數理方法論

HÖLDER 著
鄭太朴譯

商務印書館發行

第一編

採自各方面的例

第一章　幾何的證法

§1　原有的及綜合的概念對象概念關係概念

試將幾何學者所用的概念一檢之，則可知其間有一實質上的差別。其中有許多概念，在幾何的研究上，是直卽視爲已知的。例如點，線，面，就是這一類中的概念。其他的概念，則須爲之作一定義，而就一般言之，此項定義多在舉出一種作法，俾可用之以求得此對象，於此，前一種的概念，乃被視爲已知者用之[1]。歐几里得曾爲點作一說明，說"不可分割者謂之點"，此種說法，或者有人會認爲不妥當。關於此，已曾屢次說過，這種定義是不充分的，因爲不能分割的對象尙多，不僅此項點而已，而且尤要者，則歐氏雖作此定義，但卻從未在其論證法內用過。其他類似的定義，亦多如此。因之，輓近來對於幾何學上之基本概念，已不再作其

附註：(1) K. Ziudler 氏將前一種概念，稱爲"自理的概念" ("axiomatische Begriffe")，見 Sitzungsber. d. phil.-hist. Kl. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Wien, Bd. 118, 1889. IX, 第 55 頁。

定義，而將其作爲已知者用之。

上述的概念，可稱爲對象概念，係已有者，除此而外，尙有其他同樣爲已知的概念，用以表出幾何圖形相互間所有之屬性或"關係"者。例如說"A 點在 b 線上"，或"b 線經過 A 點"，或"b 線與　點之位置相聯合"，此語中所含之義，實無法爲之作一定義。又如某一點在一平面上之位置，某一點在二點之連結線中之位置，其所有意義亦是如此，祇能視爲已知的關係。

二線段之相等以及二角之相等，亦爲如是一種關係。於此，吾人卽可說明，在敍述時吾人將線段視爲幾何學上之特殊對象而用入之，或不如此(於是吾人可不說相等之線段，而須說等値的點之對)均無不可，其間之差別甚小。倘用後者之說法，則 A, B 二點所成的點之對，與 A', B' 所成的點之對，其間之等値性，爲四點間之關係。於此，吾人須注意，二線段間之相等性，與二角間之相等性是不一樣的，至於二不同形的平面形間之面積上的相等，則其概念在完全發展的幾何學看來，卽不能再視爲原有的概念(參觀 § 26)。

非爲原有的概念，其例亦易舉，如引言中所已提及過的平方是。對於平方形，吾人可如是作其定義，卽，平方形是一四角形，其邊均相等，其角均爲直角。在這個定義內，吾人必須先有四角形之概念，或如較廣，則須先有多角形之概念，且除此而外，此定義亦不能使吾人正確知道，其中所要求的屬性，是否彼此間不致有矛盾。因之，吾人必須將平方形作出，同時卽可證明其存在。於是吾人可由一線段 AB 生發(見圖 1)，於其二端作二相

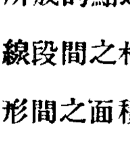

圖 1

等之線段AD及BC,在直角的角度下,而按幾何學上之自理,這是可能的;然後再將C與D連結之。這樣,吾人自須證明CD線段與其他三線段相等,且C與D處之角是直角。按之歐氏幾何學上之自理,這是可以證明的,今姑從略。

仿此,幾何學上每一較複雜的概念可用一作法以爲其定義,是卽用一列動作以決定之,至於此列動作,則自須以自理爲根據,知其可以從事者。此項概念,著者將其與原有的概念相對立,借康德所常用的名詞(但其意義稍有不同),稱之爲綜合的概念[1](synthetische Begriffe)。自然,除此而外,亦尙有綜合的關係概念,例如某一種平面圖形之屬性,用射影法得自其他一圖形者。

如將幾何學之全部系統加以改動,則向來所視爲原有概念者,或亦可轉處於綜合概念之列;關於此,容於以後再論之。

§2. 自理——存在的自理

除以上所論的原有概念而外,幾何學上還有若干一般性質的事實,某種基本定理或規律,亦須先視爲已知者。此項基本定理,無法再加以證明,一般稱之爲自理。歐几里得曾將基本定理分爲二類,其一類名爲αἰτήματα,其他一類則名爲κοιναὶ ἔννοιαι,後者在Proklus方面則稱爲ἀξιώματα。至於今日,此二類間之差別,已不再保存之,但有須說明者,則非歐幾何學上所不取之基本定理,是在前一類中的。

在某種意義上,吾人可以說,幾何學上之全部事實內容,均已"含"

附註:(1)在前引之就任演詞中,著者曾將此項概念稱爲"構造出來"的概念。

於自理中，因爲吾人可用自理，將其他一切論理的推論得之[1]。萊伯尼茲曾謂對於幾何圖形予以適當的定義時，可不須用自理。在這一點上，專從事於亞里士多德（Aristotel）學說的孔林(Conring)氏，實較萊伯尼茲的見解爲深，因爲他在致萊伯尼茲的信中，曾提及自理之不能證明以及其不可少[2]。關於萊氏的思想，以及其他的企圖，想證明歐几里得氏之基本定理者，以後再當論之[3]。

自理之例，試舉數者如下：經過兩個不同的點，恆可作一直線，亦祇可作一直線；一直線上兩個不同的點落在一平面內，則此直線全部均在平面內，是卽直線上之每一點均在平面內；倘三點不在一直線上，則經過此三點恆可作一平面，亦僅可作一平面。希爾伯氏稱此項基本定理爲"聯結的自理"[4]。

一點在二點間之位置，在某項自理內亦爲主要的關係概念，惟此項自理直至輓近始爲人所注及，以前向來是用而不知的。例如有三個不同的點在一直線上，則有一點在二點之間，亦僅有一點在二點之間[5]。又如 A 與 C 爲二個不同之點，則按其他一自理，至少有一點 B，在 A 與 C 之

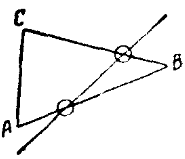

圖 2

附註 (1) 同樣的事實內容，用其他方法以構成之，這當然是可以的。參觀 §46。

(2) 參觀 L. Couturat 著 La Logique de Leibniz d'après des documents inédits 1901, 第 186 頁中所引萊伯尼茲致孔林氏之信，其時間爲 1678 年三月十九日。

(3) 參觀 §15 及 46.

(4) 見其所著"幾何學原理"(Grundlagen der Geometrie, 1899, 第 5 頁)。

(5) 當然，"在其間"之概念須如是設想的，卽，"在 A 與 B 之間"，與"在 B 與 A 之間"，其意義是相同的。

間，且至少有一點 D，使 C 在 A 與 D 之間[1]。這一類的自理，希爾伯稱之爲"次序的自理"，首先爲帕緜氏所提出的[2]。所謂"次序之平面的自理"，亦係帕緜氏所提出，其內容如下(參觀圖 2)：

設 A, B, C 爲三點，不在一直線內，倘有一直線，不經過此三點中之任何一點，但含有一點在 A 與 B 之間，則此直線並含有一點在 A 與 C 之間或 B 與 C 之間。

歐几里得之基本定理，倘有二量均與一第三者相等，則此二量彼此間亦相等，今僅於線段及角方面用爲自理，其與此相當的事實，例如不同形的平面形之面積相等，今都視爲綜合的概念，可以證明之。此項用於線段及角的基本定理，可視爲相合自理，蓋其所及之相等性可以相合的幾何圖形說明之。因之，此基本定理與所謂相合定理中所含之事實，係相關者。按之第一條相合定理，倘二三角形之二邊及其中間所夾之角均相合，則其他者亦必相合。歐几里得曾以如是之法證明之，即將其一三角形移動之，使其與其他三角形相合，但在這裏，我們不能忘卻，此定理中實已先假定了一種方法，將二三角形之各部分兩兩相對，再由此以知其相合。但此種證法中所用的移動，則無法論理的構造出之，而係得之觀念，或得之剛體運動方面所得的經驗，因爲所移動的三角形，吾人須假定其不能變動，僅可移動及旋轉，因而須設想其爲一剛體。從可知這裏有一個事實，雖在論理的論證上可作爲前提應用之，但其本身則並非爲論理論證之結果。倘欲較精密，則可仿希爾伯氏之法[3]，將第一相

附註：(1) 見希爾伯氏之"幾何學原理"，第三版，1909，第 5 頁。

(2) 見其 Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882, 第 5 頁以下。

(3) 見"幾何學原理"(1899 年版)第 12 頁。

合定理之一部分，卽二三角形之其餘二角相合，當作爲“相合自理”用之，於是第一相合定理之其他的內容，以及其他的相合定理，卽不難證明之[1]。

此外，尙有幾條簡單的相合自理須一述之，此中之關於線段相等及線段截取者如下：

I. 由 $MN=M'N'$ 以及 $M'N'=M''N''$，可得 $MN=M''N''$[2]。

II. 設有一線段 MN 及直線 a 上之一點 A 爲已知，則此直線 a 上有二點 B 與 B'，能 $AB=AB'=MN$；於此，A 在 B 與 B' 之間。

III. 倘 B 在 A 與 C 之間，同時，在同一直線或其他一直線上 B' 在 A' 與 C' 之間，則由 $AB=A'B'$，$BC=B'C'$，可得 $AC=A'C'$（見圖 3）。

一點旁邊的角，以及此項角之作法方面，亦有相似的關係。此項關係亦須作爲自理用之。

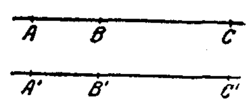

圖 3

平行線自理須在下節內論之，連續自理則須於後面 §29 中用入並討論之，故在這裏，祇能將上述的自理簡單一論。第一先須指出者，則自理恆祇能以原有的概念，卽基本概念爲根據，卻不能用綜合的概念，因爲綜合的概念須在幾何學中用構造法纔能確定的。同時，吾人亦易知道，一自理中所述者，大概在指出某種（對象的基本概念下之）個體間，卽某種幾何的“元素”間如有某種關係存在，則

附註：(1) 試加一精密之考察，則可知歐几里得對於現在所稱之第二相合定理，實已有證明。參觀歐氏幾何原本第一卷二十六之第 63 頁。

(2) 每一線段與其本身相等，且與方向無關，這是當作自明之理的。因之，$AB=AB$，$AB=BA$，於 §19 中亦將用之。

此項元素間必尙有其他的關係存在，且在某種狀況下，在其他新元素間亦尙有其他的關係存在(例如以上所舉之自理 III)。但在自理中，亦有能確定某一元素之存在者，此元素與已知的元素間則有一定之關係；同時，或亦可有一自理，能否定一元素，因而某項關係上所要求之元素，經此自理而知其不存在。在後者之事例方面，自理可證明該項關係間之“不能相容”，而由自理可推知二元素之不同，其一係爲某種關係所決定，其他則爲他一種關係所決定。如前述的次序自理中之第二者，可使吾人知道二個不同的點 A 與 C 之間，至少有一點 B 存在，而由其中之第一自理，則可知不能有第三點 B, 能同時使 B 在 A 與 C 間，又使 C 在 A 與 B 間。故如吾人用一種作法，於 A, C 二點外再作一點 B, 證明其在 A 與 C 之間，另再作一點 B', 使 C 確在 A 與 B' 之間，則 B 與 B 二點定必不相同。

哲學家中，往往有持此見解者，以爲數學上不能談到“存在”的問題，故在數學中，“可能”的概念當與“存在”的概念相同 (見那托自氏前引之書第 84 頁)。關於此，吾人須說明，數學家見有事物，與其向來的知識不相矛盾時，自可說到“可能”；但如說“存在”，則所指者與此又不同，且更爲確定，故“存在”這一語在數學上是不可少的。當然，數學上的所謂存在，與自然界中的所謂存在，其間自有差別的[(1)]。

§3. 平行線自理

附註：(1) 數學上之存在定理，Ziudler 氏曾特指出之。穆勒 (J. St. Mill) 於其所著論理學中亦曾提及。曼農氏則曾提出“成立”(Bestehen)一語，以代替這一類的存在。

特有興味者是平行線自理。歐儿里得之平行線定義是如此的，卽，平行線爲同在一平面內之線，無論將其如何延長，終不能相遇。因之，倘欲於 A 點及 b 線所決定的平面內，經過 A 作一線不與 b 相交，則可於 b 上任取一點 B，作 AB 連結線。於平面內經過 B 作一線

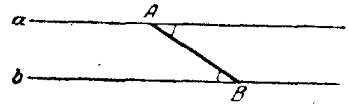

圖 4

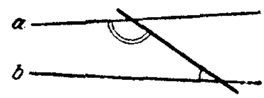

圖 5

a，使圖 4 中所畫出的內交角相等。如是則 a 與 b 之不相交，不難根據上述三類中之自理以證明之（參觀歐氏幾何原本卷一之二十七第 67 頁，以及十六之 43 頁。並參閱希爾伯幾何學原理第一版第 22 頁）。

按歐儿里得之平行線自理，二線 a, b 與一第三線相交時，倘此線一邊之內角（見圖 5），其和小於二直角，則二線卽於該面相交，故不能爲平行線。然如圖 4 中，則 AB 之任何一邊，其二內角之和均等於二直角，非如圖 5 中那樣，其一邊的內角之和小於二直角，他邊者則大於二直角，故按歐氏之平行線自理，圖 4 中之 a 線，實爲與 b 相平行而經過 A 的唯一線，至於構造時 b 上所取之點 B 爲任取者，那是無關的。因之，該自理可如是表出之，卽，經過一已知點，不能對於一已知線有二不同之平行線。

在研究自理間之獨立性時（§43），每次可將某一類的自理暫且放棄，以觀察其他自理之能否存在。而如欲將相合自理除去，則平行線自理須如是表出之：

經過一已知點，對於一已知線有一平行線，亦僅有一平行線。

如是則上項說法之第一部分卽無法證明。

與歐几里得之幾何學不同者，有陸巴乞夫斯基（Lobatschefskij）氏之非歐幾何學[(1)]，其中假定，在 b 線及 b 線外 A 點所決定之平面內，有經過 A 點的二線 CAC' 及 DAD'（見圖 6），凡經過 A 點之線，倘在 CAD 及 $C'AD'$ 二角之空間內，

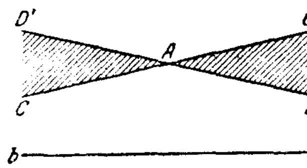

圖 6

則與 b 線相交，其他經過 A 點之線，均與 b 線不相交。至於 DAD' 及 CAC' 二線，則與 b 線亦是不相交的。此二線在圖中構成有條紋的角空間之界，亦即爲不與 b 線相交的線所占空間之界，陸氏稱之爲經過 A 點與 b 線相平行之線，至於其他經過 A 點而不與 b 線相交的線，則不稱爲平行線。陸氏之此項假定，亦可由上面所表出的次序自理[(2)]，聯結自理以及連續性自理（§29）得之，但須假定以上所作的平行線自理，其形式是不能用的。當然，在陸氏原來的意思，以爲此項假定必會引出一個矛盾，因而對於平行線自理，可獲得一個反證。但事實上則並不如此，所得結果係一種無有矛盾的新幾何學；關於此，以後於 §43 中當再詳論之。

§4. 最簡單的論證形式三角形內三角之和等腰三角形

今試將引言中所提出之問題，任幾何學方面一詳論之，並且儘可能的用演繹法以擴充吾人的知識；如是，吾人不妨將三角形內三角之和的定理提出一論。在證明此定理時，吾人可經過三角形 ABC 之一角 A 作

附註：(1) 此即所謂“雙曲線式的幾何學”，此外尚有“橢圓式的”非歐幾何學，對於不習數學者當更覺其難解，故此處暫不論及之。

(2) 在“橢圓式的幾何學”內，次序自理之說法自又當不同。

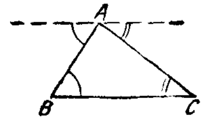

圖 7

一直線，使 AB 邊方面在所形成的新角與 B 處之角相等(見圖 7)。如是所作之線，實爲與 BC 相平行之線(參觀圖 4 內之作法)。按之歐几里得之平行線自理，此項經過 A 與 BC 相平行之線，祇有一條，故 AC 方面所形成之新角，必與 C 處之角相等。A 處所形成的二新角，與 A 處原有之角，合之共爲一平角，卽二直角，故三角形內三角之和爲二直角。

由以上所述，可知吾人必須作一線經過 A，並用該處所形成之新角，該種證法乃爲可能；蓋如此則吾人獲得了新的元素，其間有較複雜的關係，故能根據自理推知原來的圖形之元素間，有新的關係存在。因之，郭多拉 (Couturat) 氏以爲此項補助線係無關緊要之事，實不合理[1]，不過有時補助線作得太多，那自然是不必要的。以上所作的補助線之存在，實以一存在的自理爲根據，蓋按該自理，乃知角是可以作出來的。存在的定理，尤其是存在的自理之重要，於此已可見了。

試再舉一例以爲說明；吾人試證明此定理，卽，三角形內倘有二角相等，則與此二角相對之二邊亦必相等。於此，吾人可卽用第二條相合定理，作爲已知者；按此定理，則如二三角形，有一邊及其二端的二角相同，其餘之部分亦必相同。此處卽須注意者，則凡提及二三角形之相合時，此二三角形之各部分須一一相對的設想之。今設 ABC 三角形內 ABC 與 ACB 二角相等(圖 8)，則吾人對於此三角形可二次設想之，卽，一次設想其爲 ABC 三角

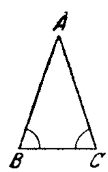

圖 8

附註：(1) 見郭氏所著前引之書第300 及 307 頁。古時的論理學者，對於補助線之意義，已曾提及。參觀 Sigwart, Logik, Bd. 2, 1893, 第 275 及 280 頁。

形，又一次設想其爲 ACB 三角形；如是則 A 角與 A 角相當，第一三角形之 B 角與第二三角形之 C 角相當，第一三角形之 C 角與第二三角形之 B 角相當。在邊的方面，則第一三角形之 BC 邊與第二者之 CB 相當，其二端之角亦相當相等，故第一者之 AB 邊與第二者之相當邊 AC 亦必相等，此亦卽所欲證者。

以上證法內所用之特殊的方式，將三角形 ABC 之角互換一下，視爲與其本身相合者，在歐氏原來之證法內則不如此，係用作圖法另爲之，故實在是不必要的。觀此，可知該證法不以補助線爲依據，而以角之互換及對置爲其方法。

§5. 非歐幾何學上之例

今當由陸氏之非歐幾何學上採取一例。設 A 爲不在 b 線上之一點，今經過 A 及 DAD' 作 CAC' 線，與 b 相平行（見圖 9）。如圖，吾人可假定此二平行線並非相合者。在此種幾何學內，吾人可證明任何三角形內三角之和小於二直角，但其證今姑從略。今由 A 出發，作一垂線至 b，而

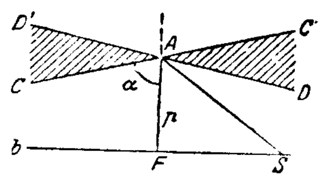

圖 9

按此處所從事之幾何學，此係可能者，惟其詳今亦從略。設 F 爲垂線之足點，吾人並將字母符號如是佈置，如圖中所示那樣，使 D 在 CC' 之 b 的一面，C 在 DD' 之 b 的一面，則由 A 出發的直線，不與 b 相交者，均在 DAC' 及 CAD' 角內，卽圖中畫有斜紋之角內。用 α 以表出的角 CAF，稱爲平行線角，DAF 角係與之相等者。此角在圖內共發現四次，吾人

並可見 α 之二倍與一個有斜紋的角相合，共爲二個直角。因之，平行線角 α 小於一直角。

今設有一第二線 b_1 以及一點 A_1，不在 b_1 上，此線亦不必在上述之平面內（見圖 10）。由 A_1 至 b_1 之垂線爲 A_1F_1，等於圖 9 中所作之垂線 AF。倘有一線經過 A_1 與 b_1 相交於 S_1，則在其他之圖中可於 b 上決定一點 S，使 $FS=F_1S_1$。於是二平面(圖)內之三角形 AFS 及 $A_1F_1S_1$，其 AF，A_1F_1 二邊係相合者，FS 與 F_1S_1 亦相合，其二直角自亦相合，故按此處所亦適用的第一相合定理，FAS 與 $F_1A_1S_1$ 二角亦必相合。故如經過 A_1 的直線與 b_1 相交於 S_1，則在 A 與 b 所決定的平面內，其相當的線亦與 b 相交。於此，這二個圖所處的地位不妨相易，故其一平面內經過 A_1 所作之線倘與垂線 A_1F_1 構成一角，與 b_1 相交或不相交，則其他平面內經過 A 與垂線成同樣的角之線，亦與 b 相交或不相交。從可知倘經過 A_1 作平行線與 b_1 相平行，則此項平行線本身間及與 A_1F_1 所作之角，必與 A 方面者相同。又因 S 在 b 上可在 F 之任何一面，S_1 在 b_1 上可在 F_1 之任何一面，故並可推知其他的情形，例如 DAF 及 CAF 二角係相等者，此則全已先用及之矣。

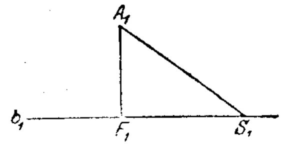

圖 10

以上所得之結果，亦可如是表出之，即，平行線角 α 僅與 A 與 b 間之距離 $p=AF$ 相關(圖 9)，至於 A 及 b 在空間中之位置如何，此則無關者。倘得幾何學上之一切自理（連續自理亦在內）就其尋常的形式保存之，但將歐氏的平行線自理除外，對此問題作一詳細之研究，則可知距離 p 增加時，平行線角 α 即減小，p 減小至無限小時，α 可與直角

無限的接近，而如 p 無限的增加，則 α 無限的向 O 減小。此外則 α 與 p 間之相關，係連續的，故如 p 遍取 O 至無限大之一切值，則 α 遍取 90° 至 0° 間之一切值[(1)]。

試將距離 p_0 畫出，其所屬之角如爲 α_0，決定於如次之方程：

$$\bar{y}\,\frac{\alpha_0}{2}=\frac{1}{e},$$

則對於任何距離 p 及其所屬之角 α，普遍的適用下式：

$$\bar{y}\,\frac{\alpha}{2}=e^{-\frac{p}{p_0}},$$

於此，e 爲大家所知的無理數：

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$=2.71828\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於是吾人亦卽可以明白，例如在陸氏幾何學內，產生 45° 的平行線角之距離，其作用與產生 60° 者是完全不同的。今設此二種長爲 p_1 及 p_2，試於其一端各作一垂線，於其他端則作與之相平行的二平行線，則卽得二圖形，其中一圖形完全爲 p_1 所決定，其他一圖形則完全爲 p_2 所決定（圖 11）。此二圖之角是不同的，故由此，吾人已可看到，在非歐幾何學內，吾人不能以同樣的角度（在其

圖 11

附註：(1) 陸氏幾何學內表示平行線角與距離間之關係的公式，亦不難得之。此對於不習數學者或不易解，但如吾人一考慮，如 §23 中那樣將線段無限止的分成爲相等之段，以及用無限止可以反復使用的考察，以得一種一般的度量關係，則卽不難明白了。

他的事例方面，並以同樣的長短比例），但不同樣的度量，將一圖形重復作出之。從可知在這裏，圖形相似的定律是不能用的。

在非歐幾何學之論證方面，新用入的補助元素之重要，亦卽存在的自理（使新元素得有根據）之重要，吾人亦不難知之。例如圖 9 內吾人曾用及此狀況，卽，在 b 上可作線段 $FS=F_1S_1$，此亦卽說，有二點存在，在 b 上 F 之二面，與 F 相距 F_1S_1。

§6. 此項論證法之實質

前於 §4 及 §5 內已述及，在幾何的論證法方面，常須用入補助元素，故就某種意義上言之，論證法實有轉彎迂迴之感。在原有的元素間，確定進一步的關係，新元素於此所占的地位，洛克氏亦已見及之，故對於三角形內三角之和的證法，洛克曾經說過："在此種事例方面，靈性極願求得與三角形內三角相等之角，及既知其等於二直角，則卽知三角形內之三角亦等於二直角"。

最初用入的補助元素，按之存在的自理，必為原有的元素所決定，以後則可根據先已用入的元素，再得到新的元素。因之，"補助的作法"，多自然的分解成為一列演作，其中每一個均以在其前的一個為根據，但好多的列亦可相並等等。由原有的關係以及用入新元素後所得的關係，根據自理，可推知新的關係。存在的自理既允許我們用入任何多的新元素，故此種方法不妨向各方面任意的推演出去。但就一般說來，吾人如不將上述的一般方法以一種方式實施之，則此項關係，亦卽無法先見到。

由上所述，可知數學的推論法，一般說來，並不是尋常論理學所論而可推溯至於亞里士多德的三段論法之形式。因之，吾人並不是這樣的推論的：一切 A 屬的幾何形體同時為 B 屬者，而為 B 屬者同時則均為 C 屬者，故一切 A 屬的幾何形體亦均為 C 屬者，或即是，A 屬含於 C 屬內或附於 C 屬下。數學的推論法，在推知某項元素間有某項關係存在，此項元素或其他元素間，必尚有其他的關係存在等等。於此，自理係吾人之規律，根據之以進行推論，而凡不用以確定存在的自理，則其作用恆在肯定，如有(1) 某種關係成立，則必有其他的關係可以適用(§2)。

將數學的論證法，牽強附入學校中所授的三段論法之形式，這種企圖，亦已有過多次了。例如容吉士所著之"Logica Hamburgensis"內，附有編者 Vagetius 氏之附錄一編（該書出版於 1681 年），其中討論等邊三角形之作法。如圖 12 所示，由 AB 線段出發，藉二個圓之助，先作一點 C，然後求證 ABC 三角形內之各邊均相等。按之作法，可知 $AC = AB$，$CB = AB$，故祇須再證明 $AC = CB$，而此則根據一種規律，即二線段如與一第三者均相等，則彼此間亦相等，即可知道了。Vagetius 氏即將此推論法析成為許多的三段

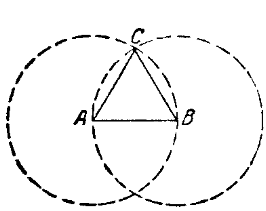

圖 12

附註：(1)此種假定的性質，在數學定理方面在在可以看到，Sigwart 之 Logik 內已指出之（見 Bd. 1, 第一版，第 410 頁）。Sigwart 於此書內並曾指出論理雛形之否拒處及關係間關係之意義。雖然這樣，他仍舊說"一切數學的定理，除自理及定義而外，均可用三段論法以明之，至少係按照決定三段形式之原則者"因之，這些話中所指之"三段論法"，其意義是指"規律之應用"或"推論"，至於三段論法之形式，則此項推論法上全然用不到，蓋其形式除學校論理學內所用者外，實無其他，此在數學上實全無用處者也。

論法[1]。後來則穆勒氏於其所著論理學內亦曾作此企圖，將三角形內二角相等則二邊亦等之歐氏證法加以說明。在穆勒的說法內，一切均以"相合"一語爲轉弄之具，故先則說明二線段之相合，再說明二角之相合，以後卽由此推論出--線段及其相接之角(很明顯的，係將其視爲可動而且硬固的形體)係與其他一線段及其相接之角相合者，而相合定理中所含之自理(此爲推論法之眞正的根據)，亦卽未加說明而默用於其中了。

因之，吾人所得的結果可如是表出之，卽，數學的推論法，不在將個體納入屬之概念或將屬之概念互相納入，而在將關係貫串起來。我們對於關係之論理學，不妨提出特殊的形式，羅素及郭多拉二氏已先從事於此了。其中最簡單的例是所謂"他動的關係" (transitive Relation)，此卽是，可適用如次之規律者：倘由 A 至 B 有此關係，由 B 至 C 亦有此關係，則由 A 至 C 亦必有此關係。例如 A 與 B 爲同種類的量，則"A 小於 B"一關係，爲他動的關係，按照此種規律，可如何構成推論的連串，這是極明白的。數學上須用他動關係之處，其例至爲多。相等關係亦是一種他動的關係，不過是對稱的，因爲 A 如等於 B，則 B 亦必等於 A。用"小於"一語表出的關係，是不對稱的。至於在論理學上，特殊的關係推論法之理論，何以不必提出，此則當於 §105 內論之。

有時候往往把代入法視爲數學推論法上之基本原則，蓋用此法，則相等者卽可用相等者代入之；至於此法之根源，則以爲在於"全同性原

附註：(1)從可知容吉士雖已注意及關係之概念，但其本身及其派系中人仍不能見到關係論理學與數學間之連繫。