中考数学思维新概念丛书

中考
数学探究题
分析与训练

SXTJT

浙江少年儿童出版社

中考数学思维新概念丛书

中考数学探究题分析与训练

主编 张汝新 孙厚康 方 炼
编写 张汝新 严国荣 赵志英
金芬娥 靳剑杭 倪 敏
丁新宇 孙厚康

浙江少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

中考数学探究题分析与训练/张汝新等主编. —杭州:浙江少年儿童出版社,2003.9
(中考数学思维新概念丛书)
ISBN 7-5342-2919-7

Ⅰ.中… Ⅱ.张… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

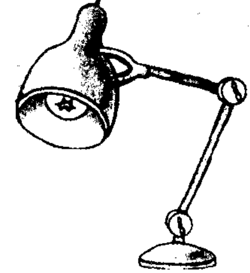
中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第036484号

责任编辑 刘力行
美术编辑 孙达明
责任印制 阙 云
装帧设计 周翔飞 刘 炜

中考数学思维新概念丛书
中考数学探究题分析与训练
张汝新 孙厚康 方炼 主编

浙江少年儿童出版社出版发行
(杭州体育场路347号)
临安曙光印务有限公司印刷 全国各地新华书店经销
开本 850×1168 1/32 扉页1 印张11 字数210000 印数1—10350
2003年9月第1版 2003年9月第1次印刷

ISBN 7-5342-2919-7/G·1554 定价:14.00元
(如有印装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换)



前　言

学习数学，不仅要获取数学知识，而且要重视获取这些数学知识的过程，亲身经历数学的探究活动.数学之所以能赋予人创造性，就因为数学探究充满无穷的魅力，能最大限度地激发人的思维，享受数学思想之美、数学方法之美，陶冶人的情操.从这个意义上说，数学的真谛是探究.

数学学习要以探究为核心，探究既是数学的目标，又是数学学习的一种重要方式.新课标注入了“行为目标”，便确定了知识与技能、态度与方法、情感态度与价值观三位一体的课程目标，加强了数学的过程性、体验性，主张学生主动参与、亲身实践、独立思考、合作探究，从而实现学习方式的转变.

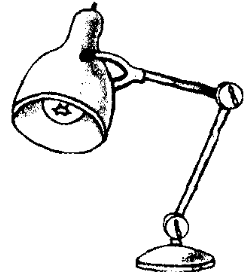
数学探究题既有探究的内容目标，又有探究的行为目标.探究内容目标是指：在数学问题系统的条件、解题依据、解题方法、结论等四个要素中，通过对其中的某个(至少一个)要素进行分析、综合、观察、归纳、概括、推理、判断等一系列探究活动，以确定其他要素的特征；探究行为目标是指：问题解决过程必须体现主动的、构建的、体验的、发现的学习方式等行为.我们把数学探究题界定为一种特殊的数学问题，强调它并不是一个纯数学范畴的

概念,而是一个教育范畴的概念.

随着数学教学改革的深化,数学探究能力在全部数学能力中的地位显著提高.各地中考的数学试卷,普遍加强了对学生数学能力的考查,毫无例外地注重探究题的设计和评价.本书在此基础上应运而生,试图帮助学生熟悉数学探究题的特点,学习思考问题的基本方法,为学生提供比较充分的问题情境和尝试机会.

本书的问题来源,一部分是编写者在自己教学、教研实践中积累的资料,一部分取自各地的中考数学试卷,有的问题根据练习的要求进行了适当的改编和重组,力求适合读者循序渐进地阅读和进行探究尝试.本书按问题涉及的知识系列分类编排,以便于读者使用.每一部分由探究例析和探究尝试组成,并附有比较详细的参考解答.

参加本书编写的都是在教学、教研第一线工作的富有实践经验的骨干教师,是浙江省2002年度教科研立项课题“初中数学开放式教学的研究”课题组成员,他们是张汝新、严国荣、赵志英、金芬娥、靳剑杭、倪敏、丁新宇、孙厚康等.本书由杭州市教研室方炼统稿.书中失误之处,恳请读者指正.



目　录

第一部分　数学探究题的类型

纵观近几年我国各地的中考试卷，一大批具有鲜明时代特色，代表着各地中考数学命题新水平的题目如雨后春笋般涌现出来，其中数学探究题成了中考热点之一．根据这类问题的内容要素和问题解决的行为要素，我们将数学探究题分为以下几种．

一、开放型探究题

凡是具有完备的条件和固定的答案的习题，我们称之为封闭型问题．数学开放型探究题是指：条件不完备（条件不足或多余）或答案不确定，呈多样性，问题解决的策略具有发散性和创新性的数学问题．按数学问题要素“假设—推理—判断”的结构分类，开放型探究题又可以分为以下三类：

1．条件开放型

条件开放型数学题是指：给出问题的结论，让学生分析、探寻使结论成立应具备的条件，即问题的条件是不完备的，条件不足或多余的这类问题．条件不足时要求补上；条件多余时，在互不矛盾的情况下要求进行选择．解这样的探究题，要求学生善于从问题的结论出发，执果索因．由于添加的条件是开放的，因此又有“有限穷举型、有限混浊型、无限离散型”等三种形式．列举如下：

例 1 已知数 3、6，请再写出一个数，使这三个数中的一个数是另外两个数的比例中项．这个数是______．

评析 本例属条件开放型探究题．根据比例中项的意义不难得到，这个数是$\pm 3\sqrt{2}$或$\frac{3}{2}$或 12．本例答案是有限可举的，所以又称它为有限穷举型条件开放题．解这类问题时答案不能遗漏．

例 2 如图 0－1，在 $Rt\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，沿过点 B 的直线 BE 折叠这个三角形，要使点 C 恰好与 AB 的中点 D 重合，还应添加什么条件？

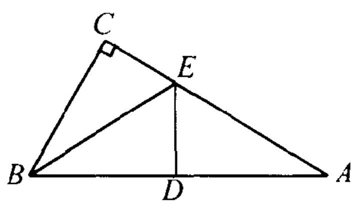
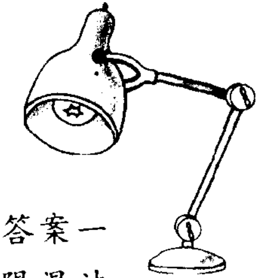


图 0－1

评析 本题属条件开放型探究题．如果不再添加辅助线，要使 D 为 AB 的中点，可添加下列条件之一：(1) $\angle BED=\angle DEA$，(2) $\angle EBA=\angle A$，(3) $\angle AED=\angle CEB$，(4) $\angle A=\angle EBC$，(5) $\angle CEB=60°$，(6) $\angle DEB=60°$，(7) $\angle DEA=60°$，(8) $\angle BEA=120°$，(9) $\angle EBC=30°$，(10) $\angle EBA=30°$，(11) $\angle A=30°$，(12) $\angle CBA=60°$（以上是角的关系）；(13) $BE=AE$，(14) $AB=2BC$，(15) $AC=\sqrt{3}BC$，(16) $2AC=\sqrt{3}AB$（以上是边的关系）；(17) $\triangle BEC\cong\triangle AED$（三角形之间关系）．

由于本题添加的条件属性不明，可以从不同角度、不同层次回答，因此答案繁多．虽然从理论上讲，本题的答



案是有限个，但实际上，解题者很难一下子把所有答案一一列举出来.我们把这一类的条件开放题称为有限混浊型条件开放探究题.解这类题的策略是：需从多个不同角度思考，先从直接条件入手，再挖间接的、隐含的条件，并按某些规律分类表述.如本题先从角的关系来表述，再从边的关系表述，最后是从三角形之间的关系来表述，这样就容易做到不重不漏.

例 3 写出一个只含有字母 x 的代数式.要求：(1)要使此代数式有意义，字母 x 必须取全体正数；(2)此代数式的值恒为负数.

评析 要使此代数有意义，字母 x 又必须取全体正数不能为零，这样的代数式可以是：$\frac{1}{\sqrt{x}}$或$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$等等，要使代数式的值恒为负数只需在前式中加一个负号且分子是正数，因此满足条件的代数式有无穷多个，如 $-\frac{1}{\sqrt{x}}$，或 $-\frac{(1+x^2)}{\sqrt{x}}$，或 $-\frac{1}{\sqrt{2x}}$，或 $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$……此类题的答案呈无限的、离散的、开放的，所以称之为无限离散型条件开放探究题.它的一般解题策略是：将其答案适当分类，对每类答案列出一种典型的解法或提供一个寻找答案的“算法”，按照这种“算法”可以列举出问题的一类答案.

例 4 阅读下面文字后，解答问题.

有这样一道题目：已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $A(0,a)$、$B(1,-2)$，________，求证：这个二次函数图象的对称轴是直线 $x=2$.

题目中的横线部分是一段被墨水污染了无法辨认的文字.

(1) 根据现有的信息，能否求出题目中二次函数的解析式？若能，写出求解过程；若不能，说明理由.

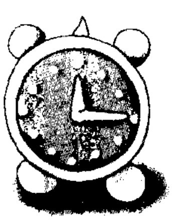
(2) 请根据已有信息，在原题中的横线上，添加一个适当的条件，把原题补充完整.

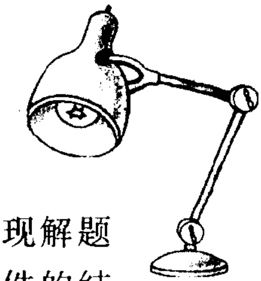
评析 第(1)题已不是传统意义上的"已知—求解"结构的问题，而是通过提供一些信息，以此来判断条件是否多余或不足，所以是条件开放题. 解决办法是看方程组：$\begin{cases} a+b+c=-2, \\ -\dfrac{b}{2a}=2, \\ c=a \end{cases}$ 解的情况. 若解惟一，说明条件正好，可以求出函数解析式；若解不惟一或无解，则说明条件不足或多余. 如根据上述方程组解得：$a=1$，$b=-4$，$c=1$，所以函数可求，解析式为 $y=x^2-4x-1$.

第(2)题要求把原题补充完整，添加什么条件呈开放性，所以此题也是条件开放题. 但"添加什么"的答案呈无限离散型，满足函数解析式的任意一点的坐标或最值为 -5 或 $c=1$ 或顶点 $(2,-5)$ 等等，都可以是添加的条件.

2. 结论开放型

问题的结论不确定，呈多样性的，称之为结论开放型





探究题.由于结论不惟一,有多种正确答案,能体现解题者的不同水平.因此如何尽可能多地找出符合条件的结论是探究的难点.结论开放型探究题的答案结构也有"有限穷举型、有限混浊型和无限离散型"这三类.列举如下:

例5 如图0-2-1,AD切$\odot O$于点A,割线DCB经过圆心O,$AE\perp BD$于点E.根据图形写出10组比例线段.(1个比例式和它的变形,按1个式子计算)

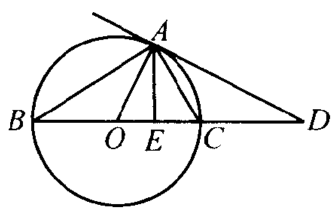


图0-2-1

评析 本例条件充分,结论显然不惟一,是结论开放型探究题,答案是有限的.先挖掘题目中的隐含条件:①$\angle BAC=\mathrm{Rt}\angle$;②$\angle OAD=\mathrm{Rt}\angle$;③$AC$、$AB$分别为$\triangle AED$的内、外角平分线.这样就可以从原图形中分离出四个基本图形:

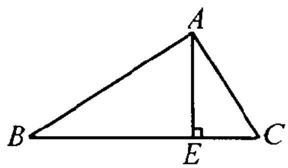


图0-2-2

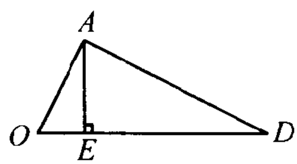


图0-2-3

如图0-2-2,由三个三角形相似($\mathrm{Rt}\triangle ABC\backsim\mathrm{Rt}\triangle EBA\backsim\mathrm{Rt}\triangle EAC$),可得9个不同的比例式.

如图0-2-3,同样由三个三角形相似($\mathrm{Rt}\triangle OAD\backsim\mathrm{Rt}\triangle OEA\backsim\mathrm{Rt}\triangle AED$),又可得到9个不同的比例式.

根据图0-2-2和图0-2-3知,$AE^2=BE\cdot EC=$

$OE \cdot ED$. 这样又可得一个比例式.

如图 0－2－4，由原图知，$\angle 3=\angle 4$，又 $\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 4$，$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$. 根据三角形内、外角平分线的性质，可得 $\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{EC}{CD}$，$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{BD}{BE}$，$\dfrac{EC}{CD}=\dfrac{BE}{BD}$. 这样又有 3 个比例式.

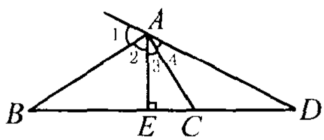


图 0－2－4

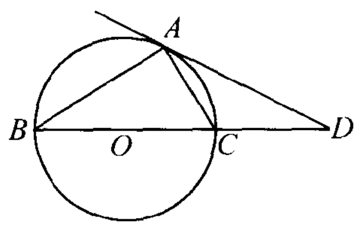


图 0－2－5

如图 0－2－5，$\because$ $\angle B=\angle CAD$，$\angle D=\angle D$，$\therefore$ $\triangle ABD \backsim \triangle CAD$. 又可得 3 个不同的比例式.

综上分析，共有 25 个不同的比例式. 当然题目只要求写出 10 个即可.

小结 解有限穷举型的结论开放题，应先从直接、显性的结论入手，通过等量代换产生出新的结论. 分离出基本图形逐一进行分析，也是一种手段.

例 6 如图 0－3，AB 是 $\odot O$ 的直径，$\odot O$ 过 AC 的中点 D，$DE \perp BC$，垂足为点 E.

（1）由这些条件能推出哪些正确结论？（要求：不再标注其他字母，找结论的过程中所连辅助线不能出现在结论中，不写推理过程，写出四个结论即可）

（2）若$\angle ABC$为直角，其他条件不变，除上述结论外，还能推出哪些结论？［要求写出6个结论，其他要求同(1)］

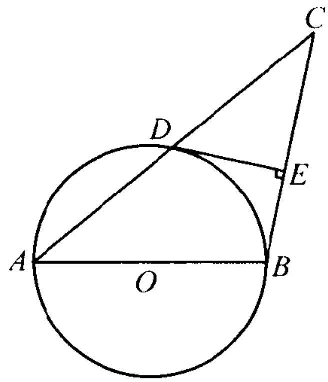


图 0－3

评析　本例有三个条件，要求写出由这三个条件推导出来的所有正确结论，因此属于结论开放型问题. 如果开放的结论没有属性限制，其答案往往呈有限混浊型或无限离散性，因此解题难度相对要大. 要注意三点. 第一，首先要清楚已知条件有哪些，如何表示，防止把已知条件的不同表示方式当做可推出的结论. 如“$AC=2AD$”“$\triangle CDE$是直角三角形”分别是已知条件“D是AC的中点”“$DE\perp BC$于E”的另一种表示方式，而不属于“可推出的结论”. 第二，应明确所写出的结论中只能用含有条件中的六个字母来表示已有的线段、角、及其他图形. 如连结BD，虽然可以推出$BD\perp AC$、$\triangle ABD\cong\triangle CBD$、$\triangle CDE\backsim\triangle CBD$、$\angle BDE=\angle BCD$等正确结论，但它们都不符合题目要求. 第三，寻找正确结论时，辅助线虽然不能出现在结论中，但可以通过辅助线产生符合要求的结论. 如连结BD后，得结论$\mathrm{Rt}\triangle CDE\backsim\mathrm{Rt}\triangle CBD\backsim\mathrm{Rt}\triangle DBE$，这些虽不符合要求，但由此可得到符合要求的结论$\dfrac{CB}{CD}=\dfrac{CD}{CE}$和$\dfrac{EB}{ED}=\dfrac{ED}{EC}$. 此外，由$D$是$AC$的中点，得$BD$是$AC$的中垂线，虽是不符合要求的

结论，但由此可得符合要求的结论 $AB=BC$、$\angle A=\angle C$. 再如连结 OD，据 $\angle ADO=\angle C$、$\angle ADO+\angle CDE=90^\circ$，可得符合要求的结论 DE 切 $\odot O$ 于点 D 等.

本例答案有下列结论可供选择：(1) ①DE 是 $\odot O$ 的切线；②$AB=BC$；③$\angle A=\angle C$；④$DE^2=BE\cdot CE$；⑤$CD^2=CE\cdot CB$；⑥$\angle C+\angle CDE=90^\circ$；⑦$CE^2+DE^2=CD^2$；(2) ①$CE=BE$；②$DE=BE$；③$DE=CE$；④$DE\parallel AB$；⑤$CB$ 是 $\odot O$ 的切线；⑥$DE=\frac{1}{2}AB$；⑦$\angle A=\angle CDE=45^\circ$；⑧$\angle C=\angle CDE=45^\circ$；⑨$CB^2=CD\cdot CA$；⑩$AB^2+BC^2=AC^2$；⑪$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{DE}{AB}$等.

3. 策略开放型

策略开放型探究题是指解题方法不惟一，或解题途径不明确的问题，即解决问题的策略具有发散性和创新性等特点的问题. 它要求在解题过程中不墨守陈规，不因循守旧，通过创新求索，从不同角度思考问题，有时发现一个新的解答需要一种新的方法或开拓一个新的研究领域.

例 7 在日常生活中，数学有着十分广泛的应用. 在下面三个问题中任选一个，请用学过的数学知识，提出你认为比较合理的解决办法(所选用的工具不限).

(1) 在河的一侧测出河的宽度；

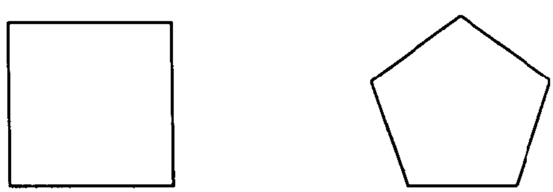
(2) 根据甲、乙两名成绩相近的跳远运动员近期的10次训练(比赛)纪录，选出一名选手参加市运动会跳远

比赛；

（3）测量学校操场旗杆的高度.

评析 本例首先要在三个问题中任选一个，由于用什么知识与方法去解决没有规定，所以具有非常规性和发散性的特点，是策略型开放探究题. 此类题在筹划、设计、解决问题的方案中，没有标准答案，可以利用各自的知识、经验，以各自的思维方式来展示分析问题和解决问题的能力，只要方法合理可行、有根有据即可. 这种开放性问题更接近实际，更能检验从实际问题中建立数学模型的能力. 关于测量河宽、旗杆高度，可以利用课本中相似三角形、三角函数等知识. 根据成绩进行优胜比较，可以利用统计学知识. 在决定跳远运动员时，当两名运动员成绩相近时，标准差（或方差）较小者成绩比较稳定，取胜把握较大，应选此；但是，如果从另一方面考虑，跳远运动员需要爆发力，选择标准差（或方差）较大的，也许能出好成绩，也有道理，也可以得分.

例 8 试比较图 0－4 两个几何图形的异同，分别写出它们的两个相同点和两个不同点.



（正方形）　　　　（正五边形）

图 0－4

评析 由于比较相同与不同的切入点有很多种，即问题具有非常规性，没有一定的模式可以遵循，思维呈发散性，所以它既是结论开放型又是策略开放型探究题. 解此类题目，要善于不断寻找新的视点，从而发现新的解答. 视点要从不同角度、不同的知识属性、不同层面去寻求，从而开拓一个新的研究领域. 如它们的相同点有：都是正多边形；都有相等的边；都有相等的内角；都有外接圆；都有内切圆；各角的平分线都交于一点；都是轴对称图形等等. 它们的不同点有：边数不同（或顶点数不同）；各自的内角大小不同；对称轴的数目不同；内角和不同；对角线条数不同；正方形是中心对称图形而正五边形不是中心对称图形等等.

例 9 如图 0-5-1，已知菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=72°$. 请设计三种不同的分法，将菱形 $ABCD$ 分割成四个三角形，使得每个三角形都是等腰三角形.（画图工具不限，要求画出分割线段；标出能够说明不同分法所得三角形的内角度数）

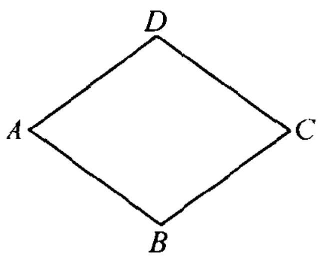


图 0-5-1

评析 本例属于非常规性的作图问题，需要尝试多种途径，寻找多种答案，是策略开放型探究题. 求解的一般方法是从基本图形入手，如由 72° 产生的等腰三角形基本图形有两种：36°、72°、72° 和 36°、36°、108°. 因此，利用对称性和基本图形构造等腰三角形有下列五种画法

（如图 0－5－2～图 0－5－6）：

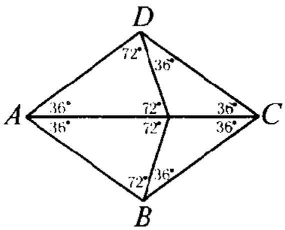


图 0－5－2

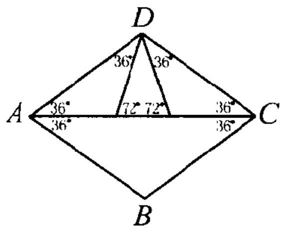


图 0－5－3

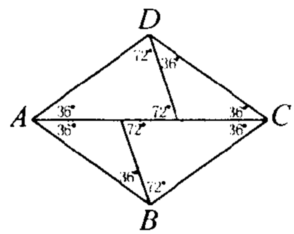


图 0－5－4

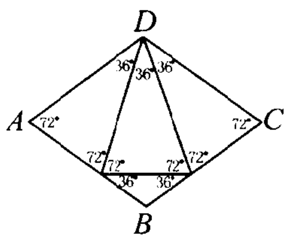


图 0－5－5

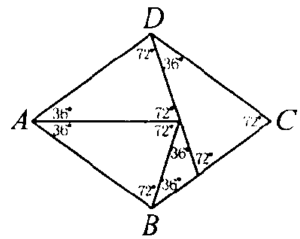


图 0－5－6

其次再探究基本图形中的数量关系和位置关系，探讨某些规律，如 36、72、108 都是 18 的倍数，所以含 18°倍数的等腰三角形还有 18°、18°、144°和 54°、54°、72°等等．因此，还有以下三种画法（如图 0－5－7～图 0－5－9）：

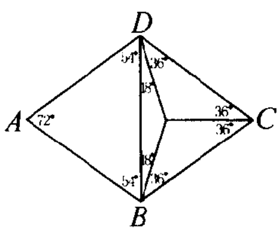


图 0－5－7

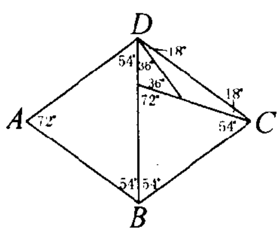


图 0－5－8

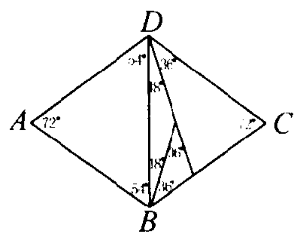


图 0－5－9

总之，一个数学问题按数学思维形式“假设—推理—判断”可分为三个部分．若其未知的要素是假设，则为条件开放型；若其未知的要求是推理，则为策略开放型；若