

362415

成都工学院图书馆  
基本馆藏

高等学校教材

# 大地测量学

中册

武汉测绘学院大地测量教研组编



中国工业出版社



高等学校教材



# 大地测量学

中 册

武汉测绘学院大地测量教研组 编

中国工业出版社

本书根据武汉測繪学院制訂的天文大地測量专业大地測量学教学大纲編写而成，为上册的繼續。內容共分七章，較为詳細地闡明了橢圓体面上的基本計算、高斯平面直角坐标及三角測量和導綫測量的內业計算，充分反映了現代測量实践中在这方面的成就。

本书取材較充实，理論联系实践，可作为天文大地測量专业大地測量学的教科书，也可供其他院校有关专业的师生和大地測量工作者参考。

## 大地測量学

中 册

武汉測繪学院大地測量教研組編

(根据測繪出版社紙型重印)

\*

国家測繪总局測繪书刊編輯部編輯 (北京三里河国家測繪总局)

中国工业出版社出版 (北京佟麟閣路丙10号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

\*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ ·印张 $24 \frac{3}{4}$ ·字数535,000

1960年10月北京第一版

1962年9月北京新一版·1964年7月北京第四次印刷

印数2,809—4,358·定价(科五)2.00元

\*

統一书号: K15165·1743 (測繪-30)

## 目 录

<b>第十章</b>	<b>椭圆体面上的基本公式, 观测方向的化算及球面三角形的解算</b> .....	6
§ 10-1	地球椭圆体的原素及其关系 .....	5
§ 10-2	大地测量学中常用的坐标系统 .....	7
§ 10-3	各种坐标系统间的关系 .....	8
§ 10-4	椭圆体面上各种曲率半径 .....	13
§ 10-5	子午圈弧长及平行圈弧长的计算 .....	17
§ 10-6	梯形图幅面积及梯形图廓长度的计算 .....	25
§ 10-7	大小相同于地球椭圆体的表面积及总体积之圆球半径 .....	29
§ 10-8	椭圆体面上的相对法截弧与大地线 .....	30
§ 10-9	旋转曲面上大地线的微分方程式及克莱劳定理 .....	33
§ 10-10	一般曲面上大地线的微分关系式 .....	36
§ 10-11	大地坐标系统中大地线的微分关系式 .....	39
§ 10-12	空间直角坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 化为大地线弧长 $s$ 及其方位角 $A$ 的函数式 .....	40
§ 10-13	大地线的归化长度及高斯密切球 .....	44
§ 10-14	大地极坐标的微分关系式 .....	48
§ 10-15	大地线与法截弧间的夹角 .....	49
§ 10-16	相对法截弧间的主要关系 .....	52
§ 10-17	大地线对于法截弧的相对位置 .....	59
§ 10-18	观测值化算到椭圆体面上的三项改正 .....	60
§ 10-19	球面上及椭圆体面上三角形的解算 .....	66
<b>第十一章</b>	<b>高斯平面直角坐标</b> .....	74
§ 11-1	概述 .....	74
§ 11-2	高斯平面直角坐标系统的基本概念 .....	76
§ 11-3	正形投影的基本公式 .....	83
§ 11-4	等量纬度差与大地纬度差的关系式 .....	87
§ 11-5	高斯投影公式 .....	88
§ 11-6	平面子午线收敛角 .....	95
§ 11-7	求长度比 $m$ .....	101
§ 11-8	利用高斯、克吕格投影计算表施行计算的方法 .....	106
§ 11-9	方向改化公式 .....	109
§ 11-10	距离改化公式 .....	114
§ 11-11	精度较高的方向改化公式及距离改化公式 .....	117
§ 11-12	利用数字表计算方向改化及距离改化的实用公式 .....	120
§ 11-13	从一个带到相邻带的高斯坐标变换 .....	124
§ 11-14	按平面相似变换的方法施行坐标变换 .....	140
§ 11-15	兰勃脱割圆锥投影的概念 .....	143
§ 11-16	在图幅内绘入公里线网或经纬线网 .....	151
<b>第十二章</b>	<b>三角测量的概算</b> .....	158
§ 12-1	概述 .....	158
§ 12-2	外业成果的整理 .....	159

§ 12-3	起算数据表和资用略图的编制 .....	163
§ 12-4	归心改正数及三角形闭合差的计算 .....	164
§ 12-5	近似坐标的计算 .....	165
§ 12-6	将观测成果归化到椭球体面上的准备计算 .....	167
§ 12-7	将观测成果归化到椭球体面上所作的改正计算 .....	170
§ 12-8	椭球体面上的观测结果归算到高斯投影平面上 .....	173
<b>第十三章</b>	<b>三角测量按条件观测平差</b> .....	<b>176</b>
§ 13-1	三角测量平差概論 .....	176
§ 13-2	独立网中条件方程式的种类和組成 .....	177
§ 13-3	非独立网中条件方程式的种类和組成 .....	183
§ 13-4	三角网中条件方程式的数目 .....	191
§ 13-5	条件方程式不符值的限值 .....	194
§ 13-6	两组平差法的理論 .....	198
§ 13-7	两组平差法在三角测量中的应用 .....	202
§ 13-8	按两组平差法进行三角网平差 .....	210
§ 13-9	按两组平差法进行典型图形平差 .....	219
§ 13-10	博尔茨展开法的概念 .....	226
§ 13-11	条件观测的分区平差 .....	232
§ 13-12	带有未知数的条件观测平差法的理論 .....	236
§ 13-13	用带有未知数的条件观测平差法进行分区平差 .....	241
§ 13-14	一等三角网系按带有未知数的条件观测分区平差的算例 .....	249
§ 13-15	跨越两个投影带的三角网按条件观测平差 .....	270
<b>第十四章</b>	<b>三角测量按间接观测平差</b> .....	<b>276</b>
§ 14-1	三角测量按间接观测平差的理論 .....	276
§ 14-2	交会定点及其平差计算 .....	284
§ 14-3	误差椭圆 .....	290
§ 14-4	二等三角网按间接观测平差 .....	299
§ 14-5	三角网按间接观测平差时基线角和拉普拉斯方位角的处理 .....	312
§ 14-6	三角网按间接观测平差的分区平差的概念 .....	319
§ 14-7	跨越两个投影带的三角网按间接观测平差 .....	322
§ 14-8	以观测角作为未知数的间接观测平差法 .....	326
§ 14-9	基线网平差 .....	334
<b>第十五章</b>	<b>导线网的严格平差方法及三角测量与导线测量联合平差</b> .....	<b>339</b>
§ 15-1	导线网的严格平差方法 .....	339
§ 15-2	导线网按条件观测严格平差法的算例 .....	343
§ 15-3	三角测量与导线测量联合平差 .....	350
§ 15-4	按条件和间接观测方法进行导线与三角网联合平差的算例 .....	355
<b>第十六章</b>	<b>新旧三角点坐标的变换</b> .....	<b>365</b>
§ 16-1	总述 .....	365
§ 16-2	利薩夫方法 .....	367
§ 16-3	正形变换法 .....	376
§ 16-4	仿射变换法 .....	382
§ 16-5	利用等高曲线施行坐标变换方法 .....	388
§ 16-6	举例 .....	389
附录一	按方向施行条件观测的分区平差——雷曼法 .....	392
附录二	以一排三角点的联线作为分区界线的“单前线”方法理論証明 .....	394

# 第十章 橢圓體面上的基本公式， 觀測方向的化算及球面三角形的解算

## § 10-1 地球橢圓體的原素及其關係

在第一章已經講過，為了大地測量計算的需要，應當選擇一個在數學上能簡單表示的，在形狀和大小方面與大地體很相似的體形，這個體形就是旋轉橢圓體，也稱為地球橢圓體。

圖 10-1 中  $PEP_1E_1$  是一個橢圓，稱為子午橢圓。若以  $PP_1$  為旋轉軸，把橢圓繞該軸旋轉一周，則得旋轉橢圓體。

通過橢圓體的中心而垂直於旋轉軸的平面稱為赤道面，該平面與橢圓體面相割所成的圓弧稱為赤道圈，在圖 10-1 中以  $EAE_1$  表示之。子午橢圓稱為子午圈（或稱經圈），圖中  $PKAP_1$  為通過點  $K$  的子午圈。凡平行於赤道面的平面均與橢圓體面相割成互相平行的圓弧，這些圓弧稱為平行圈（或稱緯圈），圖中  $SKS_1$  為通過點  $K$  的平行圈。

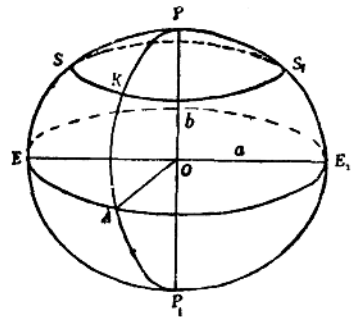


圖 10-1

我們引用下列符號：

旋轉橢圓體的長半徑： $a = OE = OE_1 = OA$

旋轉橢圓體的短半徑： $b = OP = OP_1$

旋轉橢圓體的扁率： $\alpha$  由下式決定之；

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \quad (10-1-1)$$

子午橢圓的第一偏心率  $e$  由下式決定之：

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (10-1-2)$$

子午橢圓的第二偏心率  $e'$  由下式決定之；

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad (10-1-3)$$

$a$ 、 $b$ 、 $\alpha$ 、 $e$ 、 $e'$  為旋轉橢圓體的原素（ $a$ 、 $b$  稱為長度原素）。決定旋轉橢圓體的大小和形狀，只需要知道其中二個原素已足夠了，但其中的一個必須是長度原素。

在上述旋轉橢圓體的原素中，除了關係式（10-1-1）、（10-1-2）及（10-1-3）外，

尚存在下列一些关系:

(1)  $a$  与  $b$  間的关系:

$$\text{从式 (10-1-2) 得: } \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \quad \text{即 } b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (10-1-4)$$

(2)  $e$  与  $e'$  間的关系:

$$\text{以式 (10-1-4) 代入式 (10-1-3) 中得: } e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2} \quad (10-1-5)$$

$$\text{同样方法可求得: } e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} \quad (10-1-6)$$

將 (10-1-5)、(10-1-6) 兩式相乘又得:

$$(1 - e^2)(1 + e'^2) = 1 \quad (10-1-7)$$

(3)  $e$  与  $\alpha$  間的关系:

从式 (10-1-1) 并顧及式 (10-1-4) 得:

$$\alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2}$$

$$\text{由此得: } e^2 = 2\alpha - \alpha^2 \quad (10-1-8)$$

$$\text{及近似式 } e^2 = 2\alpha \quad e^2 \approx 1 : 150 \quad (10-1-8)$$

为了使今后公式的推导简便起見, 还需要用下列各輔助量:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{a-b}{a+b} \\ m &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{aligned} \right\} \quad (10-1-9)$$

$$\text{及 } e = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = b(1 + e'^2) \quad (10-1-10)$$

在第一章內已經講过, 每个国家, 为了进行測量成果的处理, 选擇一个与本国領土配合最好的橢圓体, 我們称它为参考橢圓体。我国現在采用的参考橢圓体是克拉素夫斯基橢圓体, 該橢圓体的原素有下列数值:

$$a = 6\,378\,245.000\,00 \text{ 米,}$$

$$b = 6\,356\,863.018\,77 \text{ 米,}$$

$$c = 6\,399\,698.901\,8 \text{ 米,}$$

$$\alpha = 0.00335\,23298\,69,$$

$$e^2 = 0.00669\,34216\,2297,$$

$$e'^2 = 0.00673\,85254\,1468,$$

$$e^4 = 0.00004\,48018\,9302,$$

$$e^6 = 0.00000\,02998\,7796,$$

$$e^8 = 0.00000\,00020\,0721,$$

$$e^{10} = 0.00000\,00000\,1344,$$

$$m = 0.00335\,79488\,9536,$$

$$n = 1:595.6 = 0.00167\,89791\,8066$$

## § 10-2 大地测量学中常用的坐标系统

决定某一点在椭圆体面上的位置可采用各种不同的坐标系统，在大地测量学中常用的坐标系统有下列五种

1. **空间直角坐标系**：该坐标系是以椭圆体的中心 $O$ （图 10-2）为坐标原点， $OZ$ 轴与椭圆体的旋转轴一致， $OX$ 及 $OY$ 两轴位于椭圆体的赤道面 $ER_1R_2E_1$ 上，同时使 $ZOX$ 面与起算子午面 $PE_1P_1E$ 相重合， $OY$ 轴是赤道面与 $ZOY$ 子午面的交线，而 $ZOY$ 面是与起算子午面 $PE_1P_1E$ 互相正交的。

决定椭圆体面上点 $K$ 的位置用坐标：  
 $X = K_1K_2, Y = OK_2, Z = KK_1$ 表示之。

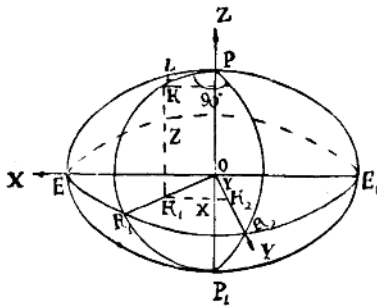


图 10-2

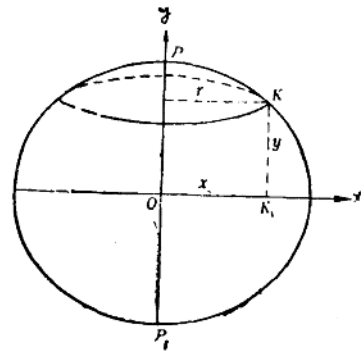


图 10-3

这个坐标系仅应用于理论的推导，而在大地测量学的实用计算上是不采用的。

2. **子午面上的直角坐标系** 在图 10-3 中，假定 $L$ 表示点 $K$ 的大地经度，即通过点 $K$ 的子午面与起始子午面所夹的角。在具有大地经度 $L$ 的子午面上点 $K$ 的直角坐标为 $x, y$ 。

这个坐标系仅用于公式的推导，例如推导子午圈曲率半径公式等。

3. **大地坐标系**：在图 10-4 中，点 $K$ 的大地经度为 $L$ ，通过点 $K$ 作一法线 $Kn$ ，该法线与赤道面所组成的角 $B$ 称为大地纬度。在大地坐标系中是以大地纬度 $B$ 及大地经度 $L$ 表示点 $K$ 的坐标。

大地坐标系是大地测量的基本坐标系，它有下面几个优点：

(1) 它是整个椭圆体上统一的坐标系，是全世界公用的，最方便的坐标系。经纬线是地形图的基本线，所以在测图和制图时必须应用这个坐标系。

(2) 它与同一点的天文坐标（天文经纬度）相比较，以确定该点上垂线偏差的大小。

4. **地心坐标系** 图 10-5 中， $OK$  为通过点 $K$ 所引的子午椭圆的向径 $\rho$ ， $OK$  与



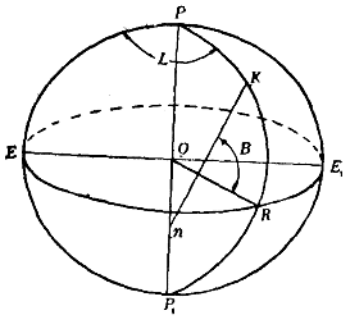


图 10-4

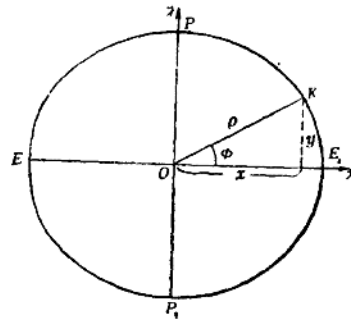


图 10-5

$x$  軸的交角  $\phi$  叫做地心緯度，点  $K$  的位置用地心緯度  $\phi$  和大地經度  $L$  来决定。这个坐标系統用于天文及数学制图学上。

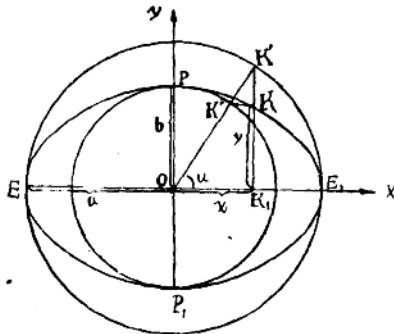


图 10-6

5. 归化緯度坐标系統；在經度为  $L$  的  $PE, P_1E_1$  子午面上，以  $O$  为圆心作一个半径为  $OE = a$  的圆（图 10-6），并由子午椭圆上一点  $K$  作直綫  $KK_1$  平行于旋轉軸，延长之使与圆交于点  $K'$ ， $O$  与  $K'$  两点間連一直綫，直綫  $OK'$  与赤道面的交角  $u$  称为点  $K$  的归化緯度。或由下法亦可获得归化緯度：以  $O$  为圆心作一个半径为  $OP = b$  的圆，并由点  $K$  作一条平行于  $CE_1$  的平行綫与该圆相交于点  $K''$ ， $O$  与  $K''$  二点的連綫  $OK''$  与赤道面的交角  $u$  也就是点  $K$  的归化緯度。

归化緯度  $u$  和大地經度  $L$  决定点  $K$  在椭圆体面上的位置。这个坐标系統用于一系列理論上的推导，尤其是应用在长距离的大地坐标的解算上。

### § 10-3 各种坐标系統間的关系

#### 1. 归化緯度 $u$ 与大地緯度 $B$ 间的关系

在图 10-7 中作  $K''K_2$  垂直于  $x$  軸，因  $OK'' = b, OK' = a, OK_1 = x$  及  $K''K_2 = y$  故由图得到：

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \\ y &= b \sin u \end{aligned} \right\} \quad (10-3-1)$$

取式(10-3-1)的微分,并将微分后所得两式相除,得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-b \cos u du}{a \sin u du} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} u \quad (10-3-2)$$

同时在图 10-7 中,由点  $K$  引一法綫  $Kn$ , 該法綫与  $x$  軸的交角就是大地緯度  $B$ , 又从点  $K$  引一切綫与  $x$  軸所組成的角为  $90^\circ + B$ , 按微分學知;

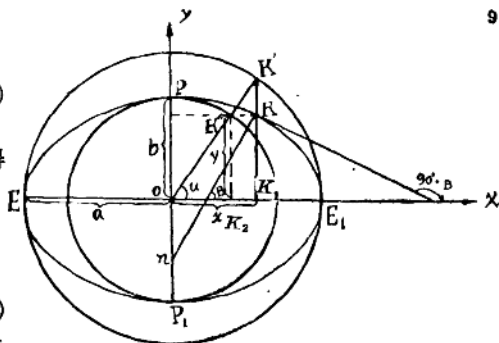


图 10-7

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg} B \quad (10-3-3)$$

由(10-3-2)及(10-3-3)两式得

$$\frac{a}{b} \operatorname{tgu} = \operatorname{tg} B \quad (10-3-4)$$

将  $b = a \sqrt{1 - e^2}$  代入上式可得  $u$  及  $B$  的关系式,

$$\operatorname{tgu} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B \quad (10-3-5)$$

$u$  及  $B$  的关系式亦可写为下列形式:

利用式(10-3-5)得:

$$\left. \begin{aligned} \cos u &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} = \frac{\cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \\ \sin u &= \frac{\operatorname{tgu}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} B}{\sqrt{1 + (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 B}} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-6)$$

应用下列符号:  $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$

$$\left. \begin{aligned} W &= \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B} = \sqrt{1 + \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-7)$$

$$\text{则 } \frac{W^2}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 \sin^2 B}{1 - e^2} = 1 + e'^2 - e'^2 \sin^2 B = 1 + e'^2 \cos^2 B = V^2$$

$$\text{或 } W^2 = V^2 (1 - e^2) = \frac{V^2}{1 + e'^2} \quad (10-3-8)$$

应用(10-3-7)及(10-3-8)两式, 則式(10-3-6)可写为下列两种形式:

$$\left. \begin{aligned} \cos u &= \frac{\cos B}{W} \\ \sin u &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{W} \sin B \end{aligned} \right\} \quad (10-3-9)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos B &= \sqrt{1-e^2} \cos u \\ \sin B &= \sqrt{1-e^2} \sin u \end{aligned} \right\} \quad (10-3-10)$$

因  $e^2$  为微小量, 由式(10-3-5)可看出, 大地緯度与归化緯度間的差別是很小的, 且  $B > u$ , 为了在实际应用中方便起見, 下面导出差数  $B-u$  的公式, 根据这些公式我們可以直接由  $B$  求  $u$  或由  $u$  求  $B$ 。

(1) 求  $B-u$  为  $B$  的函数式

$$\text{因 } \operatorname{tg}(B-u) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} u}$$

以式(10-3-5)代入上式得

$$\operatorname{tg}(B-u) = \frac{\operatorname{tg} B(1 - \sqrt{1-e^2})}{1 + \operatorname{tg}^2 B \sqrt{1-e^2}} \quad (10-3-11)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{按 } n &= \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{1-n}{1+n} = \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} \\ \alpha &= 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1-e^2} = \frac{2n}{1+n} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-12)$$

以式(10-3-12)代入式(10-3-11)中并加以简化后得:

$$\operatorname{tg}(B-u) = \frac{n \sin 2B}{1 + n \cos 2B}$$

利用  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots$  把上式化为級数式,

$$\operatorname{tg}(B-u) = n \sin 2B - n^2 \sin 2B \cos 2B + n^3 \sin 2B \cos^2 2B - \dots$$

又根据  $x = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \dots$  可將上式变为下列形式:

$$B-u = n \sin 2B - \frac{n^2}{2} \sin 4B + \frac{n^3}{3} \sin 6B - \dots \quad (10-3-13)_1$$

对于克拉索夫斯基橢圓体我們得到由已知  $B$  計算  $u$  的公式为:

$$(B-u)'' = 346'' . 3143 \sin 2B - 0'' . 2907 \sin 4B + 0'' . 0003 \sin 6B - \dots \quad (10-3-13)_2$$

(2) 求  $B-u$  为  $u$  的函数式

用上面同样的方法可以导出已知  $u$  計算  $B$  的公式为:

$$B-u = n \sin 2u + \frac{n^2}{2} \sin 4u + \frac{n^3}{3} \sin 6u + \dots \quad (10-3-14)_1$$

对于克拉索夫斯基橢圓体則有下面的公式

$$(B-u)'' = 346'' . 3143 \sin 2u + 0'' . 2907 \sin 4u + 0'' . 0003 \sin 6u + \dots \quad (10-3-14)_2$$

## 2. 大地緯度 $B$ 与地心緯度 $\Phi$ 的关系

由圖10-5可以看出, 直角坐标  $x, y$  与地心緯度的关系式为:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{y}{x} \quad (10-3-15)$$

而由式(10-3-1)知  $\frac{y}{x} = \frac{b \sin u}{a \cos u} = \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} u$  (10-3-16)

將式(10-3-5)代入上式得:  $\operatorname{tg} \Phi = (1-e^2) \operatorname{tg} B$  (10-3-17)

以下导出差数  $(B-\Phi)$  的公式 应用式(10-3-17)則得:

$$\operatorname{tg}(B-\Phi) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} \Phi}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} \Phi} = \frac{e^2 \operatorname{tg} B}{1 + (1-e^2) \operatorname{tg}^2 B}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{按 } m &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} & \frac{1-m}{1+m} &= \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 \\ e^2 &= \frac{2m}{1+m} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-18)$$

故  $\operatorname{tg}(B-\Phi) = \frac{2m \operatorname{tg} B}{(1+m) + (1-m) \operatorname{tg}^2 B}$

或  $\operatorname{tg}(B-\Phi) = \frac{m \sin 2B}{1 + m \cos 2B}$  (10-3-19)

利用上式, 按照上面导出差数  $(B-u)$  的相同方法可求得差数  $(B-\Phi)$  的公式:

$$B-\Phi = m \sin 2B - \frac{m^2}{2} \sin 4B + \frac{m^3}{3} \sin 6B - \dots \quad (10-3-20)$$

## 3. 子午面上的直角坐标 $x, y$ 与大地緯度 $B$ 间的关系

由式(10-3-1)知

$$x = a \cos u$$

$$y = b \sin u$$

以式(10-3-9)代入上式

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \cos B}{W} \\ y &= \frac{b \sqrt{1-e^2} \sin B}{W} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-21)$$

或以式(10-3-8)代入式(10-3-21)并顧及式(10-1-10)的关系

則得  $\left. \begin{aligned} x &= \frac{c \cos B}{V} \\ y &= \frac{c \sin B}{V(1+e'^2)} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-22)$

由圖10-3 知道过点  $K$  具有緯度  $B$  的平行圈半徑为:

$$r = x = \frac{a \cos B}{W} = \frac{c \cos B}{V} \quad (10-3-23)$$

#### 4. 在同一子午面上的直角坐标 $x, y$ 与地心纬度 $\Phi$ 间之关系和向径公式

由图10-5可看出; 
$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \Phi \\ y &= \rho \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (10-3-24)$$

上式中  $\rho$  为向径。

代入子午椭圆的方程式:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

中则得 
$$\frac{\rho^2 \cos^2 \Phi}{a^2} + \frac{\rho^2 \sin^2 \Phi}{a^2(1-e^2)} = 1$$

由上式解出  $\rho$ : 
$$\frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)} (\cos^2 \Phi(1-e^2) + \sin^2 \Phi) = 1$$

由此得 
$$\rho = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}}$$

按式 (10-3-24) 则有

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos\Phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}} \\ y &= \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\Phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-25)$$

以大地纬度表示的向径公式可利用式 (10-3-21) 求得之:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2 \cos^2 B}{1-e^2 \sin^2 B} + \frac{a^2(1-e^2)^2 \sin^2 B}{1-e^2 \sin^2 B} = \frac{a^2[1+e^2(e^2-2)\sin^2 B]}{1-e^2 \sin^2 B}$$

由上式解出  $\rho$  并保持  $e^4$  项, 加以变化后, 得最后形式

$$\rho = a\left(1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 B + \frac{e^4}{2} \sin^2 B - \frac{5}{8} e^4 \sin^4 B\right) \quad (10-3-26)$$

#### 5. 空间直角坐标 $X, Y, Z$ 与其他坐标系间的关系

图10-8中  $P_1 R_1 P R$  为起始子午面, 在此平面上设置  $Ox$  轴, 而  $Ox$  及  $Oy$  轴则设在通过点  $K$  的子午面内,  $L$  为点  $K$  的大地经度。从图中可看出

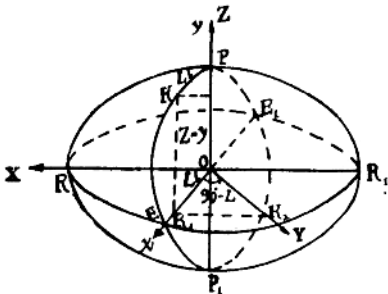


图 10-8

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos L \\ Y &= x \sin L \\ Z &= y \\ x &= \sqrt{X^2 + Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-27)$$

又根据上式及式 (10-3-1) 可得

$$\left. \begin{aligned} X &= a \cos u \cos L \\ Y &= a \cos u \sin L \\ Z &= b \sin u = a\sqrt{1-e^2} \sin u \end{aligned} \right\} \quad (10-3-28)$$

并由(10-3-27)及(10-3-21)兩式可得

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{a \cos B}{W} \cos L \\ Y &= \frac{a \cos B}{W} \sin L \\ Z &= \frac{a(1-e^2) \sin B}{W} \end{aligned} \right\} \quad (10-3-29)$$

## § 10-4 橢圓體面上各種曲率半徑

通過橢圓體面的法綫可作無窮數量的平面，這些平面稱為法截面，在某一點上所作法截面與橢圓體表面所截的弧綫稱為法截弧。除兩極外，橢圓體面的一點上沿著不同方向的法截弧，其曲率半徑各不相同。在不同的情況下我們應用不同的曲率半徑解決各種問題。

### 1. 橢圓體面上某一點的主曲率半徑

通過橢圓體面上一點  $K$ ，可以作出兩個互相垂直的法截弧，如果它們的曲率半徑具有極大及極小值，則這兩法截弧稱為主法截弧。點  $K$  的主法截弧是 1) 子午圈，它為通過點  $K$  及橢圓體的兩極  $P$  和  $P_1$  的法截弧，圖 10-9 內用  $PKP_1PE$  表示。2) 卯酉圈是經過點  $K$  並垂直於通過點  $K$  的子午圈，圖 10-9 內曲綫  $WKPE$  表示卯酉圈，它也是橢圓曲綫。

以  $M$  及  $N$  分別表示子午圈和卯酉圈的曲率半徑，下面我們將導出它們的公式：

(1) 子午圈的曲率半徑

為了求子午圈的曲率半徑公式，根據微分學知：平面曲綫的曲率半徑公式為：

$$M = \frac{-\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (10-4-1)$$

因為上式中  $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ，故在式的右方採用負號。

從式 (10-3-3) 知  $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} B$  (10-4-2)

上式向  $x$  再取一次導數得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B} \cdot \frac{dB}{dx} \quad (10-4-3)$$

求  $\frac{dB}{dx}$  時可利用式 (10-3-21)

$$x = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = a \cos B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}$$

取微分得出

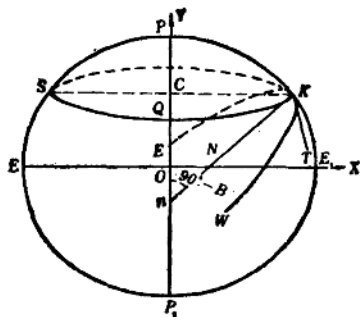


圖 10-9

$$dx = a \left\{ -\sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} + e^2 \sin B \cos^2 B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} \right\} dB$$

由此得  $\frac{dx}{dB} = a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} \{ -(1 - e^2 \sin^2 B) + e^2 \cos^2 B \}$

$$= -a \sin B (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{1}{2}} (1 - e^2)$$

將上式代入式 (10-4-3) 則得:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}{a \sin^3 B (1 - e^2)} \quad (10-4-4)$$

以 (10-4-2) 及 (10-4-4) 兩式代入式 (10-4-1) 中最后得出

$$M = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 B)^{\frac{3}{2}} a \sin^3 B (1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a(1 - e^2)}{W^3} \quad (10-4-5)$$

当  $B$  从  $0^\circ$  变到  $90^\circ$  时,  $M$  渐渐增加。在兩極处  $B = 90^\circ$ , 此时以  $c$  代表兩極的曲率半徑, 則由式 (10-4-5) 可以看出

$$c = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{a^2}{b} \quad (10-4-6)$$

利用式 (10-3-8) 則式 (10-4-5) 亦可写为下列形式:

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{V^3(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{V^3(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{V^3} \quad (10-4-7)$$

## (2) 卯酉圈曲率半徑

圖 10-9 中,  $WKE$  为通过点  $K$  的卯酉圈, 为了确定点  $K$  上的卯酉圈曲率半徑, 可通过点  $K$  作一切綫  $KT$  与以  $C$  为中心的平行圈  $KQS$  相切, 这个切綫是在垂直于子午面的平行圈平面內。因卯酉圈平面亦与子午面垂直, 且切綫  $KT$  与椭圆体面的法綫  $Kn$  垂直, 故  $KT$  同时又为卯酉圈的切綫。換句話說  $KT$  是平行圈  $KQS$  (斜截弧) 及卯酉圈  $EKW$  (法截弧) 的公共切綫。

根据麦尼尔定理: 假若通过曲面上一点引兩条截弧, 一为法截弧, 一为斜截弧, 且在该点上这两条截弧具有一公共切綫, 則斜截弧的曲率半徑等于法截弧的曲率半徑乘以兩截弧平面間夾角的余弦。

从圖 10-9 中可以看出, 这两截弧平面間的夾角  $CKn$  等于大地緯度  $B$ , 所以平行圈的半徑  $r$  可用卯酉圈曲率半徑  $N$  按下式决定:

$$r = N \cos B = \overline{KC}$$

顧及平行圈半徑公式 (10-3-23),

$$r = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (10-4-8)$$

可以得出

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a}{V \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a}{W} \quad (10-4-9)_1$$

或

$$N = \frac{a}{W} = \frac{a}{V \sqrt{1 - e^2}} = \frac{c}{V} \quad (10-4-9)_2$$

由圖 10-9 知

$$\overline{Kn} = \frac{\overline{KC}}{\cos B} = N$$

这就是說，法綫的綫段  $\overline{Kn}$  的長度等于卯酉圈的曲率半徑，換句話說卯酉圈的曲率中心是在橢圓體旋轉軸上。

从 (10-4-7) 与 (10-4-9)<sub>2</sub> 兩式得：

$$\frac{N}{M} = V^2 = 1 + \eta^2 \quad (10-4-10)$$

因此，我們看出

$$N \geq M$$

在实际的計算中經常用下列  $\frac{\rho''}{M}$  及  $\frac{\rho''}{N}$  两个量，这两个量用符号(1)及(2)表示之，

就是

$$\frac{\rho''}{M} = (1) \quad \text{及} \quad \frac{\rho''}{N} = (2) \quad (10-4-11)$$

它們的对数可以从“大地坐标計算用表”(測繪出版社 1957 年出版)內以緯度  $B$  为引数查得。

## 2. 任意法截弧的曲率半徑

已知曲面上某一点的主曲率半徑，应用下面的尤拉公式就可以求出該点上具有任意方位角法截弧曲率半徑：

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}, \quad (10-4-12)$$

式中  $R_A$  是为具有方位角  $A$  的法截弧曲率半徑， $M$  为子午圈的曲率半徑， $N$  为卯酉圈的曲率半徑。

式 (10-4-12) 可改写为

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} \quad (10-4-13)$$

上式分子和分母各除以  $M$ ，并顧及式 (10-4-10) 的关系則上式写为：

$$R_A = \frac{N}{\frac{N}{M} \cos^2 A + \sin^2 A} = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}$$

把上式展开成級数得：



$$R_A = N(1 - \eta^2 \cos^2 A + \eta^4 \cos^4 A - \eta^6 \cos^6 A + \dots) \quad (10-4-14)$$

如果在式 (10-4-14) 中的  $N$  以下式 (該式的証明見后面式 (10-4-17))

$$N = RV = R\sqrt{1 + \eta^2} \cong R\left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right) \quad (10-4-15)$$

代入并舍去含有  $\eta^4$  的各项, 則得

$$\begin{aligned} R_A &= R\left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right)(1 - \eta^2 \cos^2 A) = R\left\{1 - \frac{1}{2}\eta^2(2\cos^2 A - 1)\right\} \\ &= R\left\{1 - \frac{1}{2}e'^2 \cos^2 B \cos 2A\right\} \end{aligned} \quad (10-4-16)$$

式中  $R$  为平均曲率半徑 (定义見后)。当基綫长度归算到椭圆体面上时, 可应用 (10-4-16) 式求出所需要的曲率半徑。在“一、二等基綫測量細則” (測繪出版社 1958 年出版) 內載有任意法截弧曲率半徑的数字表。

### 3. 平均曲率半徑

通过曲面上某一点的一切法截弧, 当其数目趋于無穷时, 它們的曲率半徑的算术平均值之極限, 就是該点的平均曲率半徑。

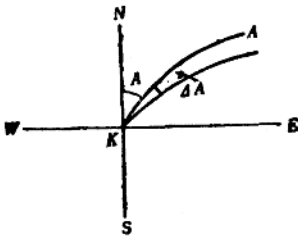


圖 10-10

圖 10-10 中以直綫  $NKS$  表示通过椭圆体面上点  $K$  的子午圈, 并以  $WKE$  表示卯酉圈, 設曲綫  $KA$  表示通过点  $K$  的任意一个法截弧, 該法截弧与子午圈所夾的角度为  $A$ , 也就是  $KA$  的方位角。

公式 (10-4-13) 可确定任意法截弧的曲率半徑  $R_A$  与子午圈曲率半徑及卯酉圈曲率半徑之間的关系, 即

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}$$

我們設想, 方位角  $A$  依次具有下列各值:

$$0, \Delta A, 2\Delta A, 3\Delta A, \dots, 2\pi - 2\Delta A, 2\pi - \Delta A.$$

此处  $\Delta A$  为微小量,  $\Delta A$  的个数等于  $\frac{2\pi}{\Delta A}$ 。今以  $R_1$  表示通过点  $K$  上各相隔  $\Delta A$  角度的一切法截弧的曲率半徑之算术平均值, 則

$$R_1 = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}} = \frac{\sum_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A} \frac{MN \Delta A}{N \cos^2 A + M \sin^2 A}}{2\pi}$$

以  $R$  表示平均曲率半徑, 則按它的定义得,

$$R = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} R_1$$

如果法截弧的数目趋近于無穷, 則可用积分符号代替式中  $R_1$  中的  $\Sigma$  符号, 并以  $dA$  代替  $\Delta A$ , 这样, 就得到: