编排系统上能做到结构合理，比较自然；在阐述方法上能做到便于读者理解和掌握．从这种愿望出发，我们先后编写了讲义，在教学中试用．根据我们的教学实践，全书主要内容可用122课时讲完，每课时60分钟．

本书是在原讲义的基础上经修改后形成的．对于理工科院校的理论物理各部分作了通盘考虑，但为了方便读者仍以分册出版，包括理论力学，电动力学，量子力学，热力学和统计物理学等四册，它们既构成一个整体，又具有相对独立性，可以单独选用．

国家教委高等学校应用物理教材委员会的同志们审阅了本书初稿，提出了许多宝贵的意见和建议．高等教育出版社的同志们对本书的出版给予了热情的支持和帮助，我们向他们一并表示衷心的感谢．

本书第一册《理论力学》由许崇桂编写，第二册《电动力学》和第三册《量子力学》由张泽瑜编写，第四册《热力学和统计物

理学》由李铿编写．由于作者的水平所限，书中一定有不少缺点、错误，敬希读者批评指正．

作　　者

1988春于北京

本册前言

本书是《理论物理简明教程》的第一册《理论力学》.

力学基本原理有两种表述形式：牛顿运动定律的形式和分析力学的形式. 本书将主要以后一种形式加以阐述，必要时也应用牛顿力学方法. 我们的目的是为理工科大学生和科技人员提供一本简明的读物，为他们学习近代物理、掌握新的科学技术准备必要的力学基础；同时又不要花费他们太多的时间. 为此，我们对现行力学教材体系做了较大的变动，在内容选择、编排系统和阐述方法方面做了些尝试，以满足教学的需要.

1788 年拉格朗日写了《分析力学》一书，全书用数学分析方法解决所有力学问题. 当然，分析力学的物理基础仍然是牛顿运动定律，但方法变了. 主要是：(1)引入了广义坐标概念；(2)能量和力相比较，更着重于能量的分析. 这使它具有很大的普遍性，便于推广应用，现在，分析力学方法已经被应用于物理学的许多领域，甚至超出了物理学的范围.

本书是作者在清华大学授课讲义的基础上经修改而成的. 根据我们的教学实践，全书内容可用 23 次课讲完，每次 60 分钟，大多数学生能在课后独立解出书上的习题. 作者希望，本书的出版能促成在更大范围内做些新的尝试，来共同寻求提高效率、提高质量的办法.

国家教委应用物理教材委员会的同志们审阅了本书初稿，提出了许多宝贵的意见和建议，作者对他们表示衷心的感谢.

由于作者的学识和经验所限，书中一定有不少缺点、错误，敬希读者指正.

许崇桂

1988 年春，于清华大学

目　　录

第一章　拉格朗日方程

本章主要讨论拉格朗日方程 (Lagrange equation)，同时涉及一些与之有关的问题．拉格朗日方程 (以下简称拉氏方程)是分析力学的基础，可给出质点组的运动微分方程，它所起的作用相当于牛顿力学中的牛顿第二定律．

本章将以牛顿第二定律为基础引入拉氏方程．但由于在拉氏方程中包含的是广义坐标和能量，因而使它获得了比牛顿定律更宽广的应用范围，成为近代物理中不可缺少的基础之一．

§1.1　牛顿力学基本原理的简短回顾

分析力学的物理基础是牛顿运动定律．因此，在讨论分析力学的拉氏方程之前，有必要对牛顿力学的基本原理作一简短回顾．同时，这对于在第四章讨论刚体运动时直接应用这些原理也会带来方便．

(一) 牛顿运动第二定律

牛顿第二定律为

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{1.1.1}$$

设质点对某惯性参照系中坐标原点的位矢为 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{r}$ 随时间 t 的变化率给出质点的速度 $\boldsymbol{v}$，

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.1.2}$$

而速度随时间的变化率给出质点的加速度 $\boldsymbol{a}$，

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}=\ddot{r} \qquad (1.1.3)$$

同时，一般说来，作用于质点的外力 F 与质点的位置、速度和时间有关，$F=F(r,\dot{r},t)$. 因此，牛顿第二定律可写成

$$m\ddot{r}=F(r,\dot{r},t) \qquad (1.1.4)$$

这是二阶微分方程. 如果已知外力 F 的具体形式，则可求解，再应用初始条件，即可确定质点位矢随时间的变化规律，$r=r(t)$.

对于牛顿运动第一、第三定律这里就不复习了. 下面复习质点组的三个基本定理和三个守恒定律.

(二) 动量定理和动量守恒律

如图 1.1.1 所示，设质点组由 n 个质点组成，其中第 i 个质点的位矢为 r_i，质量为 m_i，动量为 $m_i\dot{r}_i$. 质点组的动量 p 为各质点动量之矢量和，

$$p=\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{r}_i \qquad (1.1.5)$$

可以证明：质点组动量随时间的变化率，等于作用于质点组的外力之矢量和，

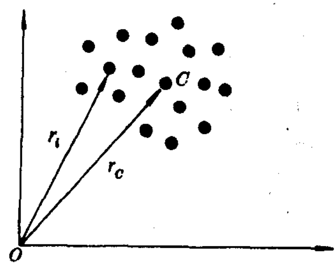

图 1.1.1

$$\frac{dp}{dt}=\sum_{i=1}^{n} F_i^{(e)}=F \qquad (1.1.6)$$

这就是动量定理. 式中 $F_i^{(e)}$ 是作用在第 i 个质点上的外力，也就是质点组以外的物体对第 i 个质点的作用力. 质点组内其它质点对这第 i 个质点的作用力是内力，不包括在 $F_i^{(e)}$ 之中.

图 1.1.1 中 r_C 是质点组质心 C 的位矢，由下式决定：

$$\boldsymbol{r}_C=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i\Big/\sum_{i=1}^{n}m_i=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i \tag{1.1.7}$$

将此式代入式(1.1.5)可得

$$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i=m\dot{\boldsymbol{r}}_C$$

这说明，质点组动量等于它的总质量 m 乘以质心速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_C$．$m\dot{\boldsymbol{r}}_C$ 称为质心动量．这样，(1.1.6)式可写成

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\boldsymbol{r}}_C)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}=\boldsymbol{F} \tag{1.1.8}$$

这就是质心运动定理．它表示，质心动量随时间的变化率等于作用于质点组的外力之矢量和．

如果作用于质点组的外力之矢量和为零，则由(1.1.6)和(1.1.8)式可得

$$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{r}}_C=\text{恒矢量} \tag{1.1.9}$$

这就是动量守恒定律．它表示：当质点组所受外力之矢量和为零时，质点组的动量为恒矢量，不随时间变化．同时质点组质心的速度保持不变，质心作惯性运动．

(三) 动量矩定理和动量矩守恒律

在惯性参照系中选一固定点 O，质点组中第 i 个质点对此固定点的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$，速度为 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$，动量矩为 $\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i$．质点组的动量矩 $\boldsymbol{J}$ 为各质点动量矩之矢量和，

$$\boldsymbol{J}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{1.1.10}$$

可以证明，质点组对固定点的动量矩随时间的变化率，等于作用于质点组的外力对该固定点的力矩，

$$\frac{d\boldsymbol{J}}{dt}=\boldsymbol{M} \tag{1.1.11}$$

式中外力矩 $\boldsymbol{M}$ 为作用于质点组各质点上的外力对固定点的力矩之矢量和，

$$\boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{1.1.12}$$

(1.1.11)式就是对固定点的动量矩定理．

如果作用于质点组的外力矩 $\boldsymbol{M}$ 为零，则由 (1.1.11)式可得

$$\boldsymbol{J}=\text{恒矢量} \tag{1.1.13}$$

这就是动量矩守恒律．它表示：当质点组所受外力对某固定点的力矩为零时，质点组对该点的动量矩为一恒矢量，不随时间变化．

对于质点组的质心 C，也有动量矩定理，

$$\frac{d\boldsymbol{J}'}{dt}=\boldsymbol{M}' \tag{1.1.14}$$

式中 $\boldsymbol{J}'$为质点组对质心的动量矩，$\boldsymbol{M}'$为外力对质心的力矩：

$$\boldsymbol{J}'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i' \tag{1.1.15}$$

$$\boldsymbol{M}'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i'\times\boldsymbol{F}_i^{(e)} \tag{1.1.16}$$

式中 $\boldsymbol{r}_i'$和 $\dot{\boldsymbol{r}}_i'$分别是质点组中第 i 个质点对质心的位矢和速度．

可以证明，

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}'+\boldsymbol{r}_C\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C \tag{1.1.17}$$

式中右边第二项表示质心动量 $m\dot{\boldsymbol{r}}_C$ 对固定点的矩，称为质心动

量矩．(1.1.17)式表示，质点组对固定点的动量矩 $\boldsymbol{J}$，等于它对质心的动量矩 $\boldsymbol{J}'$ 加上质心动量矩 $\boldsymbol{r}_C\times m\dot{\boldsymbol{r}}_C$．

(四) **动能定理和机械能守恒律**

在惯性参照系中选一固定点 O，质点组中第 i 个质点对此固定点的位矢为 $\boldsymbol{r}_i$，速度为 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$，动能为 $\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$．质点组的动能为各质点动能之和，

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2 \tag{1.1.18}$$

可以证明，质点组动能的微分等于质点组外力与内力所作元功之和，

$$dT=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{1.1.19}$$

这就是对固定点的动能定理．式中 $\boldsymbol{F}_i^{(e)}$ 为作用在第 i 个质点上的外力，$\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i$ 为此外力在质点位移为 $d\boldsymbol{r}_i$ 时所作之元功．$\boldsymbol{F}_i^{(i)}$ 为作用在第 i 个质点上的内力，即质点组中其它质点对此质点的作用力，$\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_i$ 为此内力所作之元功．

对于刚体，内力所作元功之和为零，于是(1.1.19)式变为

$$dT=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{1.1.20}$$

这说明，刚体动能的微分，等于作用在刚体上的外力所作元功之和．

如果质点组所受外力与内力均为保守力，则这些力所作元功之和应等于势能的减少，

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_i=-dV$$

将此式代入(1.1.19)式可得

$$dT=-dV$$

$$T+V=E=\text{恒量} \tag{1.1.21}$$

这就是机械能守恒律．它表示：在质点组所受外力与内力均为保守力时，质点组动能与势能之和为一恒量，不随时间变化．

对于质点组的质心 C，也有对质心的动能定理，

$$dT'=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(e)}\cdot d\boldsymbol{r}_i'+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot d\boldsymbol{r}_i' \tag{1.1.22}$$

式中 $\boldsymbol{r}_i'$ 为第 i 个质点对质心的位矢，T' 为质点组对质心的动能：

$$T'=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'^2 \tag{1.1.23}$$

可以证明，在 T 和 T' 之间存在以下关系：

$$T=T'+\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_C^2 \tag{1.1.24}$$

式中 m 为质点组的总质量，$\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_C^2$ 称为质心动能．上式表示：质点组对固定点的动能 T，等于它对质心的动能 T' 加上质心动能 $\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_C^2$．

以上就是我们对牛顿力学基本原理的简短回顾．我们假定读者对这些内容是熟悉的，因而没有展开来叙述．如果读者对其中某些地方需要作较详细的了解，请参看普通物理力学部分的有关章节．

§1.2　广义坐标　广义速度

从§1.2到§1.4都是为建立拉氏方程作准备，本节主要讨论其中的广义坐标和广义速度．

（一）完整力学系

设一质点组由 n 个质点组成，一般来说，质点组中各质点的运动不是自由的，受到一定的限制，不能任意占据空间的位置，我们就说质点组受到某种约束．由于约束，各质点的坐标 (x_i, y_i, z_i) 不是完全独立变化的，它们之间存在一定的关系．表示这种关系的方程叫约束方程．质点组受到不同的约束，就有不同的约束方程．这里只讨论通常遇到的一种完整约束或称几何约束，在此约束下，各质点坐标之间有 k 个约束方程：

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n; t) = 0\\
&f_2(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n; t) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_k(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots x_n, y_n, z_n; t) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.2.1}$$

受这种约束的质点组叫完整力学系．本章只讨论这种力学系统．

通常为书写简便，将上面的约束方程缩写成

$$f_\alpha(x, y, z; t) = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, k \tag{1.2.2}$$

下面举一例来说明这种约束．设一质点被限制在半径为 R 的球面上运动，球面本身以速度 v 沿 x 轴运动．在这种约束下，质点的坐标 x, y, z 不是完全独立变化的，它们显然受到下列约束方程的限制：

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \tag{1.2.3}$$

这样的约束就是属于 $f(x, y, z; t) = 0$ 这种类型，这当然是非常简单的一例．

约束可按各种方式来分类，我们不拟详述。就我们所讨论的约束来说，也可分为两类：约束方程中不显含时间 t 的，叫稳定约束；显含时间 t 的，叫非稳定约束．例如，由(1.2.3)式所表示的，质点被约束在运动球面上的情形就是非稳定约束．当这个球面静止时，$v=0$，约束方程中不再显含时间 t，被限制在这个静止球面上的质点所受到的约束为稳定约束．

(二) 广义坐标

设某完整力学系由 n 个质点组成，存在 k 个约束方程

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots; x_n, y_n, z_n; t) = 0$$

$$\alpha = 1, 2, \cdots, k$$

其中任一质点 P_i 的位置，由它的三个坐标 x_i, y_i, z_i 决定，要确切知道整个力学系统的位置（位形），就必须知道系统中所有质点的坐标．这些坐标的数目，一共是 $3n$ 个，这 $3n$ 个坐标不是完全独立的，它们受到 k 个约束方程的限制，只有 $(3n-k)=s$ 个是独立的．可以在 x_i、y_i、z_i 中任选 s 个坐标作为独立变量，当这 s 个独立变量的值一定时，其余非独立坐标的值可通过约束方程确定，因而力学系统的位形完全被确定．可见，力学系统的位形可完全由 s 个独立坐标确定．对于完整力学系统，独立坐标的数目 s 等于系统的自由度数．

但是，在某些情形下使用直角坐标作为独立变量并不方便，通常根据问题，选择一组独立变量 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$ 来描写自由度为 s 的力学系统，系统中所有质点的位置可以由这组独立变量决定如下：

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

这种用来描写力学系统的位形的一组独立变量 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$ 叫广义坐标．它可以是直角坐标，极坐标，柱坐标以及其它物理量等．

例如，一质点被限制在一平面圆周上运动，圆周的半径为 R，如图 1.2.1 所示．在此情形下，质点的位置可由它的坐标 x，y 确定，但 x、y 不是彼此无关的，它们受到约束方程

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

的限制，因此 x、y 两者之中只剩下一个可以独立变化．实际上这个系统只有一个自由度，所以只用一个独立变量即可描写其位置，相当于 $s=1$．

如果我们选 y 为广义坐标，则系统的位置可决定如下：

$$\begin{cases} x=x(y)=\pm\sqrt{R^2-y^2} \\ y=y \end{cases}$$

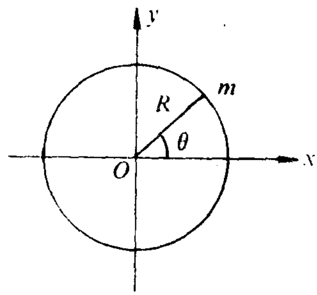

图 1.2.1

如果我们选平面极坐标的 θ 为广义坐标，则系统的位置可如下决定

$$\begin{cases} x=x(\theta)=R\cos\theta \\ y=y(\theta)=R\sin\theta \end{cases}$$

以上是关于广义坐标的一个简单例子，由此可以看到：(1)广义坐标以隐含的方式包括了约束方程的要求；(2)广义坐标不一定是长度，可以是角度，也可以是其它物理量，例如面积 A，体积 V，电荷量 q，电极化强度 P，磁化强度 M 等；(3)广义坐标的选择不只一种，要视具体情况而适当选择．

上面用 (1.2.4)式说明，一组广义坐标 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$可完全确定力学系统的位形．但另一方面，此式也可理解为直角坐标与广义坐标之间的变换，因此称它为变换方程．对于稳定约束，变换方程 (1.2.4)式中不显含时间 t．

（三）广义速度

随着系统运动，广义坐标随时间变化．广义坐标随时间的变化率叫广义速度．通常用 $\dot{q}$ 表示．

$$\dot{q}=\frac{dq}{dt}$$

它可以是线速度、角速度或其它物理量，视广义坐标而定．广