东北师范大学函授講义

初等函数

朱 静 航 编

刘 孟 德 校閱

吉 林 人 民 出 版 社

前　　言

本講义原是东北师大数学系函授班的教材。基本上是根据部頒教学大綱，主要参考 С.И.Новоселов 著：代数与初等函数（張禾瑞等譯）并結合函授生的实际情况而編写的。經过函授班和教师进修学院使用的結果，均認为可作为函授教材或参考資料，及中学教师进修和教学上的参考。

原稿在使用过程中，我系函授副系主任刘孟德同志及其他同志提出很多修正意見，謹此申謝。不妥或錯誤之处，希望讀者多多提出批評和意見，以便加以修正。

編者　于長春东北师大数学系

东北师范大学函授講义
初　等　函　数　　朱靜航　編
刘孟德校閱

吉林人民出版社出版　（長春市斯大林大街）吉林省书刊出版业营业許可証出字第1号
吉林省長春新生企业公司印刷　新华书店吉林省分店发行
开本：850×1168 1/32　印張：8　字數：223,000　印数：11,300册
1957年6月第1版　1957年6月第1版第1次印刷

統一书号：13091·9　　定价（8）：0.95元

初等函数

目　　录

第一章　一般概念

第二章 冪函数

第三章 指数函数及对数函数

第四章 三角函数

第五章 逆三角函数

第六章 初等函数的研究

第七章 初等超越方程

第八章 初等复变函数

第一章 一般概念

§ 1.1 引 言

“初等函数”所要研究的函数，大体說来，就是我們在中学数学里所討論的那些函数的全体。那就是：中学里的代数和三角里所包括的代数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和逆三角函数及由之所組成的复合函数等。这些函数統称为**初等函数**。它們不但在实际应用上占着重要的地位，而且在其他各种較复杂函数的研究上，也要广泛地应用它們的性質。因此，初等函数是初等数学里的重要內容，也是高等数学的基础，不論出于数学理論上的考虑，或出于实践上的考虑，对之作系統而詳細地研究，是很必要的。对于数学教育工作者来說，用初等方法仔細地研究初等函数的某些性質并熟練地掌握它，則更具有特殊而重要的現实意义。

应該指出：我們所要研究的这些函数（初等函数），都是在科学的发展过程中，从各种各样的函数中被挑选出来的一类最簡單最基本并經常遇到的函数。因之，为了更好地研究和討論它們的性質，我們有必要从函数的一般概念討論起。因为，有些性質是函数所共有的，当我們掌握了一般函数的这些共同性質之后，則特殊函数的同一性質或类似性質，自然是易于推得的。

§ 1.2 函数的概念

1°. 常量和变量

在我們的实际生活里，或当我們对自然現象进行观察和研究时，經常要遇到各种各样但本質不同的量。例如：时間、長度、重量、体积、热容量、电子、原子价、溶解度等等。这些量都是随着自然現象的存在、运动、变化和发展的进行过程，在不同的情况下呈現着不同

的狀态：有的則发生变化，忽而变大忽而变小，而取不同的数值；有的則不起变化而保持着一个完全确定的数值，我們把前一种量称为**变量**，后一种称为**常量**。

例如：在标准狀况下，气体的克分子体积（是22.4升）；任一三角形的三內角的和（等于二直角或 180°）；任一圓的圓周長与直徑的比值（等于$\pi=3.14159\cdots$）等等都是常量。任意直角三角形的高与其斜边的比，水的溫度，大气压力，火車速度等等，則又都是变量。

应該注意的是：自然界的現象都是受着普遍发展和变化的規律所支配，因之我們所遇到的量，絕大多数是变量。因为同是一个量，在某种問題的条件下可能是常量，而在另一种問題的条件下又是变量。例如：一个黑板的長度，看来好象是不变的量，而事实上它却随着空气的溫度和濕度的变化不断地变化着，有时在增長，有时在縮短；球的体积在半徑不变的条件下是常量，而在半徑变化的条件下，却又是变量。因此，数学为了更好地反映客观实际，就把变量作为研究的主要对象。在初等数学里如代数、几何、三角等課目的某些場合討論它，在高等数学里它更是不可缺少的研究对象。因之变量也是本科目的主要研究对象。当然，为了使数学里所建立起来的理論能够反映或应用于各种本質不同的量上去，因而在数学上不考虑量的具体意义，而只考虑表达这个量的数值，这也就是数学理論的抽象性和它的一般性。

2°. 区　　間

在具体的問題里，变量所取的数值，有的可以取任意一个实数值。例如：方向直綫的長度 l，可以取任意一个实数值。有些只能取某些值，例如：学校的人数只能取正整数，等等。我們把变量 x 在所考虑的問題里，所可能取得的那些数值的全体，称为变量 x 的**变动区域**。

設 a 与 b 是二实数，且 $a<b$，則滿足不等式：$a\leqslant x\leqslant b$ 的 x 的实数集合，称为**閉区間** $[a, b]$；滿足不等式；$a<x<b$ 的 x 的实数集合，称为**开区間** (a, b)；滿足不等式；$a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的，分别称为**右开区間** $[a, b)$ 或**左开区間** $(a, b]$。在每一种区間里，都称 $b-a$ 为区間之長。

根据全体实数与整个数軸上的点之間的一一对应关系，可以把任意变量看成是数軸上的动点，常量看成是軸上的定点。因之，区間（a，b）可以用以 a，b 为端点的綫段来表示，并按照此綫段包含二端点 a，b；仅含一个端点 a 或 b；及不含端点分别表示閉区間〔a，b〕，半开区間〔a，b)或(a，b〕，及开区間(a，b)。区間之長即綫段之長。

有时候，我們也遇到无限区間，即从 $-\infty$（負无限大）∞（正无限大）为一端或兩端的区間。例如：（$-\infty$，∞）表示合于不等式 $-\infty<x<\infty$ 的实数集合，（$-\infty$，b）与（$-\infty$，b〕分别表示合于 $-\infty<x<b$ 与 $-\infty<x\leqslant b$；（a，∞）与〔a，∞)分别表示合于 $a<x<\infty$ 与 $a\leqslant x<\infty$ 的实数集合。

3°．函数的概念

根据辯証唯物論的观点，自然界的各种現象的形成，和現象間的結合，不但是复杂的、多种多样的，而且在存在、运动、变化和发展的进行过程上，都是遵循着互相密切联系、互相依賴、互相制約着的規律的。那就是說：任何一个現象，在变化的过程上，都不是孤立的。一方面它是由其他一系列的現象所决定；另一方面它也要引起一系列現象的变化和发展。我們所遇到的量（常量和变量），在变化的过程上同样也是遵循着这个規律而存在和变化着的。它随着另外一些量的存在和变化而存在和变化着；并且由它的存在和变化，又引起其他量的存在和变化。

例如：圓的圓周長 C 与半徑 r；正方形的面积 A 与一边之長 a；气体的体积 V 与压力 p 等等，其間都是存在着互相制約、关联、依賴的变化規律的。这些变化規律用数学的語言，可以分别表現为：

$$C=2\pi r;\quad A=a^2;\quad V=\frac{k}{p}\ (k\text{是常数});\ \text{等等。}$$

从这些变化規律里，一方面我們可以明显地看到研究函数的重要性。因为参与变化过程里变化着的量，既然是不能彼此分裂地、彼此孤立地存在和发展，那末在研究它的过程上，就应該研究它們之間的相互关系——那种在实际上連系着它們的依存关系。其中实际的量与

量之間的相互关系的数学表現，就是函数关系的概念。无論出于数学理論的需要或出于实际应用的要求，仅仅对个别的量进行研究是不能反映客观实际的，因此我們有必要經常地来研究量与量之間的相互关系。而数学里的函数概念，正是这种量間相互关系的数学表現。这就是在历史上，为什么数学研究的主要內容，由研究数量进入到研究函数，以及为什么，現在我們要專門来研究初等函数的原因。

另一方面，我們也可以由此給函数的概念下一个定义。因为，从这些变化規律的数学表現里，我們清楚地看到：对于（半徑）r 的每一个值，都有（圓周長）C 的一个确定的值与之对应；对于（正方形一边之長）a 的每一个值，都有（面积）A 的一个确定的值与之对应；对于（气体压力）p 的每一个值，都有（体积）V 的一个确定的值与之对应；一般地講，当抽去所研究的量的具体意义，便可以得出函数的定义如下：

函数定义： 当对于变量x的每一个值，都有变量 y 的一个确定的值与之对应时，便称y是x的函数。 并用符号：$y=f(x)$，或$y=\Phi(x)$，等等来表示。其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量或函数**，括弧外的字母代表函数和自变量間的依从关系，或称对应規律。

例如：函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$是变量 x 的函数。当 $x=\frac{1}{2}$时，函数的值为$\frac{4}{5}$；当 $x=1$ 时，为$\frac{1}{2}$。

应該注意的是：上面的定义，虽然能够反映量間的变化关系，但仍不够完善。因为定义里的“变量 x 的每一个值”，并不等于說是任何一个值，但究竟应該是那些值，在許多情形下，要依据 x 与 y 的实际意义或所研究的問題之具体內容来决定。例如：

函数 $y=x!$，只有当 x 是正整数或零时才有意义，所以 x 只能考虑是零或正整数。当$x=3$ 时，$y=3!=6$；当 $x=4$时，$y=4!=24$；但当$x=\sqrt{2}$时，便无意义。

又如函数 $y=\sqrt{1-x}$，只有当 $x\leqslant1$ 时在实数域內才有意义，所以 x 只能考虑取$x\leqslant1$ 的值；而函数 $y=3x^2+4$，对于 x的任意一个值都可以完全合理地确定出函数值，所以 x 可以取任意一个值。

这种根据对应規律，使所确定的函数 y 的值有意义的自变量 x 的值的集合 M，是很重要的。我們称之为**函数的定义域**，或**变量 x 的（允許）值解**，而函数 y 的值所組成的集合 N，称为**函数的值集或值域**。由此可見，在函数定义里，应該把集合概念包含进去，方能更确切地反映客观实际及量間的对应关系。也只有包括了定义域和对应規律，函数概念方趋于完整。所以函数概念的精确定义是：如果对于变量 x 之屬于数集合 M 的每一个数值，都有变量的一个且只有一个确定的数值与之对应，则称 y 是确定于数集合 M 上关于 x 的一个函数（函数 y 的值的集合 N，通常并不指出，因为对应規律本身，就已經把它确定了）。

上述的定义，虽然是基于集合、集合的元素、兩集合元素間的对应等几个最基本的概念，以建立起来的一般定义；但由于数学更进一步的发展，不管这个定义是如何的完整，但其范圍則仍显得非常狹隘。因为依照这个定义，函数：

$$y=f(x)$$

是对于集合 M 的每一个数值（定义域里的变量 x 的值），有 y 的一个数值与之对应。而在近代数学上，要求把函数概念，建立在更一般的观点上，使之更有一般性。那就是，不局限于狹小的数的范圍，使所討論的集合，应該是由具有任意性質的元素所組成的。現在給出函数的一般定义如下：

函数的一般定义：設有任意兩个集合 $M=\{x\}$ 与 $N=\{y\}$，它們的元素 x 和 y 是任意的事物。如果对于集合 M 的每一个元素 x，都有集合 N 的一个且只有一个元素 y 与之对应，則称 y 是定义于 M 上关于 x 的一个函数。幷写成：

$$y=f(x)$$

其中集合 M 的元素 x 称为**变量的值**，集合 N 的对应元素 y，称为**函数的值**，集合 M 称为函数的**定义域或变量 x 的（允許）值集**，对应值 $y=f(x)$ 的集合 N 称为**函数值集或值域**。

习惯上，如果 $x=a$ 是变量值，对应的函数值是 $y=f(a)$，則我們常說："借助于对应規律 $f(x)$，a 被映象于 $f(a)$"。同时称 $f(a)$

为 a 的象，a 为 $f(a)$ 的原象。整个函数値集 N 称为变量値集 M 的象，M 为 N 的原象。

例子：1. 設 M 是一个班里的30个学生的集合，N 是各种成績（2—5分）的集合，考試的結果便确定一种对应規律。

2. 設使平面上的每一点 x，都有一点 y 与之对应，y 是 x 在某一直綫上的正射影。此时平面上的点 x 是变量値，射影軸上的点 y 是函数値，对应律是 x 在直綫上的正射影。函数的定义域是平面上所有点的集合，値域是整个射影軸。

3. 空間的每一个球 x，有点 y——球心——与之对应。此处球是变量値，空間点 y 是函数値。函数的定义域是空間所有球的集合，函数値域是整个空間。

4. 設 M 是平面上所有矩形的集合，N 是所有实数的集合，对于每一个矩形 x，使它的面积为正实数 y 与之对应。这里自变量 x 是矩形，函数値 y 是矩形的面积，即正实数。在这个例子里，对于每一个自变量（矩形）x 都对应着唯一的正实数（矩形的面积）y。

定义：我們把对于集合 M 中的每一个变量値，都有集合 N 中的一个且只有一个値与之对应的函数，称为**單値函数**。

如果（自）变量与函数的値都是实数，即函数的定义域和値域都是某些实数集合，这样的函数，便称为实函数。

今后我們主要研究單値实函数，而且是**連續函数**。

§ 1.3 函数的表示法

函数研究上的一个主要問題，是对于变量間之对应規律的求得。因为，如以上所論，沒有对应規律，就談不到函数，从而也就不能对于每一个自变量的値，来确定一个唯一的函数値与之相对应。至于用什么方法（代数的、几何的、物理的等）或怎样求得对应規律，一般說来，則是无关紧要的事，因为只要能求出对应規律就行。

关于对应規律，如果不加限制的話，根据需要上的不同，可以有各

种各样的表达方式，而最重要的则是解析法、列表法和图示法等三种。

1°. 解 析 法

解析法又称公式法，是数学上表示函数的优越而基本的方法。它是利用公式，或称解析表达式来給出函数与自变量之間的对应規律的方法。我們可以用公式明显地表現出：自变量的值与常数之間，应該施行哪些运算（加、減、乘、除、乘方、开方、对数、求正弦、正切等等），和怎样的运算順序，以求得对应的函数值。

反之，我們把变量之值与常数，以及施行于变量的值与常数上的某些运算的整体，称为**解析表达式**或**公式**，利用解析表达式或公式以表示函数的方法称为**解析法**。

例如：公式 ① $y=\sqrt{(x-2)(x-3)(x-4)}$；

② $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}+\log_a(x-3)$，$a>0$；

③ $y=\sqrt{\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4}}$；

④ 一般地是：$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，

都表示着 y 是 x 的函数。它們的定义域依次为：〔2，3〕，$x\geqslant4$；(3，4)；〔2，3〕，$x>4$；〔a，b〕。如果把变量 x 的已知值代入右边，幷按公式所指出的运算和运算順序施行运算后，就可以求得其对应的 y 的值。

解析法对于函数关系的确定起着很大的作用，因为用解析表达式来表达函数是簡單而合用的。无論在函数的研究上或在其实际运用上，解析法的确是一个极可貴的方法。历史上函数概念与表示函数的解析表达式在很長一个时期（十八世紀全部十九世紀初期），一直是不可分割的。那时候，認为解析法是建立各种函数的最自然的方法，同时还認为函数一定要用公式来表示。伯努利（1718年）和尤拉(1748年），对于函数所下的“运算”定义，就是把函数与公式等量齐观的。尤拉曾提出了这样的函数定义：“变量的函数就是由这变量和数（或常量），用任何方法所構成的解析表达式”。到了十九世紀，在

自然科学和其他科学发展的影响下，人們才認識到函数不一定要用公式来表达。而且事实上，自然界中許多变量之間的函数关系，根本不可能用公式来表示，或者虽有了公式，但是由于公式很复杂，就削弱了它的实用价值和意义。在这种情况下，我們就沒有必要，一定要用公式来表达变量之間的函数关系。因此，列表法和图示法，也就进一步有它的重要意义和作用了。

这里还应該特别指出的是：一个用公式来表达的函数，并不是說这个函数一定要由一个公式来定义，十九世紀中叶，狄里克莱首先提出：函数可以用不同的公式在它的定义域的不同部分上来确定。

例如：1. 函数 $y=\begin{cases}x, & (若x\geqslant 0)\\ -x, & (若x<0).\end{cases}$

2. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & (若x\neq 0)\\ 2, & (若x=0).\end{cases}$

3. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}-1-x^2 & (当\ x<0)\\ 0 & (当\ x=0)\\ 1+x^2 & (当\ x>0).\end{cases}$

4. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}x-1 & (若\ x>1)\\ \sqrt{1-x^2} & (若\ -1\leqslant x\leqslant 1)\\ -(x+1) & (若\ x<-1).\end{cases}$

5. 函数 $y=f(x)=\begin{cases}2 & (若\ x\leqslant -1)\\ 1-x & (若 -1<x\leqslant 0)\\ 1+x & (若\ 0<x\leqslant 1)\\ 2 & (若\ x>1).\end{cases}$

2°. 列 表 法

列表法是社会科学、自然科学、及工程技术上經常应用的方法。它是用表格表示函数与自变量之間的对应規律的方法。因为在实用上，应用公式法，对于每一个情况，都要完成一定数量的計算，有时候这种計算很麻煩，那就不如預先把自变量的值与其对应的函数值算出来，并列成一表，显得簡單便利。例如：对于任一自然数，有它的

因数的个数（也是自然数）与之对应。基于这个对应关系便可以列成下表：

$$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots\cdots$$
$$y = 1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, \cdots\cdots$$

从这个表里，对于每个 x 的值如12，就可以直接找到对应的函数值（因数的个数）是6，这就是列表法的便利处。

我們經常使用的平方表、立方表、对数表、三角函数表、双曲綫函数表、橢圓函数表、貝塞耳函数表等等，都是用列表法来表达函数与自变量之值之間的对应規律的。

列表法的优越性不仅在于能使計算容易和便利，而且在于它可以用經驗方法把某一个不易求得或沒有必要求得的解析表达式（公式）的函数关系表現出来。例如，我們在各种試驗工作中，总是把各次試驗的数据列成一表，从表上就可以明显地看出自变量与函数之值之間的对应关系。

例如：我們可以把历年我国鋼的产量的发展情形列表如下（單位：吨）

1907年	1933年	1936年	1943年
8,500	25,000	400,000	900,000
1949年	1952年	1957年	
158,000	1,350,000	4,120,000	

从这个表里，可以明显地看出我国鋼的产量的发展情况（其中1936年与1943年的产量中的絕大部分，是在当时日本帝国主义侵占下的东北生产的）。自1949年中华人民共和国成立以后，全国鋼的产量，就以飞跃的速度发展着。

由以上所述，不难看出，列表法实际上只是表示兩个集合元素之間的对应关系。至于其中函数的解析表达式，不但沒有必要而且也不容易求得。

3°. 图 示 法

图示法亦称**几何表示法**，也是科学上常用的方法之一，它是用几