大学数学学习辅导丛书

高等数学附册
学习辅导与习题选解

同济·四、五版(上下册合订本)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写，主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作教学参考。本书按《高等数学》第四、五版的章节顺序编排，与教学需求保持同步。每节（或相关的几节）包括内容要点、教学要求、释疑解难、例题增补、习题解法提要等栏目。习题解法提要对教材中较难并具有典型性的约三分之一总量的习题作出简要解答，既给学生以参考，又留有自我发挥的余地。每章末还编写了该章总习题选解。本书对教材具有相对的独立性，可作为工科和其他非数学类专业学生学习高等数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学附册学习辅导与习题选解/同济大学应用数学系编.—北京:高等教育出版社,2003.1
同济大学《高等数学》第四、五版配套教材
ISBN 7-04-011686-3

Ⅰ.高… Ⅱ.同… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 096710 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 1 月第 1 版
印　　张	21.5	印　　次	2003 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	400 000	定　　价	22.60 元

前　　言

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版(由高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书,主要面向使用该教材的学生,也可供使用该教材的教师作教学参考。

近年来我国高等教育的规模有了迅速的扩展,我国的高等教育已经从以往的精英教育向大众化教育转变。在这个过程中,无论是教育界还是社会各方面,都对高等教育的质量十分关注。我们编写这本指导书,就是为了适应这种变化的形势,满足广大工科、经济、管理类等非数学类专业的学生学习高等数学的需要,期望能对提高高等数学的教学质量,对学生掌握高等数学的教学基本要求起到一种辅助的作用。

本书按《高等数学》第四、五版的章节顺序编排,以便与教学需求保持同步。考虑到读者使用的方便,编写时注意到使这本书具有相对的独立性。在编写时,我们对应第四、五版教材的顺序逐节编写,有的地方根据需要将几节合并编写,每节(或合并的几节)包括如下几部分内容:

一、内容要点

提纲挈领地归纳本节的主要内容,至于具体的概念、定理、公式等一般不再列出,由读者自行复习回顾。

二、教学要求

主要根据原国家工科数学课程教学指导委员会制定的工科本科高等数学课程教学基本要求确定,同时也根据当前的教学实际作了少许修改。对教学要求的层次,也沿用惯例,按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

三、释疑解难

针对读者在学习本节内容时常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题,选出若干个给以分析、解答,以帮助读者释疑解难。有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高,以供一些学有余力的学生阅读参考。

四、例题增补

按照本节的教学要求,在教材原有例题和习题的基础上,适当选取少量概念性、启发性或综合性较强的例题作为补充,并作出解答和说明。

五、习题解法提要

在教材中选出较难并具有典型性的一小部分习题(约占 1/3),作出习题解

法提要,供教师、学生参考。习题解法提要中的题号就是该题在原教材该节习题中的编号。

除了逐节编写上述几部分内容以外,每一章末还编写了该章教材的总习题选解,所选的习题数量约占 1/2。

本书由同济大学应用数学系的下列五位教师编写(按编写的章节次序排列):邱伯驺(第一、八章)、徐建平(第二、三、七章)、朱晓平(第四、五、六章)、郭镜明(第九、十章)、应明(第十一、十二章)。

在编写某些章节的释疑解难时,我们参阅了原工科数学课程教学指导委员会本科组编写的《高等数学释疑解难》,并采用了其中的少数问题,在此谨对作者表示诚挚的谢意。

由于我们对编写此类书缺乏经验,又限于水平,书中存在的不足之处,恳请同行和读者批评指正。

编 者

2002 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　映射与函数

一、内容要点

1. 集合的一般概念，集合的表示法，集合的基本运算一并、交、差，两个集合的直积；常见的几类实数集：区间、邻域、去心邻域；平面上矩形区域的直积表示法.

2. 映射的概念以及满射、单射、一一映射、逆映射和复合映射.

3. 函数的概念，函数的几种特性，反函数和复合函数，反函数存在的一个充分条件.

4. 函数的四则运算，初等函数，双曲函数.

二、教学要求

1. 理解函数概念及函数的几种特性：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

2. 理解反函数和复合函数概念.

3. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

三、释疑解难

1. 从映射出发定义的函数与传统的函数定义不一致，如何解释？

答　从映射出发定义的函数是："设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\rightarrow\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数."按定义，它由三部分构成：一是定义域 D，二是函数值所在的范围：实数集 $\mathbf{R}$，三是对应法则 f，并称对应法则 f 是定义在 D 上的函数.这个定义突出了对应法则 f，它是函数定义的核心.

传统的函数定义（如《高等数学》第四版中的表述）："设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集.如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数."按此定义，它由两部分构成：一是定义域 D，二是变量 y 和数值 x 之间的对应法则.如果确定的数值总是惟一的（这时函数称为单值函数），则二的内容中也隐含了函数值在实数集 $\mathbf{R}$ 内.因此，传统的函数定义，如果是单值函数，那么它所包含的函数的要素与从映射出发定义的函

数的要素是完全一致的.

两个定义也有不一致的地方：其一，从映射出发定义的函数，必定是单值函数.而传统的函数定义（如《高等数学》第四版中的表述），包含单值函数和多值函数；其二，传统的函数定义是有缺陷的，它称"y 是 x 的函数"，而同时又称"y 是与 x 对应的函数值"，这就把函数与函数值混在一起了；其三，传统的函数记号与映射的记号不尽相同，但它也有使用方便之处.以正弦函数为例，如用映射记号表示，则写作：映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，这里的 f 规定为：$\forall x\in\mathbf{R}, y=f(x)=\sin x$；而用传统的函数记号，只要用 $f(x)=\sin x$ 表示即可，这里省略了大家明确的 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，比较简明.所以，在《高等数学》第五版中，除利用映射的记号外，还采用了传统的函数记号.

2．单调函数必定存在反函数，不单调的函数是否一定不存在反函数？

答　不是的.函数的单调性只是函数存在反函数的一个充分条件，并不是必要条件.函数 f 是否存在反函数，取决于 f 是否为其定义域 $D\to f(D)$ 的单射.如果是的话，那么 f 就存在反函数 $f^{-1}:f(D)\to D$；否则就不存在反函数.不单调的函数，也可能是其定义域 $D\to f(D)$ 的单射，这时它就存在反函数.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[-1,0],\\ x^2+1, & x\in(0,1]\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上并不单调（图 1－1(a)），但它是 $[-1,1]\to[0,2]$ 的单射，所以存在反函数（图 1－1(b)）：

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & x\in[0,1],\\ \sqrt{x-1}, & x\in(1,2].\end{cases}$$

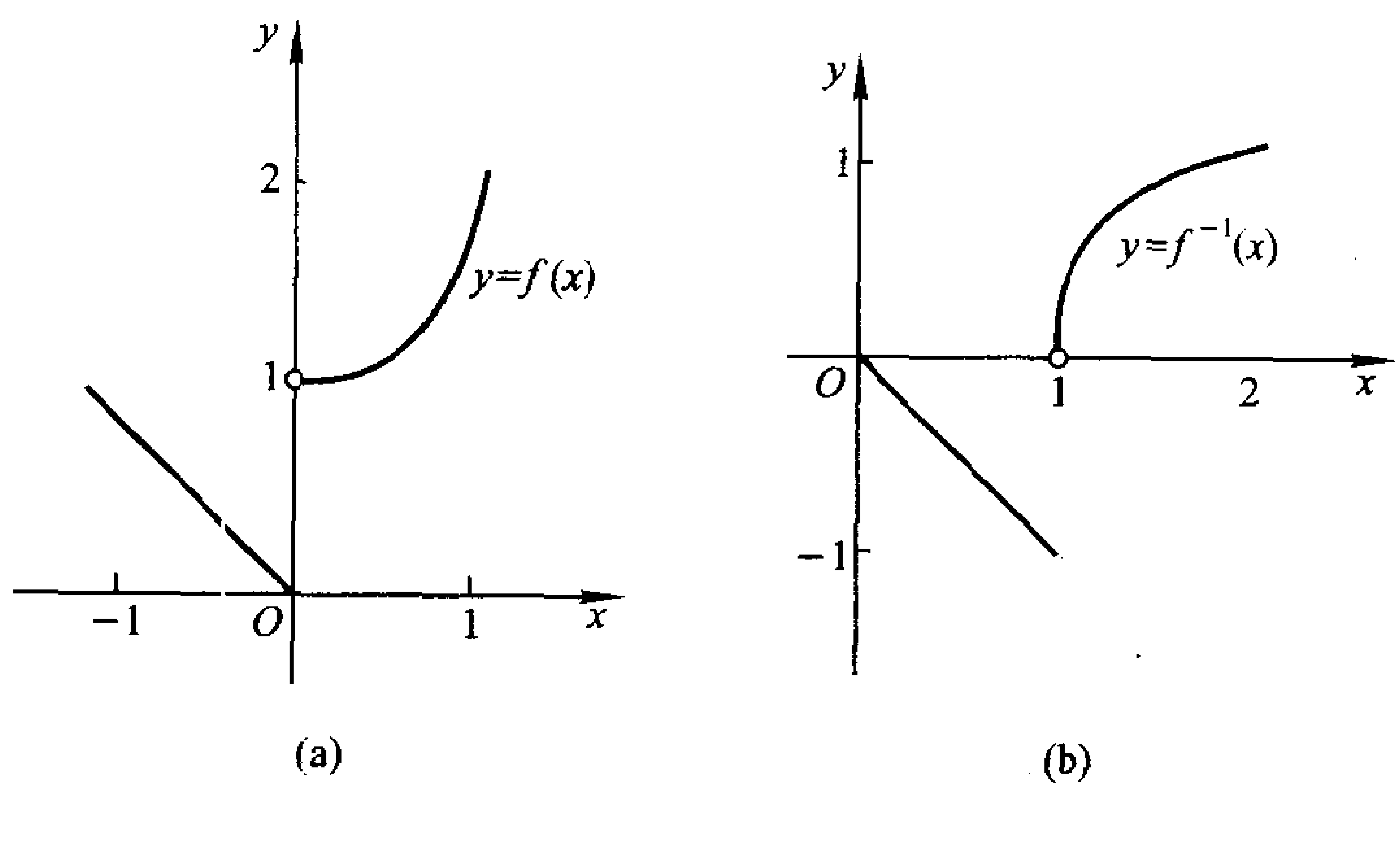

图 1－1

3．设函数 g 与函数 f 构成复合函数 $f\circ g$，问 $f\circ g$ 的定义域是否就是函数 g 的定义域？

答　不一定.复合函数 $f\circ g$ 的定义域 $D_{f\circ g}$ 必定是 g 的定义域 D_g 的一个子集,即 $D_{f\circ g}\subset D_g$,但 $D_{f\circ g}$ 与 D_g 不一定相等.这是因为 g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是:g 在 $D(=D_{f\circ g})$ 上的值域 $g(D)$ 必须含在 f 的定义域 D_f 内,即 $g(D)\subset D_f$,否则就不能构成复合函数.即,若 $x\in D_g$,但 $g(x)\notin D_f$,则 $x\notin D_{f\circ g}$.例如,$f(u)=\ln u$,$g(x)=\sin x$,$(f\circ g)(x)=\ln\sin x$,$f\circ g$ 的定义域 $D_{f\circ g}=\{x\mid\sin x>0,x\in\mathbf{R}\}=\{x\mid x\in(2k\pi,(2k+1)\pi),k\in\mathbf{Z}\}$,这里 $D_{f\circ g}$ 是 g 的定义域 $D_g=\mathbf{R}$ 的一个真子集.

4. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在数集 X 上都无界,那么 $f(x)g(x)$ 在 X 上也一定无界吗?

答　不一定.例如,$f(x)=\tan x$,$g(x)=\cot x$ 在 $X=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上都无界,但 $f(x)g(x)\equiv1$,$x\in X$.因而 $f(x)g(x)$ 在 X 上是有界的.

四、例题增补

例 1　已知 $f(\sqrt{x}-1)=x+2$,求函数 $f\circ f$ 的值域.

解　记号 $f(\sqrt{x}-1)$ 表示由 $u=\sqrt{x}-1$ 和 $f(u)$ 构成的复合函数.现在,先求 f 的表达式:

因为　$u=\sqrt{x}-1$,

所以　$x=(u+1)^2$,$f(u)=(u+1)^2+2$.　(1)

在 $u=\sqrt{x}-1$ 中,$x\geqslant0\Rightarrow u\geqslant-1$,从而 f 的定义域为 $D_f=[-1,+\infty)$,值域 $R_f=[2,+\infty)$.

再求 $f\circ f$ 的表达式:

由(1)得 $f[f(u)]=[f(u)+1]^2+2=[(u+1)^2+3]^2+2$.　(2)

当 $u\in D_f$ 时,$f(u)\in R_f\subset D_f$,$\Rightarrow f\circ f$ 的定义域 $D_{f\circ f}=D_f=[-1,+\infty)$.

由(2)知,当 $u=-1$ 时,$f[f(-1)]=11$ 是 $f\circ f$ 的最小值,即 $f[f(u)]\geqslant11$.又 $f[f(u)]$ 在 $D_{f\circ f}$ 上无界.于是函数 $f\circ f$ 的值域是区间 $[11,+\infty)$.

例 2　设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 都是区间 I 上的单调增加函数,对 $\forall x\in I$,有 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)\in I$,且

$$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),\tag{1}$$

证明

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)],\ \forall x\in I.$$

证　因为　$\forall x\in I$,有 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)\in I$,

所以　复合函数 $f\circ f$,$f\circ g$,$g\circ g$,$g\circ h$,$h\circ h$ 均存在,且它们都在区间 I 上有定义.

由 f、g、h 的单调性及条件(1)，可得，对 $\forall x\in I$，有

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)],\quad g[g(x)]\leqslant g[h(x)],$$
$$f[g(x)]\leqslant g[g(x)],\quad g[h(x)]\leqslant h[h(x)].$$

从而推得

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)],\forall x\in I.$$

五、习题解法提要(习题 1－1，教材上册第 20 页)

3．设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$．证明

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证 (1) 按集合相等的定义证明．即，证明 $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$，且 $f(A)\cup f(B)\subset f(A\cup B)$.

(2) 按子集的定义证明：

$y\in f(A\cap B)\Rightarrow\exists x\in A\cap B,y=f(x)\Rightarrow\exists x\in A$ 且 $x\in B$，

$y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

注意：反之，由 $y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow\exists x\in A$，$y=f(x)$；$\exists x'\in B$，$y=f(x')$．由于 f 不一定是单射，未必有 $x=x'$．例如，f 为函数 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$．$A=(-\infty,0]$，$B=[-1,+\infty)$，$A\cap B=[-1,0]$，$f(A\cap B)=[0,1]$，但 $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty)$.

5．设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$．记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$，证明：

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$；

(2) 当 f 是单射时，有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证 (1) 按子集的定义证明：

$x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)$.

因为记号 $f^{-1}(B)$ 表示集合 B 在映射 f 下的原像，即 $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B,x\in D_f\}$，

所以 $f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$.

(2) 由(1)，只要证：$x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow x\in A$.

用反证法．若 $x\notin A$，则 $\forall x'\in A$，$x\neq x'$，f 是单射，$\Rightarrow f(x)\neq f(x')$，从而 $f(x)\notin f(A)$，即 $x\notin f^{-1}(f(A))$，导出矛盾，所以 $x\in A$.

9．试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

证 (1) 先将函数表达式变形：

$$y=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}.$$

再按函数单调的定义证明.

(2) 按函数单调的定义证明.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $-l<x_1<x_2<0$,则 $0<-x_2<-x_1<l$.

由 f 是奇函数,得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$,

由 f 在 $(0,l)$ 内单调增加,得 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$.

14. 求下列函数的反函数:

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$;

(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(3) 先判定反函数存在.

设 $x_1\neq x_2$,且 $cx_i+d\neq 0(i=1,2)$,则

$$\frac{ax_2+b}{cx_2+d}-\frac{ax_1+b}{cx_1+d}=\frac{(ad-bc)(x_2-x_1)}{(cx_1+d)(cx_2+d)}\neq 0,$$

这说明所给函数是单射,存在反函数.

由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解得 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$ 或 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$.

(6) 因为　$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}=1-\dfrac{1}{2^x+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加,且 $0<y<1$,当 $x\to+\infty$ 时,$y\to 1$;当 $x\to-\infty$ 时,$y\to 0$,所以,所给函数存在反函数,且反函数的定义域为 $(0,1)$.

由 $y=1-\dfrac{1}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$ 或 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$,$x\in(0,1)$.

17. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)\ (a>0)$; (4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

解　(1) $0\leqslant x^2\leqslant 1\Rightarrow x\in[-1,1]$;

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1\Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi](n\in\mathbf{Z})$;

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1\Rightarrow x\in[-a,1-a]$;

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases}\Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$x\in[a,1-a]$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,定义域为 $\varnothing$.

20．收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元．厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购一台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元．

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1 000 台，厂方可获利润多少？

解　设订购 x 台，实际售价每台 p 元，厂方所获利润 P 元．则按题意，有

当 $x\in[0,100]$时，$p=90, P=(90-60)x=30x$，

当 $x>100$ 时，超过 100 台的订购量为 $x-100$，售价降低 $0.01(x-100)$，但最低价为 75，即降价数不超过 $90-75=15$，故 $0.01(x-100)\leqslant 15, \Rightarrow x\leqslant 1\ 600$．于是

当 $x\in(100,1\ 600]$时，$p=90-0.01(x-100)=91-0.01x$，$P=(91-0.01x-60)x=31x-0.01x^2$．

当 $x\in(1\ 600,+\infty)$时，$p=75, P=(75-60)x=15x$．

因此，有

$$(1)\ p=\begin{cases}90, & x\in[0,100],\\ 91-0.01x, & x\in(100,1\ 600],\\ 75, & x\in(1\ 600,+\infty).\end{cases}$$

$$(2)\ P=\begin{cases}30x, & x\in[0,100],\\ 31x-0.01x^2, & x\in(100,1\ 600],\\ 15x, & x\in(1\ 600,+\infty).\end{cases}$$

(3) $x=1\ 000, P=31\times 10^3-0.01\times 10^6=21\ 000$(元)

第二节　数列的极限

一、内容要点

1．数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 的定义．

2．收敛数列的性质：极限的惟一性、收敛数列的有界性、保号性以及收敛数列的子数列的性质．

二、教学要求

1．理解数列极限的定义．

2．了解收敛数列的性质，并会加以简单的应用．

三、释疑解难

1．有人说，数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示当$n$充分大后，$x_n$越来越接近于$a$，这种说法对吗？

答 这种说法不妥．因为“x_n越来越接近于a”一般理解为“$|x_n-a|$单调减少”，而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$则表示当$n$无限增大时，$|x_n-a|$趋于零．$|x_n-a|$单调减少不见得趋于零，而趋于零也不一定单调减少．例如，当n充分大后，数列$x_n=1+\frac{1}{n}$越来越接近于0，但$x_n\not\to 0(n\to\infty)$，又如，数列$y_n=\frac{2+(-1)^n}{n}\to 0(n\to\infty)$，但$|y_n-0|$并非单调减少，不能说“$y_n$越来越接近于0”．因此，应当说，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$表示“只要$n$充分大，$x_n$与$a$就可以接近到预先任意给定的程度(即$|x_n-a|$可以小于预先任意给定的正数$\varepsilon$)．”

2．数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$定义中的$N$与$\varepsilon$之间是不是存在函数关系？

答 N与ε有关，但不能说N与ε之间存在函数关系．因为对任意给定的$\varepsilon>0$，如果存在一个满足定义要求的N_0，那么任何一个大于N_0的正整数N都可作为定义要求的N，这就是说N的值并不是由ε的值所惟一确定的，按照函数的定义，N与ε之间不存在函数关系．

3．如何证明数列$\{x_n\}$发散？

答 证明数列$\{x_n\}$发散，通常采用以下两种方法：

(1) 找出数列$\{x_n\}$的一个发散子列；

(2) 找出数列$\{x_n\}$的两个有不同极限的子列．

现对这两种方法证明如下．

(1) 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的一个发散子列，要证明数列$\{x_n\}$发散．用反证法．若数列$\{x_n\}$收敛，则由收敛数列的性质，它的任一子列$\{x_{n_k}\}$都收敛(教材上册第一章第二节定理4)，这与假设子列$\{x_{n_k}\}$发散相矛盾，所以数列$\{x_n\}$发散．

(2) 设数列$\{x_{l_k}\}$、$\{x_{m_k}\}$是数列$\{x_n\}$的两个子列，且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{l_k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}=b$，$a\neq b$，要证明数列$\{x_n\}$发散．仍用反证法．若数列$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$．则由收敛数列的性质，它的任一子列也收敛，且极限也是c(教材上册第一章第二节定理4)．于是有$a=c$，$b=c$，从而$a=b$．这与假设$a\neq b$相矛盾，所以数列$\{x_n\}$发散．