高等学校教材

大地測量学

中册

武汉测绘学院大地測量教研組 编

中国工业出版社

高 等 学 校 教 材

大地測量学

中　　册

武汉测绘学院大地测量教研組 编

中国工业出版社

本书根据武汉测繪学院制訂的天文大地测量专业大地测量学教学大綱編写而成，为上册的继續。內容共分七章，較为詳細地闡明了椭圆体面上的基本計算、高斯平面直角坐标及三角测量和导綫测量的內业計算，充分反映了现代测量实践中在这方面的成就。

本书取材較充实，理論联系实践，可作为天文大地测量专业大地测量学的教科书，也可供其他院校有关专业的师生和大地测量工作者参考。

大地测量学

中　册

武汉测繪学院大地测量教研組編

（根据测繪出版社紙型重印）

*

国家测繪总局测繪书刊編輯部編輯（北京三里河国家测繪总局）

中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第110号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本787×1092 1/16·印张24 3/4·字数535,000

1960年10月北京第一版

1962年9月北京新一版·1964年7月北京第四次印刷

印数2,809—4,358·定价（科五）2.90元

*

統一书号：K15165·1743（测繪-30）

目　　录

第十章　椭圆体面上的基本公式，观测方向的化算及球面三角形的解算

§ 10-1　地球椭圓体的原素及其关系

在第一章已經講过，为了大地测量計算的需要，应当选择一个在数学上能簡單表示的，在形狀和大小方面与大地体很相似的体形，这个体形就是旋轉椭圓体，也称为地球椭圓体。

圖 10-1 中 PEP_1E_1 是一个椭圆，称为子午椭圓。若以 PP_1 为旋轉軸，把椭圓繞該軸旋轉一周，則得旋轉椭圓体。

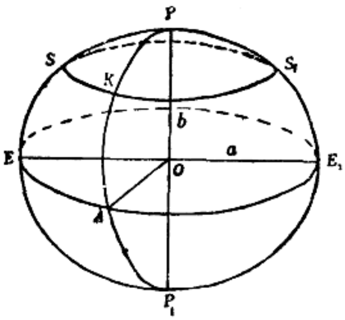

圖 10-1

通过椭圓体的中心而垂直于旋轉軸的平面称为赤道面，該平面与椭圓体面相割所成的圓弧称为赤道圈，在圖 10-1 中以 EAE_1 表示之。子午椭圓称为子午圈（或称經圈），圖中 $PKAP_1$ 为通过点 K 的子午圈。凡平行于赤道面的平面均与椭圓体面相割成互相平行的圓弧，这些圓弧称为平行圈（或称緯圈），圖中 SKS_1 为通过点 K 的平行圈。

我們引用下列符号：

旋轉椭圓体的長半徑：$a=OE=OE_1=OA$

旋轉椭圓体的短半徑：$b=OP=OP_1$

旋轉椭圓体的扁率：α 由下式决定之；

$$\alpha=\frac{a-b}{a} \tag{10-1-1}$$

子午椭圓的第一偏心率 e 由下式决定之：

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \tag{10-1-2}$$

子午椭圓的第二偏心率 e' 由下式决定之；

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2} \tag{10-1-3}$$

a、b、α、e、e' 为旋轉椭圓体的原素（a、b 称为長度原素）。决定旋轉椭圓体的大小和形狀，只需要知道其中二个原素已足够了，但其中的一个必須是長度原素。

在上述旋轉椭圓体的原素中，除了关系式（10-1-1），（10-1-2）及（10-1-3）外，

間存在下列一些关系：

（1）a 与 b 間的关系：

从式（10-1-2）得：$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$ 即 $b=a\sqrt{1-e^2}$ （10-1-4）

（2）e 与 e' 間的关系：

以式（10-1-4）代入式(10-1-3)中得：$e'^2=\frac{e^2}{1-e^2}$ （10-1-5）

同样方法可求得： $e^2=\frac{e'^2}{1+e'^2}$ （10-1-6）

將（10-1-5）、（10-1-6）兩式相乘又得：

$$(1-e^2)(1+e'^2)=1 \tag{10-1-7}$$

（3）e 与 α 間的关系：

从式（10-1-1）并顧及式（10-1-4）得：

$$\alpha=1-\frac{b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}$$

由此得： $e^2=2\alpha-\alpha^2$ （10-1-8）

及近似式 $e^2=2\alpha$ $e^2\approx1:150$ （10-1-8）

为了使今后公式的推导簡便起見，还需要用下列各輔助量：

$$\left.\begin{aligned} n&=\frac{a-b}{a+b} \\ m&=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \tag{10-1-9}$$

及 $c=\frac{a^2}{b}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}=b(1+e'^2)$ （10-1-10）

在第一章內已經講过，每个国家，为了进行測量成果的处理，选擇一个与本国領土配合最好的橢圓体，我們称它为参考橢圓体。我国現在采用的参考橢圓体是克拉索夫斯基橢圓体，該橢圓体的原素有下列数值：

$a=6\,378\,245.000\,00$ 米；

$b=6\,356\,863.018\,77$ 米；

$c=6\,399\,698.901\,8$ 米；

$\alpha=0.00335\ 23298\ 69$；

$e^2=0.00669\ 34216\ 2297$；

$e'^2=0.00673\ 85254\ 1468$；

$e^4=0.00004\ 48018\ 9302$；

$e^6=0.00000\ 02998\ 7796$；

$e^8=0.00000\ 00020\ 0721$；

$e^{10}=0.00000\ 00000\ 1344$；

$m=0.00335\ 79488\ 9536$；

$n=1:595.6=0.00167\ 89791\ 8066$

§ 10-2 大地测量学中常用的坐标系統

决定某一点在椭圆体面上的位置可采用各种不同的坐标系統，在大地测量学中常用的坐标系統有下列五种

1. 空間直角坐标系統：該坐标系統是以椭圆体的中心O（图 10-2）为坐标原点，OZ軸与椭圆体的旋轉軸一致，OX及OY两軸位于椭圆体的赤道面$ER_1R_2E_1$上，同时使ZOX面与起算子午面PE_1P_1E相重合，OY軸是赤道面与ZOY子午面的交綫，而ZOY面是与起算子午面PE_1P_1E互相正交的。

决定椭圆体面上点K的位置用坐标：

$X=K_1K_2, Y=OK_2, Z=KK_1$表示之。

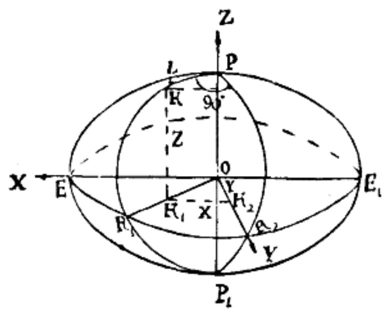

图 10-2

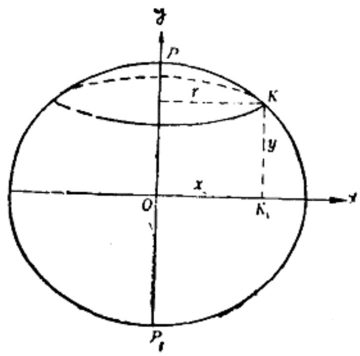

图 10-3

这个坐标系統仅应用于理論的推导，而在大地测量学的实用計算上是不采用的。

2. 子午面上的直角坐标系統　在图 10-3 中，假定L表示点K的大地經度，即通过点K的子午面与起始子午面所夹的角。在具有大地經度L的子午面上点K的直角坐标为x、y。

这个坐标系統仅用于公式的推导，例如推导子午圈曲率半径公式等。

3. 大地坐标系統：在图 10-4 中，点K的大地經度为L，通过点K作一法綫Kn，該法綫与赤道面所組成的角B称为大地緯度。在大地坐标系統中是以大地緯度B及大地經度L表示点K的坐标。

大地坐标系統是大地测量的基本坐标系統，它有下面几个优点：

(1) 它是整个椭圆体上統一的坐标系統，是全世界公用的，最方便的坐标系統。經緯綫是地形图的基本綫，所以在測图和制图时必須应用这个坐标系統。

(2) 它与同一点的天文坐标（天文經緯度）相比較，以确定該点上垂綫偏差的大小。

4. 地心坐标系統　图 10-5 中，OK为通过点K所引的子午椭圓的向径ρ，OK与

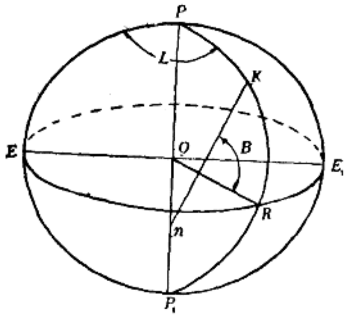

图 10-4

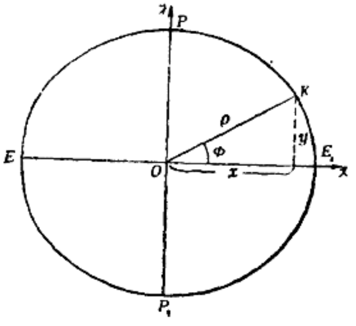

图 10-5

x 軸的交角 Φ 叫做地心緯度，点 K 的位置用地心緯度 Φ 和大地經度 L 来决定 。这个坐标系統用于天文及数学制图学上。

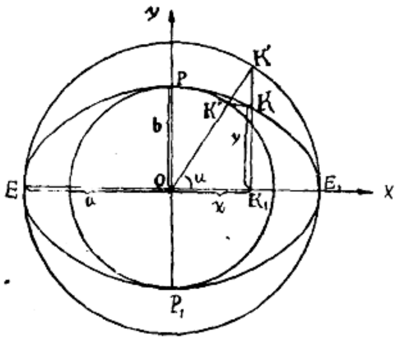

图 10-6

5. 归化緯度坐标系統；在經度为 L 的 PE_1P_1E 子午面上，以 O 为圆心作一个半径为 $OE=a$ 的圓（图 10-6），并由子午椭圓上一点 K 作直綫 KK_1 平行于旋轉軸，延长之使与圓交于点 K'，O 与 K' 两点間連一直綫，直綫 OK' 与赤道面的交角 u 称为点 K 的归化緯度。或由下法亦可获得归化緯度：以 O 为圓心作一个半径为 $OP=b$ 的圓，并由点 K 作一条平行于 OE_1 的平行綫与該圓相交于点 K''，O 与 K'' 二点的連綫 OK'' 与赤道面的交角 u 也就是点 K 的归化緯度。

归化緯度 u 和大地經度 L 決定点 K 在椭圓体面上的位置。这个坐标系統用于一系列理論上的推导，尤其是应用在长距离的大地坐标的解算上。

§ 10-3 各种坐标系統間的关系

1. 归化緯度 u 与大地緯度 B 间的关系

在图 10-7中作 $K''K_2$ 垂直于 x 軸，因 $OK''=b, OK'=a$，$OK_1=x$ 及 $K''K_2=y$ 故由图得到：

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u \\ y &= b\sin u \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}3\text{-}1)$$

取式（10-3-1）的微分，并将微分后所得两式相除，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-b\cos u du}{a\sin u du}=\frac{-b}{a}\operatorname{ctg} u \qquad (10\text{-}3\text{-}2)$$

同时在图 10-7中，由点K引一法綫Kn，該法綫与x軸的交角就是大地緯度B，又从点K引一切綫与x軸所組成的角度为$90°+B$，按微分学知；

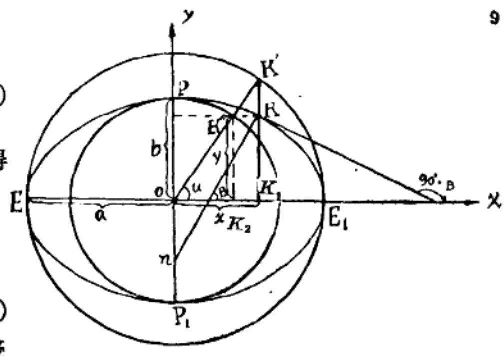

图 10-7

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(90°+B)=-\operatorname{ctg}B \qquad (10\text{-}3\text{-}3)$$

由(10-3-2)及(10-3-3)两式得

$$\frac{a}{b}\operatorname{tg}u=\operatorname{tg}B \qquad (10\text{-}3\text{-}4)$$

将$b=a\sqrt{1-e^2}$代入上式可得u及B的关系式：

$$\operatorname{tg}u=\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}B \qquad (10\text{-}3\text{-}5)$$

u及B的关系式亦可写为下列形成：

利用式(10-3-5)得：

$$\left.\begin{aligned} \cos u &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}=\frac{1}{\sqrt{1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2 B}}=\frac{\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \\ \sin u &= \frac{\operatorname{tg}u}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}=\frac{\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}B}{\sqrt{1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2 B}}=\frac{\sqrt{1-e^2}\sin B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}3\text{-}6)$$

应用下列符号：$\eta^2=e'^2\cos^2 B$

$$\left.\begin{aligned} W &= \sqrt{1-e^2\sin^2 B} \\ V &= \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}=\sqrt{1+\eta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}3\text{-}7)$$

则 $$\frac{W^2}{1-e^2}=\frac{1-e^2\sin^2 B}{1-e^2}=1+e'^2-e'^2\sin^2 B=1+e'^2\cos^2 B=V^2$$

或 $$W^2=V^2(1-e^2)=\frac{V^2}{1+e'^2} \qquad (10\text{-}3\text{-}8)$$

应用(10-3-7)及(10-3-8)两式，则式(10-3-6)可写为下列两种形式：

$$\left.\begin{aligned}\cos u&=\frac{\cos B}{W}\\ \sin u&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{W}\sin B\end{aligned}\right\}\tag{10-3-9}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos B&=V\sqrt{1-e^2}\cos u\\ \sin B&=V\sin u\end{aligned}\right\}\tag{10-3-10}$$

因e^2为微小量，由式(10-3-5)可看出，大地緯度与归化緯度間的差别是很小的，且$B>u$，为了在实际应用中方便起見，下面导出差数$B-u$的公式，根据这些公式我們可以直接由B求u或由u求B。

（1）求$B-u$为B的函数式

因 $\mathrm{tg}(B-u)=\dfrac{\mathrm{tg}B-\mathrm{tg}u}{1+\mathrm{tg}B\,\mathrm{tg}u}$

以式(10-3-5)代入上式得

$$\mathrm{tg}(B-u)=\frac{\mathrm{tg}B(1-\sqrt{1-e^2})}{1+\mathrm{tg}^2B\sqrt{1-e^2}}\tag{10-3-11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{按}\ n=\frac{a-b}{a+b},\quad \frac{1-n}{1+n}=\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\\ &\alpha=1-\frac{b}{a}=1-\sqrt{1-e^2}=\frac{2n}{1+n}\end{aligned}\right\}\tag{10-3-12}$$

以式(10-3-12)代入式(10-3-11)中并加以簡化后得：

$$\mathrm{tg}\,(B-u)=\frac{n\sin 2B}{1+n\cos 2B}$$

利用 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2\cdots\cdots$ 把上式化为級数式，

$\mathrm{tg}\,(B-u)=n\sin 2B-n^2\sin 2B\cos 2B+n^3\sin 2B\cos^2 2B-\cdots\cdots$

又根据 $x=\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{3}\mathrm{tg}^3x+\cdots\cdots$ 可將上式变为下列形式：

$$B-u=n\sin 2B-\frac{n^2}{2}\sin 4B+\frac{n^3}{3}\sin 6B-\cdots\cdots\tag*{(10-3-13)$_1$}$$

对于克拉索夫斯基橢圓体我們得到由已知B計算u的公式为：

$$(B-u)''=346''.3143\sin 2B-0''.2907\sin 4B+0''.0003\sin 6B-\cdots\cdots\tag*{(10-3-13)$_2$}$$

（2）求$B-u$为u的函数式

用上面同样的方法可以导出已知u計算B的公式为：

$$B-u=n\sin 2u+\frac{n^2}{2}\sin 4u+\frac{n^3}{3}\sin 6u+\cdots\cdots\tag*{(10-3-14)$_1$}$$

对于克拉索夫斯基橢圓体則有下面的公式

$$(B-u)''=346''.3143\sin 2u+0''.2907\sin 4u+0''.0003\sin 6u+\cdots\cdots\tag*{(10-3-14)$_2$}$$

2. 大地緯度B与地心緯度Φ的关系

由圖10-5可以看出，直角坐标 x、y 与地心緯度的关系式为：

$$\operatorname{tg}\Phi=\frac{y}{x} \tag{10-3-15}$$

而由式(10-3-1)知 $\frac{y}{x}=\frac{b\sin u}{a\cos u}=\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}u$ (10-3-16)

將式(10-3-5)代入上式得：$\operatorname{tg}\Phi=(1-e^2)\operatorname{tg}B$ (10-3-17)

以下导出差数$(B-\Phi)$的公式 应用式(10-3-17)则得：

$$\operatorname{tg}(B-\Phi)=\frac{\operatorname{tg}B-\operatorname{tg}\Phi}{1+\operatorname{tg}B\operatorname{tg}\Phi}=\frac{e^2\operatorname{tg}B}{1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2B}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{按 } m=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\qquad \frac{1-m}{1+m}=\frac{b^2}{a^2}=1-e^2\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad e^2=\frac{2m}{1+m}\end{aligned}\right\} \tag{10-3-18}$$

故 $\operatorname{tg}(B-\Phi)=\dfrac{2m\operatorname{tg}B}{(1+m)+(1-m)\operatorname{tg}^2B}$

或 $\operatorname{tg}(B-\Phi)=\dfrac{m\sin 2B}{1+m\cos 2B}$ (10-3-19)

利用上式，按照上面导出差数$(B-u)$的相同方法可求得差数$(B-\Phi)$的公式：

$$B-\Phi=m\sin 2B-\frac{m^2}{2}\sin 4B+\frac{m^3}{3}\sin 6B-\cdots\cdots \tag{10-3-20}$$

3. 子午面上的直角坐标 x,y 与大地緯度 B 間的关系

由式(10-3-1)知

$$x=a\cos u$$

$$y=b\sin u$$

以式(10-3-9)代入上式

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{a\cos B}{W}\\ y&=\frac{b\sqrt{1-e^2}}{W}\sin B\end{aligned}\right\} \tag{10-3-21}$$

或以式(10-3-8)代入式(10-3-21)并顧及式(10-1-10)的关系

则得

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{c\cos B}{V}\\ y&=\frac{c\sin B}{V(1+e'^2)}\end{aligned}\right\} \tag{10-3-22}$$

由圖 10-3 知道过点 K 具有緯度 B 的平行圈半徑为：

$$r=x=\frac{a\cos B}{W}=\frac{c\cos B}{V} \tag{10-3-23}$$

4. 在同一子午面上的直角坐标 x、y 与地心緯度 Φ 间之关系和向径公式

由图10-5可看出：
$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\Phi \\ y &= \rho\sin\Phi \end{aligned}\right\} \tag{10-3-24}$$

上式中 ρ 为向径。

代入子午椭圆的方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

中則得
$$\frac{\rho^2\cos^2\Phi}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\Phi}{a^2(1-e^2)}=1$$

由上式解出 ρ：
$$\frac{\rho^2}{a^2(1-e^2)}[\cos^2\Phi(1-e^2)+\sin^2\Phi]=1$$

由此得 $\rho=\dfrac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}}$

按式（10-3-24）則有
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\sqrt{1-e^2}\cos\Phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}} \\ y &= \frac{a\sqrt{1-e^2}\sin\Phi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\Phi}} \end{aligned}\right\} \tag{10-3-25}$$

以大地緯度表示的向径公式可利用式（10-3-21）求得之：
$$\rho^2=x^2+y^2=\frac{a\cos^2B}{1-e^2\sin^2B}+\frac{a^2(1-e^2)^2\sin^2B}{1-e^2\sin^2B}=\frac{a^2[1+e^2(e^2-2)\sin^2B]}{1-e^2\sin^2B}$$

由上式解出 ρ 并保持 e^4 项，加以变化后，得最后形式
$$\rho=a(1-\frac{e^2}{2}\sin^2B+\frac{e^4}{2}\sin^2B-\frac{5}{8}e^4\sin^4B \tag{10-3-26}$$

5. 空间直角坐标 X,Y,Z 与其他坐标系统间的关系

图10-8中 P_1R_1PR 为起始子午面，在此平面上設置 OX 軸，而 Ox 及 Oy 軸則設在通过点 K 的子午面内，L 为点 K 的大地經度。从图中可看出

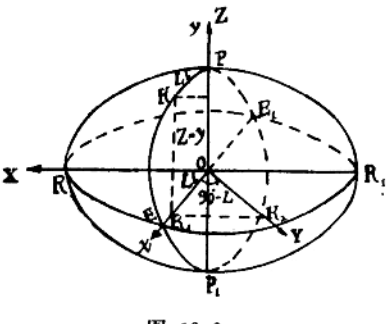

图 10-8

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos L \\ Y &= x\sin L \\ Z &= y \\ x &= \sqrt{X^2+Y^2} \end{aligned}\right\} \tag{10-3-27}$$

又根据上式及式（10-3-1）可得
$$\left.\begin{aligned} X &= a\cos u\cos L \\ Y &= a\cos u\sin L \\ Z &= b\sin u=a\sqrt{1-e^2}\sin u \end{aligned}\right\} \tag{10-3-28}$$

并由(10-3-27)及(10-3-21)兩式可得

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a\cos B}{W}\cos L \\ Y &= \frac{a\cos B}{W}\sin L \\ Z &= \frac{a(1-e^2)\sin B}{W} \end{aligned}\right\} \tag{10-3-29}$$

§ 10-4 橢圓体面上各种曲率半徑

通过橢圓体面的法綫可作無穷数量的平面，这些平面称为法截面，在某一点上所作法截面与橢圓体表面所截的弧綫称为法截弧。除兩極外，橢圓体面的一点上沿着不同方向的法截弧，其曲率半徑各不相等。在不同的情况下我們应用不同的曲率半徑解决各种問題。

1. 橢圓体面上某一点的主曲率半徑

通过橢圓体面上一点 K，可以作出兩个互相垂直的法截弧，如果它們的曲率半徑具有極大及極小値，則这兩法截弧称为主法截弧。点 K 的主法截弧是 1) 子午圈，它为通过点 K 及橢圓体的兩極 P 和 P_1 的法截弧，圖 10-9 內用 PKE_1PE 表示。2)卯酉圈是經过点 K 并垂直于通过点 K 的子午圈，圖 10-9 內曲綫 WKE 表示卯酉圈，它也是橢圓曲綫。

以 M 及 N 分別表示子午圈和卯酉圈的曲率半徑，下面我們將导出它們的公式：

(1)子午圈的曲率半徑

为了求子午圈的曲率半徑公式，根据微分学知：平面曲綫的曲率半徑公式为：

$$M = \frac{-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \tag{10-4-1}$$

因为上式中 $\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故在式的右方采用負号。

从式 (10-3-3) 知 $\quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}B \quad$ (10-4-2)

上式向 x 再取一次导数得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B}\cdot\frac{dB}{dx} \tag{10-4-3}$$

求 $\frac{dB}{dx}$ 时可利用式 (10-3-21)

$$x = \frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} = a\cos B(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}$$

取微分得出

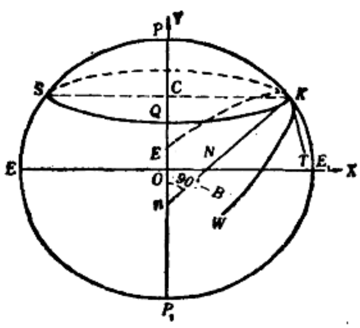

圖 10-9

$$dx=a\{-\sin B\,(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{1}{2}}+e^2\sin B\cos^2 B(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}\}\,dB$$

由此得 $\frac{dx}{dB}=a\sin B(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}\{-(1-e^2\sin^2 B)+e^2\cos^2 B\}$

$$=-a\sin B(1-e^2\sin^2 B)^{-\frac{3}{2}}(1-e^2)$$

將上式代入式（10-4-3）則得：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}{a\sin^3 B(1-e^2)} \tag{10-4-4}$$

以（10-4-2）及（10-4-4）兩式代入式（10-4-1）中最后得出

$$M=\frac{(1+\mathrm{ctg}^2 B)^{3/2}a\sin^3 B(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}=\frac{a(1-e^2)}{W^3} \tag{10-4-5}$$

当 B 从 $0°$ 变到 $90°$ 时，M 漸漸增加。在兩極处 $B=90°$，此时以 c 代表兩極的曲率半徑，則由式（10-4-5）可以看出

$$c=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2)^{3/2}}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}=\frac{a^2}{b} \tag{10-4-6}$$

利用式（10-3-8）則式（10-4-5）亦可写为下列形式：

$$M=\frac{a(1-e^2)}{V^3(1-e^2)^{3/2}}=\frac{a}{V^3(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{c}{V^3} \tag{10-4-7}$$

（2）卯酉圈曲率半徑

圖 10-9 中，WKE 为通过点 K 的卯酉圈，为了确定点 K 上的卯酉圈曲率半徑，可通过点 K 作一切綫 KT 与以 C 为中心的平行圈 KQS 相切，这个切綫是在垂直于子午面的平行圈平面內。因卯酉圈平面亦与子午面垂直，且切綫 KT 与橢圓体面的法綫 Kn 垂直，故 KT 同时又为卯酉圈的切綫。換句話說 KT 是平行圈 KQS（斜截弧）及卯酉圈 EKW（法截弧）的公共切綫。

根据麦尼尔定理：假若通过曲面上一点引兩条截弧，一为法截弧，一为斜截弧，且在該点上这兩条截弧具有一公共切綫，則斜截弧的曲率半徑等于法截弧的曲率半徑乘以兩截弧平面間夾角的余弦。

从圖 10-9 中可以看出，这兩截弧平面間的夾角 CKn 等于大地緯度 B，所以平行圈的半徑 r 可用卯酉圈曲率半徑 N 按下式决定：

$$r=N\cos B=\overline{KC}$$

顧及平行圈半徑公式（10-3-23）：

$$r=\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{10-4-8}$$

可以得出

$$N=\frac{r}{\cos B}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}=\frac{a}{W} \qquad (10\text{-}4\text{-}9)_1$$

或

$$N=\frac{a}{W}=\frac{a}{V\sqrt{1-e^2}}=\frac{c}{V} \qquad (10\text{-}4\text{-}9)_2$$

由圖 10-9 知

$$\overline{Kn}=\frac{\overline{KC}}{\cos B}=N$$

这就是說，法綫的綫段 Kn 的長度等于卯酉圈的曲率半徑，換句話說卯酉圈的曲率中心是在橢圓体旋轉軸上。

从（10-4-7）与（10-4-9）$_2$ 兩式得：

$$\frac{N}{M}=V^2=1+\eta^2 \qquad (10\text{-}4\text{-}10)$$

因此，我們看出

$$N\geqslant M$$

在实际的計算中經常用下列 $\frac{\rho''}{M}$ 及 $\frac{\rho''}{N}$ 兩个量，这兩个量用符号(1)及(2)表示之，就是

$$\frac{\rho''}{M}=(1) \quad 及 \quad \frac{\rho''}{N}=(2) \qquad (10\text{-}4\text{-}11)$$

它們的对数可以从"大地坐标計算用表"（測繪出版社 1957 年出版）內以緯度 B 为引数查得。

2. 任意法截弧的曲率半徑

巳知曲而上某一点的主曲率半徑，应用下面的尤拉公式就可以求出該点上具有任意方位角法截弧曲率半徑：

$$\frac{1}{R_A}=\frac{\cos^2 A}{M}+\frac{\sin^2 A}{N}, \qquad (10\text{-}4\text{-}12)$$

式中 R_A 是为具有方位角 A 的法截弧曲率半徑，M 为子午圈的曲率半徑，N 为卯酉圈的曲率半徑。

式（10-4-12）可改写为

$$R_A=\frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A} \qquad (10\text{-}4\text{-}13)$$

上式分子和分母各除以 M，并顧及式（10-4-10）的关系則上式写为：

$$R_A=\frac{N}{\frac{N}{M}\cos^2 A+\sin^2 A}=\frac{N}{1+\eta^2\cos^2 A}$$

把上式展开成級数得：

$$R_A = N(1-\eta^2\cos^2 A+\eta^4\cos^4 A-\eta^6\cos^6 A+\cdots\cdots) \qquad (10\text{-}4\text{-}14)$$

如果在式（10-4-14）中的 N 以下式（該式的証明見后面式（10-4-17））

$$N = RV = R\sqrt{1+\eta^2} \cong R\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right) \qquad (10\text{-}4\text{-}15)$$

代入并舍去含有 η^4 的各項，則得

$$R_A = R\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right)(1-\eta^2\cos^2 A) = R\left\{1-\frac{1}{2}\eta^2(2\cos^2 A-1)\right\}$$

$$= R\left\{1-\frac{1}{2}e'^2\cos^2 B\cos 2A\right\} \qquad (10\text{-}4\text{-}16)$$

式中 R 为平均曲率半徑（定义見后）。当基綫長度归算到橢圓体面上时，可应用（10-4-16）式求出所需要的曲率半徑。在“一、二等基綫測量細則”（測繪出版社 1958 年出版）內載有任意法截弧曲率半徑的数字表。

3. 平均曲率半徑

通过曲面上某一点的一切法截弧，当其数目趋于無穷时，它們的曲率半徑的算术平均值之極限，就是該点的平均曲率半徑。

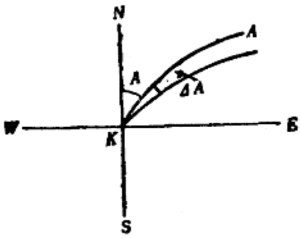

圖 10-10

圖 10-10 中以直綫 NKS 表示通过橢圓体面上点 K 的子午圈，并以 WKE 表示卯酉圈，設曲綫 KA 表示通过点 K 的任意一个法截弧，該法截弧与子午圈所夹的角度为 A，也就是 KA 的方位角。

公式（10-4-13）可确定任意法截弧的曲率半徑 R_A 与子午圈曲率半徑及卯酉圈曲率半徑之間的关系，即

$$R_A = \frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A}$$

我們設想，方位角 A 依次具有下列各值：

$$0、\Delta A、2\Delta A、3\Delta A，\cdots\cdots，2\pi-2\Delta A，2\pi-\Delta A.$$

此处 ΔA 为微小量，ΔA 的个数等于 $\frac{2\pi}{\Delta A}$。今以 R_1 表示通过点 K 上各相隔 ΔA 角度的一切法截弧的曲率半徑之算术平均值，则

$$R_1 = \frac{\sum\limits_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A}\frac{MN}{N\cos^2 A+M\sin^2 A}}{\frac{2\pi}{\Delta A}} = \frac{\sum\limits_{A=0}^{A=2\pi-\Delta A}\frac{MN\Delta A}{N\cos^2 A+M\sin^2 A}}{2\pi}$$

以 R 表示平均曲率半徑，則按它的定义得：

$$R = \lim_{\Delta A\to 0} R_1$$

如果法截弧的数目趋近于無穷，则可用积分符号代替式中 R_1 中的 $\sum$ 符号，并以 dA 代替 ΔA，这样，就得到：